UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST AUG 1 1925

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci22fran

7330

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. HERMITE, *président*.

BERTRAND.

DARBOUX.

H. POINCARÉ

J. TANNERY.

FOUSSEREAU, *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

25401 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

K
Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXII. — ANNÉE 1898.

(TOME XXXIII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179866
24/4/23

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

QA
1
B8
v. 33

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GALOIS (E.). — Œuvres mathématiques publiées sous les auspices de la Société mathématique de France. Avec une introduction par M. *E. Picard*. 1 vol. in-8°; x-61 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

Liouville avait recueilli et publié dans son *Journal* les Œuvres mathématiques d'Évariste Galois. La *Société mathématique* a pensé avec raison qu'il convenait de publier une édition séparée de ces Œuvres; cette édition est d'ailleurs conforme à celle de Liouville. On n'a rien retrouvé depuis 1846 et l'on ne peut guère espérer qu'on retrouve quoi que ce soit qui vienne s'ajouter à l'œuvre si courte et si considérable de Galois.

Dans une intéressante Introduction, M. Picard retrace à grands traits la vie de Galois et le rôle qu'ont joué ses découvertes dans la Science moderne.

M. Picard cite avec les éloges qu'il mérite le travail biographique que M. Paul Dupuy a publié en 1896, dans les *Annales de l'École Normale supérieure*. Si Galois n'entra qu'à contre-cœur dans cette École, s'il en fut chassé au bout d'un an, il en reste, malgré tout, une des plus grandes gloires et la Maison qu'il a traversée lui doit des honneurs, par cela seul qu'il y a passé : elle s'est rappelé Galois, quand elle a fêté son centenaire et Sophus

Lie a parlé de lui comme il convenait, en savant; mais il restait à écrire la vie de Galois.

C'est ce qu'a fait M. Dupuy et je crois bien que M. Picard a raison quand il dit que son travail est définitif. Il était grand temps qu'il fût accompli. M. Dupuy a pu consulter ceux des contemporains de Galois qui survivent et se souviennent de lui, il a pu recueillir des membres de sa famille les renseignements les plus précieux; on lui a confié l'inestimable portrait que MM. Gauthier-Villars ont reproduit en tête de ses Œuvres; avec la passion et les procédés d'un érudit, il a feuilleté les journaux du temps, les registres d'écrou de Sainte-Pélagie, les registres d'entrée à l'hôpital.... Grâce aux souvenirs de ceux qui avaient connu Galois, grâce à ses patientes recherches, il a su faire revivre un peu ce merveilleux génie et l'étrange milieu révolutionnaire où il s'est agité pendant de si courtes années; il a pu enfin nous faire comprendre ces défauts de caractère que l'on reproche justement à Galois, mais qui, dès qu'on les comprend, ne découragent plus la sympathie. Aussi faut-il savoir gré à M. P. Dupuy, de l'œuvre pieuse qu'il a menée à bonne fin. Quant à l'admiration qui est due à Galois, les soixante pages où tiennent ses Œuvres mathématiques suffisent à lui assurer une durée égale à celle de la Science. J. T.

FRISCHAUF (J.). — Vorlesungen ueber Kreis- und Kugel-Functionen-Reihen. Un vol. in-8°, VI-60 p. Leipzig, Teubner, 1897.

L'objet essentiel de l'auteur est d'établir, sous les conditions de Dirichlet, la possibilité de la représentation des fonctions au moyen des séries trigonométriques ou des séries de fonctions sphériques : relativement aux fonctions sphériques, il se borne à établir celles des propriétés qui sont tout à fait fondamentales, ou dont il aura besoin pour la démonstration de la convergence : la démonstration qu'il expose est au fond celle de Dini (*Annali di Matematica*, VI, 1874), mais notablement simplifiée. L'exposition est claire et élémentaire : elle rendra service aux étudiants en Mathématiques qui veulent s'initier aux éléments d'une théorie

très importante et à ceux des étudiants en Physique qui éprouvent le besoin de connaître la démonstration de propositions mathématiques dont ils ont à faire un usage continuel. J. T.

JANUSCHKE (H.). — Das Princip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Un vol. in-8°: x-453 p. Leipzig, Teubner, 1897.

Le Livre de M. Januschke est intéressant et utile; il permet à un lecteur qui a reçu une bonne éducation mathématique et qui connaît les éléments des Sciences expérimentales d'acquérir des idées d'ensemble sur les points essentiels de la Physique, telle qu'elle est aujourd'hui constituée. Si l'auteur a du goût pour les généralités, il n'en a pas moins pour la précision et il a multiplié singulièrement les exemples concrets et les applications numériques, bien propres à fixer dans l'esprit du lecteur le sens des propositions ou des théories qu'il développe. M. Januschke a pour son sujet un certain enthousiasme, qui n'est pas pour déplaire : il est persuadé que l'étude de la Physique est excellente pour former *l'esprit et le cœur :* cette étude aussi rendra la vie plus douce aux hommes, en leur faisant connaître et aimer cette Nature qui causait tant de terreurs à leurs superstitieux ancêtres. Voilà une opinion qui est rassurante pour l'avenir, et qui a le mérite d'encourager dès à présent ceux qui la partagent.

M. Januschke a emprunté une curieuse épigraphe à R. Mayer : c'est une déclaration de guerre à ce qui reste des dieux de la Grèce, réfugiés dans les fluides impondérables; c'est là, il faut l'avouer, un triste déguisement pour ces radieuses divinités, plus triste encore que ceux qu'avait rêvés la fantaisie de Henri Heine; ces lamentables idoles sont maintenant détrônées par le principe de la conservation de l'Énergie. Si ce principe devient une religion, il convient, peut-être, de lui pardonner le mystère dont il reste enveloppé; tous les termes, à vrai dire, n'en sont pas d'une parfaite clarté; si les forces, dont la notion est assurément un résidu métaphysique n'y figurent pas immédiatement, il est difficile de dire ce que c'est que les masses, à moins de se résoudre à les regarder *comme des coeffi-*

cients qu'il est commode d'introduire dans les calculs [1], ce que c'est que l'énergie potentielle, à moins de la regarder comme une fonction des coordonnées, ce qui est peut-être insuffisant. Mais M. Januschke ne se perd pas dans ces questions théologiques. C'est la pratique du culte qu'il veut enseigner : le principe de la conservation de l'énergie est posé comme une induction résultant des découvertes de Galilée; quelques exemples concrets, simples et bien choisis permettent d'en donner quelque habitude au lecteur. Disons de suite que l'auteur a grand soin, dans toutes les parties de son Livre, de donner d'intéressants détails historiques sur les découvertes scientifiques et l'évolution des idées qui s'y rattachent; c'est là une excellente méthode qui marque d'ailleurs les tendances philosophiques de M. Januschke, assez nettement inclinées vers le positivisme. S'il est vrai que l'auteur incline dans ce sens, pourquoi énonce-t-il cette proposition : l'énergie totale de l'Univers est constante? Elle semble bien supposer, pour avoir un sens, que l'Univers soit fini, et cette hypothèse-là dépasse la Science positive. Celle-ci est essentiellement limitée dans le temps et dans l'espace, à des choses voisines de nous, à moins que nous ne prétendions substituer un Univers de définition à celui dont l'induction nous permet de pénétrer une faible partie.

Le principe de la conservation de l'énergie une fois posé, l'auteur en développe les conséquences : c'est, d'abord, toute la Mécanique, puisque le principe de d'Alembert peut être considéré comme une de ces conséquences, en regardant tous les mouvements d'un système, compatibles avec les liaisons, comme satisfaisant au principe de la conservation. Plusieurs des problèmes classiques de la Mécanique rationnelle, particulièrement importants sont d'ailleurs développés avec détail. Deux Chapitres sont consacrés au mouvement et à l'équilibre des fluides; l'auteur insistera naturellement sur le rôle que la notion de travail joue dans l'interprétation des propriétés de ces corps : l'étude des propriétés mécaniques des fluides se relie naturellement à celle des forces moléculaires et de l'élasticité, qui termine la partie purement mécanique de l'Ouvrage.

---

(1) POINCARÉ, *Les idées de Hertz sur la Mécanique* (*Revue générale des Sciences*, 30 septembre 1897).

Dans la seconde Partie, l'auteur passe ensuite en revue les diverses parties de la Physique : Chaleur, Électricité, Magnétisme et Lumière. C'est un intéressant résumé de Physique mathématique, que nous nous contentons de signaler. J. T.

LAMB (H.). — An elementary course of infinitesimal Calculus. Un vol. petit in-8°, xx-616 p. Cambridge, University Press, 1897.

L'auteur dit dans sa préface qu'il n'a eu l'intention d'enseigner ni la Mécanique, ni la Physique, ni l'Art de l'Ingénieur, mais d'habituer le lecteur au genre de Mathématiques que l'on fait le plus habituellement en Mécanique, en Physique, ou dans le métier d'Ingénieur. Cette phrase me paraît caractériser parfaitement le livre qu'il a voulu faire, et qu'il a réussi à faire. C'est vraiment un cours élémentaire de Calcul infinitésimal, non un traité d'Analyse : tout ce qui n'est pas indispensable a été délibérément sacrifié; mais, à coup sûr, l'auteur range, parmi les choses indispensables, la clarté et la correction des démonstrations; son livre n'est pas non plus un recueil de recettes, et il n'est pas douteux que l'étudiant en Mathématiques, celui même qui a l'intention de poursuivre des études théoriques, ne puisse, avant d'aborder des traités plus complets, tirer un excellent parti de ce livre, d'une part pour acquérir une vue d'ensemble, d'autre part et surtout pour se familiariser par de nombreux exemples simples, gradués, intéressants, avec le maniement des formules et des méthodes les plus élémentaires et les plus usuelles du Calcul différentiel et intégral. C'est, à ce que je crois, une excellente discipline que de s'habituer à l'usage de l'outil, avant de pousser un peu loin les études théoriques. L'exposition est d'ailleurs bien appropriée à la classe de lecteurs que M. Lamb a eue en vue.

G. LEJEUNE DIRICHLET'S WERKE. herausgegeben auf Veranlassung der K. P. Akademie der Wissenschaften von *L. Kronecker,* fortgesetzt von *L. Fuchs.* Zweiter Band. In-4°, x-422 p. Berlin, G. Reimer, 1897.

Le Volume que nous avons sous les yeux et qui termine la publication commencée par Kronecker se compose de deux Parties distinctes. La première, qui fait suite au premier Volume, comprend, dans leur ordre chronologique, les Mémoires publiés par Dirichlet lui-même; elle s'étend depuis le Mémoire *Ueber die Stabilität des Gleichgewichts,* publié en janvier 1846 dans le *Journal de Crelle,* jusqu'à la *Démonstration nouvelle d'une proposition relative à la théorie des formes quadratiques* et aux *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik,* publiées en 1857. M. Kronecker, qui avait commencé la publication, avait l'intention d'y joindre toutes les traductions si nombreuses des Mémoires de Dirichlet qui ont paru en France par les soins et dans le Journal de Liouville; M. Fuchs qui, après la mort si regrettée de Kronecker, a été chargé par l'Académie de Berlin de continuer la publication, s'est borné à publier les Œuvres originales et il a rejeté à la fin du Volume la liste des traductions dont la publication aurait fait double emploi. On ne saurait le regretter, la connaissance de la langue allemande étant aujourd'hui très suffisamment répandue.

La seconde Partie comprend l'Éloge de Dirichlet, prononcé par Kummer, en 1860, devant l'Académie de Berlin; quelques travaux publiés après la mort du grand géomètre, en partie les *Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik,* dont nous devons l'impression à M. R. Dedekind; différents morceaux moins étendus; la correspondance entre Gauss et Dirichlet, entre Dirichlet et Kronecker; quelques lettres échangées entre A. de Humboldt et Dirichlet; on a laissé de côté, dans cette dernière correspondance, tout ce qui n'a pas un intérêt purement mathématique. Les indications données dans la préface par M. Fuchs montrent avec quel soin la publication a été dirigée et par lui-même et par les collaborateurs qui lui ont prêté leur concours pour telle ou telle partie de l'Ouvrage.

MÉLANGES.

SUR LA MÉTHODE D'APPROXIMATION DE LAGUERRE;

PAR M. ÉMILE BOREL.

Dans un Mémoire [1] publié en 1880, Laguerre a indiqué une méthode d'approximation qui s'applique seulement aux équations algébriques ayant toutes leurs racines réelles, mais qui l'a néanmoins conduit à des résultats importants [2]. Dans l'édition des Œuvres de Laguerre, publiée par l'Académie des Sciences [3], M. Hermite a consacré à ce Mémoire une Note des plus intéressantes dans laquelle il établit les résultats fondamentaux de Laguerre par une méthode nouvelle et plus directe. Une étude approfondie de cette dernière méthode m'a conduit à penser qu'en modifiant légèrement la forme de l'exposition, il serait possible à la fois de rendre presque intuitif le résultat de Laguerre et de montrer qu'il donne la solution *complète* d'un problème important.

Désignons par

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

une équation de degré n qui a toutes ses racines réelles; par a, b, c, ..., l ces n racines, distinctes ou non, et par x un nombre quelconque. Nous supposerons, pour fixer les idées, x compris

---

(1) *Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébrique qui a toutes ses racines réelles* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1880).

(2) Parmi ces résultats, je citerai la formule approchée

$$\cos\frac{\pi x}{2} = 1 - \frac{x^2}{x - (x-1)\sqrt{\frac{2-x}{3}}},$$

qui donne la valeur du cosinus, x étant compris entre 0 et 1, avec une erreur inférieure à 0,0003.

(3) *Œuvres de Laguerre*, t. I. Paris, Gauthier-Villars; 1897.

entre deux racines [1] de l'équation (1) et nous nous proposons de trouver, pour chacune de ces deux racines, une valeur plus approchée, et approchée dans le même sens que x. En d'autres termes, nous cherchons un intervalle comprenant x et ne renfermant aucune racine de l'équation (1).

Voici comment nous procéderons, d'après Laguerre et M. Hermite.

Nous avons

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \ldots + \frac{1}{x-l},$$

$$\frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{[f(x)]^2} = \frac{1}{(x-a)^2} + \frac{1}{(x-b)^2} + \ldots + \frac{1}{(x-l)^2}.$$

Posons

$$(2) \qquad \frac{1}{x-a} = \alpha, \qquad \frac{1}{x-b} = \beta, \qquad \ldots, \qquad \frac{1}{x-l} = \lambda,$$

$$(3) \qquad \frac{f'(x)}{f(x)} = A, \qquad \frac{f'^2(x) - f(x)f''(x)}{[f(x)]^2} = B^2, \qquad B > 0;$$

nous pourrons écrire

$$(4) \qquad \alpha + \beta + \ldots + \lambda = A,$$

$$(5) \qquad \alpha^2 + \beta^2 + \ldots + \lambda^2 = B^2.$$

Par hypothèse, les quantités α, β, ..., λ sont réelles; on en conclut, par exemple,

$$|\alpha| < B,$$

et, par suite,

$$|x-a| > \frac{1}{B}.$$

C'est en généralisant ce premier résultat que Laguerre a été conduit à son théorème, que nous allons démontrer d'une manière différente.

Écrivons l'équation (4) sous la forme

$$\beta + \ldots + \lambda = A - \alpha$$

---

[1] Dans le cas où x serait supérieur à la plus grande ou inférieur à la plus petite racine de l'équation, on pourrait changer x en $\frac{1}{x}$ dans l'équation (1) et l'on serait ramené au cas que nous traitons. Voir *Œuvres de Laguerre*, p. 89.

et supposons que α ait une valeur déterminée; les nombres réels $\beta, \ldots, \lambda$ sont donc assujettis à avoir une somme constante. Dès lors, si nous considérons l'expression

$$\beta^2 + \ldots + \lambda^2,$$

cette expression sera minimum pour $\beta = \ldots = \lambda = \frac{A - \alpha}{n - 1}$.

Nous pouvons donc affirmer que, les nombres réels $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ vérifiant la relation (4), on a

$$\beta^2 + \ldots + \lambda^2 \geqq (n-1)\left(\frac{A - \alpha}{n - 1}\right)^2, \tag{6}$$

l'égalité ayant lieu seulement lorsque les nombres $\beta, \ldots, \lambda$ sont égaux.

Si nous tenons compte de la relation (5), l'inégalité (6) devient

$$(n-1)(B^2 - \alpha^2) \geqq (A - \alpha)^2$$

ou enfin

$$n\alpha^2 - 2A\alpha + A^2 - (n-1)B^2 \geqq 0.$$

Désignons par $+\alpha'$ et $-\alpha''$ les deux racines du trinome du second degré en α qui forme le premier membre de cette inégalité [1]; on aura certainement *ou bien*

$$\alpha \geqq \alpha'$$

ou bien

$$\alpha \leqq -\alpha''.$$

Les relations (2) prouvent dès lors que l'on a *ou bien*

$$a \geqq x - \frac{1}{\alpha'}$$

ou bien

$$a \leqq x - \frac{1}{\alpha''}.$$

D'ailleurs a est une racine quelconque de l'équation donnée.

Les nombres $x - \frac{1}{\alpha''}$ et $x + \frac{1}{\alpha'}$ sont précisément les valeurs approchées que Laguerre a proposées pour les deux racines qui comprennent le nombre x. Il a montré, de plus, par des exemples

---

[1] On s'assure aisément que, en vertu des hypothèses faites, ces deux racines sont de signes contraires.

numériques variés, que l'approximation obtenue ainsi est très grande. La forme sous laquelle nous avons présenté la démonstration précédente, dont le principe est dû à M. Hermite, va nous donner une raison de cette grande précision, en nous faisant voir que la méthode de Laguerre n'est pas seulement un artifice de calcul ingénieux, pouvant être remplacé par une foule d'autres, mais fournit la solution unique d'un problème très précis.

Ce problème, qu'on est naturellement conduit à se poser, est le suivant : *On a une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et dont on connaît le degré n. Désignant par x une valeur numérique de la variable, on connaît les valeurs numériques des polynomes* $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$. **Avec ces seules données,** *trouver un intervalle aussi grand que possible, comprenant le nombre x, et ne renfermant aucune racine de l'équation.* Il est d'abord clair que, si les racines de l'équation n'étaient pas supposées toutes réelles, on ne pourrait rien conclure de nos données, à moins que n ne fût égal à *deux* (car elles suffisent alors à déterminer l'équation). Mais si $n > 2$, on peut toujours disposer des coefficients de l'équation de manière que :

1° Elle ait pour racine un nombre réel a absolument quelconque ;

2° Les polynomes $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ aient des valeurs numériques données à l'avance.

On ne peut donc rien conclure, au sujet de la racine a, de la connaissance de ces valeurs numériques.

Mais nous avons vu, au contraire, que, si les racines sont toutes réelles, en calculant, au moyen des données, les quantités A et B^2 par les formules (3) et en désignant par α' et $-\alpha''$ les racines [1] de l'équation du second degré

$$n\alpha^2 - 2A\alpha + A^2 - (n-1)B^2 = 0, \tag{7}$$

on peut affirmer que l'équation proposée n'a pas de racines

[1] Ces racines sont certainement de signes contraires si x est compris entre deux racines de l'équation donnée. Sinon elles peuvent être de signes contraires ou de même signe. Ce dernier cas se traite aisément à l'aide de la remarque de Laguerre, déjà citée en note.

dans l'intervalle

$$x = \frac{1}{\alpha''}, \qquad x = \frac{1}{\alpha'}.$$

Mais il y a plus. La démonstration même que nous avons donnée nous assure que, si l'équation proposée a $n - 1$ racines égales, la racine simple a pour valeur, ou bien $x = \frac{1}{\alpha''}$, ou bien $x + \frac{1}{\alpha'}$ (¹). Par conséquent, *avec les seules données dont nous disposons, il n'est pas possible de trouver un intervalle plus grand que celui de Laguerre et ayant les mêmes propriétés.* La méthode d'approximation de Laguerre tire donc tout le parti possible (²) des faits que nous avons supposé connus.

Dans le cas où le degré de l'équation ne serait pas donné, on remarquera que, lorsque n augmente indéfiniment (³), l'équation (7) devient

$$\alpha^2 - B^2 = 0.$$

On peut donc seulement affirmer que l'équation n'a pas de racines dans l'intervalle

$$x = \frac{1}{B}, \qquad x + \frac{1}{B};$$

c'est le premier résultat obtenu par Laguerre et que nous avons mentionné plus haut.

Il résulte clairement de ce qui précède qu'on ne peut pas espérer, sans l'introduction de nouvelles données, perfectionner la méthode de Laguerre. Il est clair que l'on pourrait la généraliser en se donnant les valeurs numériques de $f'''(x)$, $f^{\text{IV}}(x)$, ... On obtiendrait ainsi des limites, en général plus étendues, comprenant x et ne renfermant pas de racines de l'équation. Mais les calculs

---

(¹) En d'autres termes, on obtiendrait l'équation (7) en éliminant β entre les équations

$$\alpha - (n-1)\beta = A,$$
$$\alpha^2 + (n-1)\beta^2 = B^2.$$

(²) On peut rapprocher ce résultat de celui que j'ai obtenu au sujet du théorème de Descartes (*Bulletin*, décembre 1896).

(³) On voit aisément que les valeurs absolues des racines de l'équation (7) sont des fonctions croissantes de n.

auxquels on est ainsi conduit sont assez pénibles et paraissent exiger la résolution d'équations dont le degré dépasse *deux*. A moins de résoudre ces équations elles-mêmes par approximation, ce qui paraît être une voie bien détournée, ces généralisations ne semblent guère pratiques. Sans rechercher si elles n'ont pas d'intérêt théorique, nous pouvons conclure que la méthode d'approximation de Laguerre est la méthode générale la plus parfaite [1] pour les équations dont toutes les racines sont réelles.

Les exemples numériques donnés par Laguerre montrent, en effet, qu'une seule application de sa méthode fournit souvent une très grande approximation; d'autre part, cette méthode est simple et d'une perfection théorique absolue. Aussi paraît-elle mériter à tous égards d'être mieux connue.

C'est dans l'espoir de contribuer à sa diffusion que j'ai écrit cette petite Note. Elle ne saurait d'ailleurs, est-il besoin de le dire, remplacer le Mémoire de Laguerre ni le Commentaire de M. Hermite qui, remplis d'aperçus originaux et profonds, seront toujours consultés avec le plus grand fruit par les chercheurs.

---

[1] Il est clair que, pour telle équation particulièrement choisie, une autre méthode pourra être préférable au point de vue du calcul numérique.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GAMBORG (V. J.). — Logarithmetabel indeholdende Logarithmer og Antilogarithmer. Logarithmerne Til de Trigonometriske Funktioner. Un vol. in-8°. Copenhague, Hegel et Son, 1897.

Les Tables de logarithmes et d'antilogarithmes vont de 1 à 10000 et comportent cinq décimales : elles sont à double entrée; les lignes (au nombre de 50 par page) et les colonnes sont groupées par 1, 3, 2, 3, 1. Par exemple, pour ce qui est des colonnes, après la colonne qui correspond au chiffre 0 il y a un blanc, puis viennent les trois colonnes qui correspondent aux chiffres 1, 2, 3, puis un blanc, puis deux colonnes répondant aux chiffres 4 et 5, etc. De même pour les lignes. C'est une disposition qui semble extrêmement commode pour les recherches. Les différences ne sont écrites que pour le nombre qui termine une ligne et celui qui commence la suivante. Cela est parfaitement suffisant : il y a d'ailleurs des Tables de parties proportionnelles. Je crois inutile de m'étendre sur les services que peut rendre une Table d'antilogarithmes un peu étendue. Deux doubles pages à la fin du Volume contiennent une Table de logarithmes et d'antilogarithmes à quatre décimales, allant de 1 à 1000. Ces Tables, que l'on n'a pas à feuilleter, sont extrêmement précieuses pour les calculs pratiques qui ne demandent qu'un petit nombre de figures. Les Tables trigonométriques vont de minute en minute. Un degré est entièrement contenu dans une page.

L'impression est claire et bien soignée. J. T.

LOVE (A.). — Theoretical Mecanics an introductory Treatise on the principles of Dynamics with applications and numerous examples. Un vol. in-8°, xv-379 p. Cambridge, University Press, 1897.

S'il importe assurément, pour la bonne constitution d'une Science qui prétend au titre de rationnelle, que les postulats en

soient réduits au moindre nombre possible, il importe encore plus que ces postulats soient clairs. C'est de cette clarté, comme de la netteté et de la précision des définitions, que M. Love semble s'être particulièrement occupé dans le *Traité élémentaire* que nous signalons; aussi la lecture de son Livre est-elle intéressante et profitable.

Tout d'abord les choses sont bien distinguées; ce que l'on pourrait appeler l'introduction géométrique de la Mécanique, la théorie de l'équivalence des systèmes de vecteurs, est traité à part, indépendamment de la Cinématique ou de la Statique, à laquelle on l'a si longtemps rattachée. La Cinématique n'introduit pas d'autre notion étrangère à la Géométrie que la notion de temps. L'Auteur adoptera, pour le temps, une définition arbitraire (temps solaire moyen) qu'il rattachera plus tard à celle du temps sidéral, défini par l'angle dont la Terre a tourné. Pour lui, d'ailleurs, le mouvement est essentiellement relatif. La question de savoir si ces mots *mouvement absolu* ont, ou non, un sens est d'ordre métaphysique; elle se lie à la notion d'espace; ceux mêmes qui ne sont pas certains qu'il faut la résoudre nettement par la négative, comme fait M. Love, reconnaîtront volontiers qu'elle comporte beaucoup d'obscurités et de difficultés, tandis que la notion d'un mouvement relatif à un repère matériel est très claire.

M. Love évite les difficultés que comporte le *point matériel* considéré comme un point à la fois mathématique et physique, en considérant une particule (particle) de dimensions très petites, mais finies, dont il définit l'accélération moyenne. Cette accélération, considérée comme un vecteur dont l'origine est au centre de gravité de figure (centroïd) de la particule, est l'accélération de cette particule. Il admet que l'accélération d'une particule (par rapport à un certain repère) dépend de la position par rapport à ce même repère d'autres corps matériels : c'est ce qu'on entend quand on dit que ces derniers, agissant sur la particule, produisent son accélération. Le postulat de l'action et de la réaction, dans le cas où il y a deux particules en présence, permet, en comparant les accélérations, de définir le rapport des masses de deux particules. Si l'on considère trois particules v, v', v'', le rapport des masses de v et de v'', divisé par le rapport des masses de v' et de v'', doit être égal au rapport des masses de v et de v'. Cette pro-

position équivaut à un postulat relatif aux accélérations que peuvent prendre trois particules matérielles, en vertu de leurs actions mutuelles, quand on supprime successivement l'une de ces particules. Ce postulat admis, la masse peut être définie comme un nombre, dès qu'on aura choisi le corps que l'on regardera comme ayant une masse égale à 1. La force exercée sur une particule matérielle par les corps en présence est un vecteur égal au produit du vecteur-accélération par la masse, et ayant son origine au point matériel considéré. Si plusieurs corps, agissant sur une particule matérielle, produisaient, en agissant isolément chacun, une certaine accélération, l'accélération produite par ces corps agissant ensemble sera la somme géométrique des premières accélérations; d'où le principe de la composition des forces.

La force ainsi définie est relative au repère choisi; il faut admettre qu'il existe un système d'axes tel que les postulats précédents soient vérifiés. C'est là un point capital, sur lequel M. Love insiste fortement à plusieurs reprises. C'est un tel système d'axes que M. Painlevé désigne sous le nom d'*axes absolus* dans l'exposé vraiment lumineux et philosophique qu'il a mis en tête de ses *Leçons sur l'Intégration des équations différentielles de la Mécanique*. Il y a toutefois, entre l'exposition que nous analysons et celle de M. Painlevé, une différence assez importante. Pour ce dernier, la notion de masse est une notion expérimentale à peu près du même ordre que les notions de longueur et de temps; elle nous est fournie, si l'on veut, par l'usage de la balance. Le principe de l'action et de la réaction n'aura donc pas pour lui le caractère primordial que lui attribue M. Love et rien n'empêchera d'en faire abstraction dans l'étude de certains mouvements, pourvu qu'on ait affaire à un système de mesures des longueurs et des temps, d'une part, et, d'autre part, à un système d'axes pour lequel s'applique la règle de Newton relative à la composition des accélérations. La force relative à une particule matérielle se définira toujours comme le produit par la masse du vecteur-accélération, et il est bien entendu que le système de mesure des masses devra vérifier la condition suivante : la masse de deux corps réunis est égale à la somme des masses de ces deux corps. A ce point de vue toutefois, le principe de l'action et de la réaction permettra d'expliquer comment on mesure les masses et d'en justifier la notion.

Quoi qu'il en soit, cette même notion est, chez M. Love, l'objet d'une critique très intéressante, que l'on trouvera dans une Note (p. 141), où il traite de la conception de la matière comme continue, conception qu'il adopte, ainsi qu'a fait Kirchhoff, dans sa *Mécanique*, et de l'opposition de cette conception avec la théorie moléculaire. Pour définir la densité en un point, il faut admettre que, lorsqu'on considère des volumes qui entourent le point et s'en rapprochent de plus en plus, la matière contenue dans ces volumes tend de plus en plus à être homogène, et cette supposition, poussée jusqu'au bout, est assurément inconciliable avec l'hypothèse moléculaire. Si l'on ne veut pas rejeter cette dernière, il faut admettre que l'homogénéité ne devient de plus en plus parfaite, dans les corps de plus en plus petits, que dans les limites de nos expériences, qui restent dans des domaines incomparablement grands par rapport aux dimensions hypothétiques des molécules. Que nous puissions parler de la masse de corps très petits, mais de dimensions finies, cela est hors de doute; mais il n'appartient pas à la Mécanique de dire si l'on peut attribuer un sens physique à ces mots : *La masse d'une molécule*.

On voit que M. Love est un esprit très prudent : cette même prudence se retrouve à la fin du Volume, lorsque l'Auteur traite du système d'axes *absolus* ayant pour origine le centre de gravité du système solaire et des directions invariables par rapport aux étoiles fixes. C'est dans ce système d'axes, et pour le monde solaire, que valent les postulats de la Mécanique et l'hypothèse de la gravitation, qui, en dehors du monde solaire, n'est nullement établie, malgré les observations relatives aux étoiles doubles, qu'on escompte un peu trop. Cette assertion très sage repose quelque peu des spéculations sur l'Univers, auxquelles on ne parviendra jamais à habituer ceux qui sont persuadés du caractère essentiellement relatif et borné de nos connaissances.

L'Auteur a désormais ce qu'il lui faut pour écrire les équations de la Mécanique et pour développer les notions qui en résultent : travail, énergie potentielle ou actuelle, systèmes conservatifs ou non conservatifs, *positional* ou *motional* forces, etc... Notons, en passant, le soin qu'il met à donner quelques notions très élémentaires sur les systèmes déformables : il n'entre pas dans la théorie de l'élasticité, mais il avertit tout au moins le lecteur de l'existence de cette théorie, dont on sait qu'il est un maître. Les

théories générales sont ensuite appliquées au mouvement de particules libres ou gênées; plusieurs paragraphes sont consacrés au mouvement des planètes. L'étude du mouvement d'un corps solide n'est faite que dans le cas où le mouvement s'effectue parallèlement à un plan fixe. M. Love traite ensuite des percussions, des petites oscillations, du mouvement d'une chaîne.

Un dernier Chapitre se rapporte au mouvement relatif à la Terre, au pendule de Foucault, à la gravitation. L'Auteur y revient sur la *relativité de la force* et sur le système d'axes pour lequel sont réalisés les postulats de la Mécanique. Un Appendice contient les renseignements indispensables sur les systèmes d'unités.

Un très grand nombre d'exercices, applications immédiates ou véritables problèmes, sont répandus dans le texte ou rassemblés à la fin des Chapitres. Ces exercices, qui ont été donnés pour la plupart aux examens, ajoutent beaucoup de prix au Livre de M. Love.

Ce Livre a été fait pour les commençants; l'Auteur, qui le déclare expressément dans la Préface, pousse le scrupule jusqu'à indiquer dans quel ordre les matières doivent être étudiées et ce qu'il convient de passer à une première lecture. J. T.

VILLIÉ. — Compositions d'Analyse, Cinématique, Mécanique et Astronomie, données depuis 1889 a la Sorbonne pour la Licence ès Sciences (Énoncés et solutions). Troisième Partie. Un vol. in-8°; x-300 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.

Il n'y aura jamais trop de recueils d'exercices. Celui dont M. Villié publie le troisième Volume est essentiellement adapté à la préparation de la Licence ès Sciences mathématiques; il rendra d'incontestables services soit aux candidats, soit à ceux qui sont chargés de diriger leur travail : *chaque Partie de l'Ouvrage offre un ensemble d'exercices dont le choix ne saurait être meilleur, puisque c'est celui même qui a été fait par les examinateurs.* Cela peut être entendu de deux façons : aucun choix ne peut être meilleur pour préparer le succès à l'examen, puisque, sans doute, les questions futures seront du même ordre de diffi-

culte que les questions passées et même leur ressembleront quelque peu, de temps en temps. Aucun choix ne peut être meilleur non plus, parce que les examinateurs sont sans doute les meilleurs possibles, en sorte qu'il est bon pour les étudiants de traiter ces exercices, non seulement pour être reçus à leur examen, mais encore pour apprendre les Mathématiques et, à la vérité, en lisant les énoncés, on ne peut manquer d'être frappé de leur intérêt, de leur variété, de l'élévation qu'ils manifestent dans l'enseignement mathématique, en même temps que de la *mesure* avec laquelle ils ont été choisis. Je ne sais de quelle façon M. Villié a entendu la phrase que je viens de citer, mais il ne faut pas en regretter le double sens puisque, aussi bien, les deux sens en sont vrais. Quant aux solutions, il y aurait assurément quelque mauvais goût à en complimenter l'Auteur, dont le but évident a été de faire un livre utile.

Les sujets ont été, comme dans les précédents Volumes, classés par ordre de matières. Voici les titres des Chapitres; les numéros qui les suivent indiquent le nombre de problèmes traités dans chaque Chapitre :

Analyse. — Quadratures (10). — Équations différentielles (11). — Équations aux dérivées partielles (9). — Trajectoires orthogonales (3). — Rayons de courbure et lignes de courbure (5). — Lignes asymptotiques et lignes géodésiques (7). — Questions diverses (6). — Variables imaginaires (14).

Cinématique. — Mouvement plan (16). — Mouvement d'un système invariable autour d'un point fixe (2). — Mouvement général d'un système invariable (11).

Mécanique. — Mouvement d'un point (9). — Mouvement d'un corps solide (13). — Dynamique des systèmes (9).

Astronomie. — Vingt-six applications numériques; cette Partie a été rédigée par M. l'abbé Stoffaës, professeur d'Astronomie à la Faculté libre des Sciences de Lille. J. T.

CAYLEY (A.). — THE COLLECTED MATHEMATICAL PAPERS. Vol. XIII. In-4°; XVI-560 p. Cambridge; at the University Press, 1897.

Ce Volume est le dernier de la publication magistrale destinée à conserver, à présenter, dans son ensemble et dans sa suite logique, l'œuvre si considérable de l'illustre Cayley. Comme les précédents, il se recommande par les soins et l'exactitude que M. Forsyth a mis à reproduire les différents travaux; comme les précédents encore, il contient, rangés dans leur ordre chronologique, des Mémoires plus ou moins étendus se rapportant aux sujets les plus divers : Géométrie analytique, Calcul intégral, Hydrodynamique, Algèbre supérieure, Fonctions elliptiques, Géométrie infinitésimale, Théorie de la représentation conforme, Théorie des substitutions et des groupes, Théorie des déterminants, Théorie des nombres, Astronomie, Trigonométrie, Cinématique. Cayley a touché à tous les sujets et partout il a semé des idées ingénieuses et fécondes, provoqué des recherches ou obtenu des résultats qui resteront. La publication de ses 967 Mémoires fait, à coup sûr, le plus grand honneur aux géomètres anglais qui l'ont conduite avec tant de zèle et de rapidité; elle constitue, en même temps qu'un hommage légitime rendu à un grand géomètre, leur compatriote, un service éclatant rendu à une science qui est partout cultivée.

G. D.

PICARD et SIMART. — THÉORIE DES FONCTIONS ALGÉBRIQUES DE DEUX VARIABLES INDÉPENDANTES. T. I, IV-244 p. in-8°. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

La théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, à laquelle M. Nœther et, ensuite, M. Picard avaient consacré d'importants Mémoires, a donné lieu, dans ces dernières années et surtout en Italie, à de nombreux et intéressants Travaux.

Le grand nombre de résultats acquis pourrait, à première vue, faire croire que l'on se trouve en présence d'une théorie nettement établie et demandant seulement à être développée. Malheu-

reusement, il n'en est point ainsi et cela tient à ce que les fonctions algébriques de deux variables peuvent s'étudier en se plaçant à des points de vue très différents. Comme cela avait déjà eu lieu pour une seule variable on est conduit à des questions de Géométrie ordinaire, de Géométrie de situation, d'Algèbre et enfin de Calcul intégral, quand on cherche à étudier les intégrales simples ou multiples susceptibles de généraliser les propriétés des intégrales abéliennes. Il suit de là que les résultats auxquels on est arrivé semblent bien difficiles à coordonner de façon à constituer une véritable théorie, même incomplète, des fonctions algébriques de deux variables.

D'après ce que l'on en peut juger par le Tome I, le Livre dans lequel MM. Picard et Simart se proposent comme seul but « de donner une idée de l'état actuel de la Science sur une question qui mérite de tenter l'effort de nombreux chercheurs » peut être considéré comme une tentative heureuse de constitution d'une telle théorie.

Sans doute, elle n'a pas encore la netteté de certaines théories classiques et présente quelques lacunes, mais après une lecture attentive, nécessitée par la nature délicate des questions traitées, on arrive néanmoins à y trouver une réelle unité.

Les auteurs sont arrivés à ce résultat en se plaçant systématiquement, autant que cela leur a été possible, au point de vue transcendant qui avait déjà été adopté presque exclusivement par M. Picard dans ses recherches antérieures. Ce sont alors, soit des intégrales multiples, soit des intégrales de différentielles totales qui servent de trait d'union à bien des problèmes qui auparavant semblaient n'avoir rien de commun entre eux.

Ces intégrales méritent d'ailleurs d'être étudiées pour elles-mêmes puisqu'elles constituent, dans différentes directions, des généralisations des intégrales abéliennes, et il arrive parfois qu'elles permettent d'établir d'une façon presque intuitive des propriétés importantes qui avaient exigé des démonstrations très pénibles quand on s'était placé exclusivement au point de vue algébrique.

Dans la théorie des intégrales abéliennes, traitée à la façon de Riemann, les questions de Géométrie dans l'espace à trois dimensions jouent un rôle capital. En suivant les mêmes idées, on est conduit, dans le cas de deux variables, à étudier des questions ana-

logues mais dans des *hyperespaces* à cinq dimensions. Il n'y a plus ici les simplifications qui existaient dans le cas d'une variable et qui provenaient de ce que l'on était dans l'espace ordinaire; il faut alors raisonner d'une façon générale, c'est-à-dire faire de la Géométrie de situation dans l'espace à n dimensions.

C'est à cette étude que les auteurs ont consacré les deux premiers Chapitres de leur Livre.

Dans le premier : *Des intégrales multiples de fonctions de plusieurs variables,* ils se sont proposé de définir d'une façon précise ce que l'on doit entendre par *intégrale multiple d'ordre m dans l'espace à n dimensions* ($m \leqq n$) en s'attachant surtout à l'étude des *équations d'intégrabilité* qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elles ne dépendent que des limites. Le cas de $m = 1$ et ensuite, en donnant quelques notions indispensables sur les variétés à $n - 1$ dimensions, celui de $m = n - 1$ sont étudiés en détail.

Les cas intermédiaires, étudiés pour la première fois par M. Poincaré, sont ensuite traités rapidement en se bornant, pour plus de simplicité, aux intégrales doubles et triples.

Le Chapitre suivant est consacré uniquement à la Géométrie de situation. Une variété S_{n-m} à $n - m$ dimensions dans l'espace à n dimensions $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut se définir de deux façons, soit par l'ensemble de m relations distinctes et d'un certain nombre d'inégalités, soit, au moins dans le voisinage d'un point, par les expressions des x au moyen de $n - m$ paramètres qui peuvent d'ailleurs être assujettis à vérifier des inégalités, cette dernière définition conduisant tout naturellement à la notion de prolongement analytique d'un espace S_{n-m}.

Dans les deux cas, ce sont les inégalités qui donnent naissance aux *frontières;* si une variété *finie* n'a pas de frontière elle est dite *fermée*.

Dans l'étude des fonctions algébriques, il y a toute une catégorie de variétés qu'il est nécessaire d'exclure : ce sont ces variétés que M. Poincaré appelle *unilatères* et dont l'exemple classique est donné par un rectangle replié de façon à faire coïncider en sens inverses deux des bords opposés. MM. Picard et Simart les appellent *variétés doubles,* en donnent de nouvelles définitions et montrent que toute variété définie par des équations et inégalités est toujours simple.

Après avoir défini ce qu'il faut entendre par *variété d'ordre $n-m$ formant frontière sur une variété d'ordre n*, par *variété opposée à une variété donnée* et par *variété voisine d'une autre variété*, ils sont en mesure de donner la définition précise des *nombres de Betti* qui expriment les différents ordres de connexion d'une variété donnée, par rapport aux variétés d'ordre moindre qui y sont contenues et de la justifier en prouvant que chacun d'eux est indépendant du choix particulier de variétés qui a servi à le définir. Ces nombres de Betti ont une signification remarquable pour les intégrales multiples étendues à des variétés contenues dans la variété donnée :

p_m étant le nombre de Betti relatif à l'ordre m pour une variété E_n, l'entier $p_m - 1$ est le nombre des périodes distinctes d'une intégrale multiple d'ordre m étendue à une variété fermée contenue dans E_n.

Cette propriété conduit à envisager l'étude des connexions sous un nouveau point de vue et permet, comme le montrent les auteurs sur des exemples, d'arriver à la détermination rigoureuse des nombres de Betti dans des cas où l'étude directe serait impraticable.

Pour terminer ce Chapitre, MM. Picard et Simart s'occupent d'une question qui présente un grand intérêt, puisqu'elle correspond à une réduction du nombre des nombres invariants qu'il faut introduire dans la théorie qui nous occupe; ils démontrent d'une façon rigoureuse que *le premier et le dernier nombre de Betti relatifs à une même multiplicité fermée sont égaux*, ce qui n'est qu'un cas particulier, mais qui suffit pour la suite, d'un théorème plus général démontré par M. Poincaré et consistant dans *l'égalité des nombres de Betti équidistants des extrêmes.*

Le Chapitre III est consacré à l'extension du théorème de Cauchy aux intégrales doubles de fonctions de deux variables complexes, qui est due à M. Poincaré, et à l'étude des résidus des intégrales doubles de fonctions rationnelles.

On y trouve la démonstration de ce théorème :

Tout résidu de l'intégrale double

$$\int\int \frac{P(x, y)\, dx\, dy}{\ldots}$$

où P *et* A *sont des polynomes, peut être regardé comme une période cyclique ou logarithmique d'une intégrale abélienne.*

En dernier lieu, il est dit quelques mots des intégrales de différentielles totales de fonctions rationnelles et de leurs résidus.

Le Chapitre IV est constitué entièrement par la *réduction des singularités d'une surface algébrique* et l'étude des *invariants fournis par la Géométrie de situation.*

Par une application répétée d'une transformation plane

$$X = x, \qquad Y = \frac{dv}{dx}$$

étudiée par M. Vessiot, et en se servant de la notion généralisée de perspective, MM. Picard et Simart arrivent à démontrer rapidement ce théorème fondamental (¹) :

A toute surface algébrique on peut faire correspondre birationnellement, dans l'espace à cinq dimensions, une surface n'ayant aucune singularité.

Et le même procédé leur montre qu'*à toute surface algébrique on peut faire correspondre birationnellement une autre surface algébrique n'ayant, comme singularités, qu'une courbe double avec des points triples,* propriété qui leur permettra ultérieurement de limiter certaines discussions relatives à des intégrales.

Une surface algébrique correspondant à une variété fermée *à quatre dimensions réelles* possède donc trois nombres de Betti

$$p_1, \quad p_2, \quad p_3.$$

Mais comme $p_3 = p_1$ on a seulement à introduire les deux nombres

$$p_1 \quad \text{et} \quad p_2$$

(¹) Je viens d'apprendre, par M. Picard, qu'il se propose de revenir dans le Tome II sur la réduction des singularités, car la méthode suivie demande quelques modifications dans le cas où la surface aurait des points singuliers isolés d'un caractère spécial; les conclusions formulées ne sont en rien modifiées. M. Beppo Lévi vient d'ailleurs de consacrer tout récemment à ces questions un Mémoire que nous signale M. Picard (*Atti de l'Académie de Turin*).

qui correspondent à la *connexion linéaire* et à la *connexion à deux dimensions.*

En le démontrant sur un exemple particulier et raisonnant ensuite par continuité, on arrive alors à ce résultat : *Pour toute surface sans singularités on a* $p_1 = 1$.

La recherche de p_1, pour une surface donnée $f(x, y, z) = 0$, est liée étroitement à l'étude de la transformation des cycles de la surface de Riemann

$$f(x, \bar{y}, z) = 0,$$

où y est considéré comme un paramètre variable, et cette étude se ramène à celle du groupe de substitutions d'une équation linéaire E à laquelle satisfont les périodes d'une intégrale de seconde espèce relative à cette surface de Riemann. A toute substitution de l'équation E correspond une relation linéaire et homogène entre les périodes d'une intégrale de différentielle totale, de sorte que, si elles permettent d'exprimer toutes les périodes au moyen de r d'entre elles, on aura certainement

$$p_1 - 1 \leq r$$

et les auteurs établissent que l'on a $p_1 - 1 = r$ en montrant que l'on peut construire une intégrale de différentielle totale ayant r périodes données à l'avance, aucune ne provenant d'une courbe logarithmique.

Cette équation E a encore un rôle important dans l'étude du nombre p_2. A ce qu'on peut appeler les cycles de cette équation différentielle correspond, sur la surface algébrique, un cycle à deux dimensions. MM. Picard et Simart n'approfondissent pas cette question, se réservant de le faire ultérieurement, et se contentent de montrer qu'en général on a

$$p_2 > 3,$$

ce qui les conduit à cette conclusion, étrange au premier abord : *La présence des singularités dans une surface tend à diminuer le nombre des cycles à deux dimensions tandis qu'elle peut faire naître des cycles linéaires.*

Le Chapitre V est consacré aux *intégrales de différentielles*

totales de première espèce. Leur définition est la même que pour les intégrales abéliennes : ce sont celles qui restent finies en tous les points de la surface dans l'espace à cinq dimensions. Les auteurs arrivent à montrer qu'elles doivent être de la forme

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f_z}$$

avec la condition d'avoir l'identité

$$A\frac{\partial f}{\partial x} + B\frac{\partial f}{\partial y} + C\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right)f$$

dans laquelle A, B, C sont des polynomes de degré $m - 2$ en x, y, z et $m - 3$ en x et z pour A, y et z pour B, x et y pour C.

L'intégrale peut alors se mettre indifféremment sous l'une des trois formes

$$\int \frac{B\,dx - A\,dy}{f_z}, \quad \int \frac{A\,dz - C\,dx}{f_y}, \quad \int \frac{C\,dy - B\,dz}{f_x}.$$

La condition pour qu'il existe des intégrales de première espèce peut se mettre sous une forme plus élégante : *Il faut que l'on puisse trouver quatre polynomes d'ordre $m - 3$ vérifiant les deux identités*

$$\theta_1\frac{\partial f}{\partial x} + \theta_2\frac{\partial f}{\partial y} + \theta_3\frac{\partial f}{\partial z} + \theta_4\frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \frac{\partial\theta_3}{\partial z} + \frac{\partial\theta_4}{\partial t} = 0.$$

Par une discussion relative aux points singuliers on arrive ensuite à montrer que les conditions nécessaires qui ont été trouvées sont suffisantes pour que l'intégrale soit bien de première espèce. MM. Picard et Simart, comme application, donnent alors des exemples de surfaces admettant de telles intégrales en s'attachant spécialement à l'étude des surfaces du quatrième degré et étendant les résultats obtenus à une classe de surfaces du cinquième degré. A signaler, dans ce paragraphe, une intéressante remarque relative aux surfaces sur lesquelles existe une famille de courbes unicursales.

Le Chapitre VI a pour objet l'étude des *intégrales de différentielles totales de deuxième et troisième espèce*.

MM. Picard et Simart donnent plusieurs définitions équivalentes

des intégrales de deuxième espèce et déterminent rigoureusement le nombre de celles qui sont distinctes. *Ce nombre est* $p_1 - 1$. Cherchant ensuite, par une discussion assez longue, à déterminer la forme de ces intégrales, ils sont ramenés à *voir si un système d'équations linéaires ordinaires à coefficients rationnels admet des intégrales rationnelles.* Le nombre de ces intégrales linéairement indépendantes étant alors $p_1 - 1$, on peut considérer le problème de la recherche pratique de p_1 comme complètement résolu.

Les intégrales de troisième espèce sont celles qui admettent des courbes logarithmiques; au moyen de la propriété analogue des intégrales abéliennes, on trouve immédiatement une relation linéaire et homogène entre leurs périodes logarithmiques; quant à leur forme, la discussion n'est faite que dans le cas des surfaces

$$z^2 = f(x, y).$$

Dans le Chapitre VII, nous abordons l'étude des *intégrales doubles de première espèce.* Leur définition est immédiate et l'on trouve rapidement qu'elles doivent être de la forme

$$\int\int \frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

$Q(x, y, z) = 0$ étant une surface de degré $m - 4$ passant par la courbe double qu'on peut toujours supposer être la seule singularité de la surface.

Si la surface f possède des singularités quelconques, il faut encore que Q soit de degré $m - 4$, mais avec des conditions complémentaires. Ces surfaces $Q = 0$, qui peuvent servir à former des intégrales doubles de première espèce, sont les *surfaces adjointes* d'ordre $m - 4$ et le système linéaire qu'elles forment est le *système canonique.* Ce sont ces adjointes qui conduisent à introduire dans la théorie de nouveaux nombres invariants pour des transformations birationnelles.

Le genre géométrique p_g est le nombre de paramètres dont dépend le polynome Q. Par exemple, pour une surface d'ordre m sans singularités, on a

$$p_g = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{6};$$

pour une surface possédant une famille de courbes unicursales et, en particulier, pour les surfaces réglées, on a

$$p_g = 0.$$

La notion de *second genre* $p^{(1)}$ résulte de considérations relatives aux systèmes linéaires de courbes tracées sur une surface. La surface adjointe $Q = 0$, qui dépend de paramètres, rencontre la surface f suivant une courbe mobile l qui, en général, est irréductible; $p^{(1)}$ est le genre de cette courbe.

Un troisième invariant est le nombre $p^{(2)}$ des points de rencontre mobiles de deux courbes l.

Ces invariants permettent de généraliser une propriété bien connue de la théorie des courbes algébriques de la façon suivante :

Toute surface f peut être transformée birationnellement en une surface de degré

$$M = p^{(2)} - p_g + 4.$$

L'étude de ces invariants est reprise en détail dans le Chapitre VIII qui termine le Tome I. Dans ce but, MM. Picard et Simart sont obligés de traiter diverses questions relatives aux courbes gauches algébriques et à leurs *surfaces adjointes*.

Ils peuvent alors démontrer la relation de M. Nœther

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1,$$

et déterminer les cas où elle doit être remplacée par l'inégalité

$$p^{(2)} \leq p^{(1)} - 1.$$

Passant ensuite à l'étude de p_g, ils montrent qu'étant donnée une surface ayant des singularités bien déterminées, on peut trouver une formule donnant p_g, sauf dans certains cas spéciaux l'où on peut même être conduit à une valeur négative, ce qui est inadmissible pour le genre géométrique.

Si certaines conditions, qu'il serait trop long d'énoncer, sont satisfaites, on peut trouver une formule donnant rigoureusement p_g. Le nombre donné par cette formule *dans tous les cas* sera le *genre numérique* p_n. Ainsi, dans le cas qu'on peut appeler *général*, on aura

$$p_g = p_n,$$

sinon on aura

$$p_2 = p_4;$$

l'intérêt de p_n résulte de ce que ce nombre est aussi un invariant. Actuellement, MM. Picard et Simart se bornent à le démontrer pour le cas de deux surfaces se correspondant birationnellement et n'ayant d'autres singularités que des courbes doubles avec points triples.

Pour terminer, et en se plaçant dans le cas général où l'on a $p^{(2)} = p^{(1)} = 1$, ils donnent la formule qui doit fournir $p^{(1)}$ et celle-ci continue à donner un nombre positif ou négatif, même quand $p^{(1)}$ n'a plus de signification. Ce nouveau nombre sera le *second genre numérique*.

En se plaçant à un tout autre point de vue qu'au début, on peut dire que le Tome I du Livre de MM. Picard et Simart est consacré à mettre nettement en évidence les différences profondes qui séparent le cas d'une seule variable et le cas de deux variables, différences qui se présentent soit à propos de la Géométrie de situation, soit dans l'étude des intégrales de différentielles totales, soit enfin dans l'introduction de ces nombreux invariants dont aucun ne peut être considéré comme véritablement analogue au genre d'une courbe. E. D.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KLEIN (F.) und SOMMERFELD (A.). — Ueber die Theorie des Kreisels. Heft I : *Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie*. 196 p. in-8°; Leipzig, Teubner, 1897.

KLEIN (F.). — The mathematical theory of the Top. Lectures delivered on the occasion of the sesquicentenial celebration of Princeton University. 1 vol. in-8°; New-York, Schiener's sons; 1897.

Les *Lectures* de M. Klein résument les matières contenues dans la *Theorie des Kreisels;* c'est de ce dernier Livre que nous nous occuperons. Il est sorti d'un cours professé par M. Klein pendant le semestre d'hiver 1895-1896; les développements qu'il contient sont, pour une grande partie, l'œuvre de M. Sommerfeld. Le titre même, *Sur la théorie de la toupie,* semble choisi pour indiquer le désir qu'ont les auteurs de traiter un problème concret d'une façon aussi concrète que possible; à la vérité, c'est d'un corps solide pesant, ayant un point fixe, qu'il s'agit, non du jouet ordinaire, dont la pointe peut se mouvoir sur un plan horizontal et dont le mouvement dépend des fonctions hyperelliptiques; mais le mot *toupie,* qui reste juste, puisque, aussi bien, on fabrique des toupies dont la pointe est fixe, fait mieux image. Au reste tout le monde sait bien que, avec M. Klein ou ses disciples, la Science, en essayant de se faire concrète et imagée, ne risque pas de s'abaisser; M. Klein veut seulement la rendre plus intuitive; il faut l'en remercier et, sans doute, l'intuition est la faculté maîtresse du mathématicien, du géomètre comme de l'analyste : l'un regarde des formes géométriques, l'autre des formes analytiques, et M. Klein est de ceux qui pénètrent l'identité des unes et des autres.

Le plan de l'Ouvrage est très intéressant et l'Ouvrage lui-même très instructif. L'exposition n'est nullement bornée au problème spécial qui donne son nom au Livre, et qui tient peu de place dans ce premier cahier : toutes les questions sont reprises à leur début, et d'une façon assez complète pour que le lecteur puisse acquérir, non pas assurément la connaissance de la Mécanique analytique, mais au moins des idées nettes sur les principes de la Mécanique et soit ainsi en mesure de traiter un grand nombre de problèmes.

Les auteurs ont une tendance manifeste à réagir contre la place excessive que, d'après eux, la Mécanique analytique prend dans l'enseignement : ils ne veulent faire que des raisonnements où le sens géométrique ou mécanique des éléments que l'on introduit ne se perde jamais dans les transformations analytiques. Des maîtres éminents ont souvent développé, en France, des idées analogues, familières aussi aux auteurs anglais; mais tous les lecteurs de MM. Klein et Sommerfeld trouveront dans leur Livre un modèle d'élégance et de clarté.

On y rencontrera d'abord les principes de la cinématique du corps solide dont un point est fixe, la théorie géométrique de l'axe instantané de rotation et des cônes roulants, à propos de laquelle les auteurs ont signalé un procédé bien ingénieux, dû à Maxwell, pour rendre sensible le mouvement de l'axe instantané dans le corps solide, au moyen d'un disque, lié à ce corps, et portant des secteurs colorés. Ils développent ensuite la théorie des substitutions orthogonales et montrent le rôle des angles d'Euler, des paramètres d'Euler et d'Olinde Rodrigues, enfin des paramètres de la substitution linéaire que l'on peut faire correspondre, par l'emploi des coordonnées de Riemann, à toute substitution orthogonale; le cas de la précession régulière est traité d'une façon détaillée et même avec une application numérique. En introduisant les paramètres d'O. Rodrigues, on est trop près de la théorie des quaternions pour que les auteurs se soient refusé le plaisir d'en donner une exposition géométrique, aussi élégante qu'élémentaire.

Nous passons ensuite à la *Cinétique* (statique et théorie de l'impulsion). C'est, tout d'abord, une exposition rapide de la dynamique du point matériel. Les auteurs regardent comme données les notions de force et de masse; ils acceptent franchement l'origine psychologique de la force (tension musculaire), qui suffit au moins pour s'orienter dans les problèmes qu'ils ont en vue, et ne soulèvent pas ici la grosse question de la relativité du mouvement et de la force. Les forces se distinguent en *forces continues* et en *forces instantanées* (percussions). Toutes deux se comportent comme des vecteurs; une force continue est égale à l'accélération qu'elle produit, multipliée par la masse; une force instantanée est égale à la variation (géométrique) de la vitesse qu'elle produit, multipliée par la masse. A la vérité, le mot *produit* n'a pas ici

une signification bien essentielle et l'on pourrait soutenir que la prétendue *cause* n'est qu'un mot qui résume l'effet. Quoi qu'il en soit, les deux sortes de forces se ramènent l'une à l'autre par des passages à la limite, et l'on peut remplacer les forces instantanées par des forces continues très grandes et agissant pendant un temps très court, ou les forces continues par des forces instantanées se succédant très rapidement. L'*impulsion* (quantité de mouvement) d'un point matériel est la même chose que la force instantanée qui le ferait passer du repos à son état de vitesse actuel. Les auteurs développent les notions de travail, de force vive, les équations du mouvement d'un point et parviennent aux équations de Lagrange, de façon à bien mettre en lumière la signification géométrique des différents termes. La statique du corps solide, les notions de couple résultant et de résultante, celle de *vis de force* sont développées tant au point de vue de Poinsot qu'au point de vue de Lagrange. L'impulsion d'un corps solide libre est définie comme le système de forces instantanées qui le feraient passer de l'état de repos à son état actuel de vitesse; elle se ramène à une vis de percussion dans le cas général, à un couple de percussion dans le cas d'un système solide ayant un point fixe. Les auteurs montrent comment on détermine l'axe de ce couple et la force vive du système. Le problème analogue est même traité pour le corps solide libre. Après avoir examiné le cas de la *toupie symétrique,* c'est-à-dire d'un corps solide ayant deux moments d'inertie égaux, lorsqu'il n'y a pas de forces extérieures, ils développent les propriétés essentielles des *mouvements à la Poinsot.* Un intéressant paragraphe est consacré à la stabilité de l'axe de rotation.

La considération des dérivées géométriques de l'axe du couple des quantités de mouvement, tant dans l'espace fixe que dans le corps solide, conduit aux équations d'Euler. Les auteurs montrent, dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, comment s'intègrent les six équations du mouvement, comprenant les trois équations d'Euler et les trois équations cinématiques qui expriment p, q, r au moyen des angles d'Euler et de leurs dérivées; ils étudient, d'autre part, les équations de Lagrange relatives aux angles d'Euler; cette étude met en évidence le caractère spécial des équations d'Euler, où n'intervient nullement la position du

corps solide dans l'espace, caractère qui est la raison même de la simplification apportée dans l'intégration, et qui disparaît d'ailleurs dans le cas où il y a des forces extérieures. Lorsqu'il n'y a point de telles forces, les composantes p, q, r de la rotation jouent le rôle d'invariants dans le groupe triplement infini des transformations qui correspondent aux rotations autour du point fixe, et ce sont les théories que l'on doit à M. Lie qui permettent de caractériser les problèmes particuliers de Mécanique dont les équations comportent une décomposition analogue.

Le cas où le mouvement du corps solide est gêné, de telle façon, par exemple, qu'une de ses droites soit obligée de décrire un cône prescrit, donne aux auteurs l'occasion d'exposer le principe de d'Alembert et d'en bien préciser la signification. Dans le problème particulier qui les occupe, ils décomposent la résistance totale en *résistance d'accélération* et *résistance de déviation*. Cette dernière est étudiée en détail pour le mouvement de précession régulière du corps solide de révolution, et cette étude les amène, en se plaçant à un autre point de vue, à introduire le théorème de Coriolis, qui, à son tour, est l'occasion d'une courte digression sur le mouvement à la surface de la Terre. Enfin, le Volume se termine par la description et l'explication de quelques expériences qui montrent la réalité de la résistance de déviation.

Nous ne pouvons que signaler les nombreuses indications bibliographiques et le vif intérêt de plusieurs renseignements historiques répandus çà et là dans le Livre de MM. Klein et Sommerfeld.

J. T.

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRATION D'UNE CLASSE D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU QUATRIÈME ORDRE;

PAR M. LE DR. ANTONINO VACCARO.

INTRODUCTION.

M. Picard, dans son classique *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (¹), traite d'une équation du deuxième ordre aux dérivées partielles de la forme

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

où A, B, C désignent des fonctions des variables indépendantes x, y, et étudie les cas dans lesquels, indépendamment de la nature des fonctions A, B, C, l'équation peut se réduire à l'un des deux types

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

$$(B) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right).$$

Il s'occupe successivement de l'intégration de ces deux équations, en supposant, dans le cas du type (A), données les valeurs de u sur le contour d'une certaine aire finie; dans le cas du type (B), quelques éléments qu'il n'importe pas ici de rappeler.

La méthode que M. Picard emploie dans cette intégration est celle déjà célèbre des approximations successives, méthode que je me promets d'étendre, dans ces pages, aux équations de la

(¹) *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VI; 1890.

forme

$$(1)\quad \Delta\Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}, \frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}, x, y\right),$$

où l'on pose, pour abréger,

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}.$$

La méthode de M. Picard suppose résolu le problème de l'intégration de l'équation

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

et nous supposerons ici savoir intégrer l'équation

$$(3)\qquad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y).$$

M. Mathieu, dans son *Mémoire sur l'équation aux différences*... [1], a étudié l'équation

$$(3')\qquad \Delta\Delta u_1 = 0$$

à la résolution de laquelle peut toujours se réduire celle de l'équation (3). Il suffira, pour cela, de poser

$$u = u_1 + u_2$$

où

$$u_1 = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{r^2 \log r}{4} f(x, y)\,d\sigma,$$

et d'intégrer l'équation (3′) avec les conditions au contour

$$u_2 = u - u_1, \qquad \frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u_2}{\partial n},$$

tandis que $f(x, y)$ satisfera au théorème de Poisson.

M. Mathieu donc a étudié des cas où la fonction u, intégrale de l'équation (3′) [ou, par ce que nous avons dit, de l'équation (3)], est déterminée.

Le cas qui présente le plus d'intérêt est celui où, au contour s

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. XIV; 1888.

d'une certaine aire plane σ, sont données les valeurs de u et celles de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n}$. Les autres cas que considère M. Mathieu ont peu d'intérêt pour notre but, car, ou ils se réduisent à des intégrations successives d'équations du type (2), ou ne déterminent pas complètement la fonction inconnue u.

Pour ce qui regarde l'intégration de (3') ou de (3), lorsqu'au contour sont données les valeurs de u et celles de $\frac{\partial u}{\partial n}$, M. Mathieu (Mémoire cité) réussit, dans le cas d'un contour circulaire ou elliptique, à représenter la fonction u par des séries. Pour les contours généraux, rien n'a été dit sur l'existence de l'intégrale u de (3), supposés donnés les éléments ordinaires au contour. Mais, comme il a été déjà dit, nous supposerons déjà écartée cette difficulté et nous nous bornerons à faire quelques observations et transformations relatives à la formule qui peut servir à exprimer l'intégrale u.

La méthode de M. Picard peut encore s'étendre à des équations d'ordre pair, de la forme

$$\Delta\Delta\ldots\Delta u = f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial n}, \ldots\right).$$

Pour cela, il faut, avant tout, se servir des résultats du Mémoire de M. Gutzmer [1] et établir les formules relatives à l'intégration de l'équation

$$\Delta\Delta\ldots\Delta u = f(x, y)$$

et fixer par quels éléments au contour s ces intégrales sont complètement déterminées.

Formules fondamentales.

1. Mathieu, dans son Mémoire déjà cité, établit une formule de réciprocité, analogue à celle de Green, entre deux fonctions qui sont régulières, ainsi que leurs dérivées premières, deuxièmes, troisièmes et quatrièmes dans un certain champ à trois dimen-

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 3e série, t. VI; 1890.

sions. On peut pareillement établir une formule analogue dans le cas d'un champ plan.

Si nous désignons par u, u' deux fonctions régulières dans un champ plan σ, à deux dimensions, dont nous désignons le contour par s et n, la direction de la normale comptée vers l'intérieur, la formule analogue à celle de Mathieu, et qui a été donnée aussi par M. Gutzmer (¹), peut s'écrire

$$(1)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\sigma (u\Delta\Delta u' - u'\Delta\Delta u)\,d\sigma \\ \displaystyle = \int_s \left(u'\frac{\partial\Delta u}{\partial n} - u\frac{\partial\Delta u'}{\partial n} + \Delta u'\frac{\partial u}{\partial n} - \Delta u\frac{\partial u'}{\partial n}\right) ds. \end{cases}$$

Or, si l'on prend pour u une intégrale régulière de l'équation indéfinie

$$(2)\qquad \Delta\Delta u = f(x, y),$$

et si l'on pose

$$u' = \frac{1}{4} r^2 \log r,$$

r étant la distance d'un point variable de l'intérieur du corps σ à un point fixe qui y est aussi situé, l'équation (1) nous donnera, en raisonnant comme au § 8 du Mémoire cité de M. Mathieu,

$$(3)\quad \begin{cases} \displaystyle u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma u' f(x, y)\,d\sigma \\ \displaystyle + \frac{1}{2\pi}\int_s \left(u'\frac{\partial\Delta u}{\partial n} - u\frac{\partial\Delta u'}{\partial n} - \Delta u'\frac{\partial u}{\partial n} - \Delta u\frac{\partial u'}{\partial n}\right) ds. \end{cases}$$

M. Mathieu a démontré aux § 12-14, Mémoire cité, que l'intégrale u de l'équation (2) est parfaitement donnée, lorsque au contour s sont données les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial n}$.

Cela posé, nous nous proposons d'éliminer de la formule (3) les termes qui contiennent Δu, $\frac{\partial\Delta u}{\partial n}$. Pour cela nous introduirons une fonction analogue à celle de Green. Cette fonction t doit jouir de la propriété de satisfaire, en tous les points de σ, à l'équa-

(¹) *Journal de Mathématiques*, année 1899, p. 491, formule (12).

tion

$$\Delta \Delta t = 0,$$

en tous les points de s aux équations

$$(4) \qquad t = u', \qquad \frac{\partial t}{\partial n} = \frac{\partial u'}{\partial n};$$

de plus, elle doit être régulière ainsi que ses dérivées de tous les ordres dans σ.

En appliquant à cette fonction et à u, intégrale de l'équation (2), la formule (1), nous aurons

$$0 = \int_\sigma t f(x, y)\, d\sigma + \int_s \left(t \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - u \frac{\partial \Delta t}{\partial n} + \Delta t \frac{\partial u}{\partial n} - \Delta u \frac{\partial t}{\partial n} \right) ds.$$

Divisons par 2π et soustrayons de (3), en ayant égard à (4) et nous obtenons

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{1}{2\pi} \int_\sigma (u' - t) f(x, y)\, d\sigma \\ &\quad + \int_s \left[(u' - t) \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - u \left(\frac{\partial \Delta u'}{\partial n} - \frac{\partial \Delta t}{\partial n} \right) - (\Delta u' - \Delta t) \frac{\partial u}{\partial n} - \Delta u \left(\frac{\partial u'}{\partial n} - \frac{\partial t}{\partial n} \right) \right] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_\sigma (u' - t) f(x, y)\, d\sigma - \int_s \left[\frac{\partial u}{\partial n} (\Delta u' - \Delta t) - u \left(\frac{\partial \Delta u'}{\partial n} - \frac{\partial \Delta t}{\partial n} \right) \right] ds. \end{aligned} \right.$$

Posant

$$u' - t = G,$$

on pourra écrire la précédente formule

$$(3'') \quad u(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma G f(x, y)\, d\sigma + \frac{1}{2\pi} \int_s \left(\frac{\partial u}{\partial n} \Delta G - u \frac{\partial \Delta G}{\partial n} \right) ds.$$

2. Rappelons-nous que la fonction t est régulière en σ ainsi que ses dérivées de tous les ordres. Au contraire, la fonction u' est régulière ainsi que ses dérivées premières, tandis que les dérivées deuxièmes ont en σ un point d'infini ainsi que la fonction $\log r$ et les dérivées troisièmes un point d'infini ainsi que $\frac{1}{r}$.

Si les valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial n}$ dans les points de s, sont nulles,

l'équation (3) nous donne

$$(5)\qquad u = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_\sigma G\, f(x, y)\, d\sigma.$$

La fonction u, donnée par la formule précédente, est fonction du point (x_1, y_1), où les dérivées deuxièmes et troisièmes deviennent infinies.

Si l'on veut les dérivées premières de la fonction u, donnée par (5), on peut dériver sous le signe d'intégration; en effet, les dérivées premières de G, par l'observation qu'on vient de faire, sont toutes régulières en tous les points de σ; donc nous pouvons écrire

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_\sigma \frac{\partial G}{\partial x_1} f(x, y)\, d\sigma, \\ \frac{\partial u}{\partial y_1} &= \frac{1}{2\pi}\cdot\int_\sigma \frac{\partial G}{\partial y_1} f(x, y)\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Pour les dérivées deuxièmes et troisièmes de (5) on peut observer qu'en dérivant sous le signe d'intégration les fonctions

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2},\quad \frac{\partial^2 G}{\partial x_1\,\partial y_1},\quad \frac{\partial^2 G}{\partial y_1^2},\quad \frac{\partial^3 G}{\partial x_1^3},\quad \ldots$$

deviennent infinies au point (x_1, y_1) de σ ainsi que

$$\log r,\quad \frac{1}{r};$$

et alors, pour des théorèmes connus, les intégrales

$$\int_\sigma \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} f(x, y)\, d\sigma,\quad \ldots,\quad \int_\sigma \frac{\partial^3 G}{\partial x_1^3} f(x, y)\, d\sigma,\quad \ldots$$

sont régulières et l'on peut écrire simplement

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_\sigma \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} f(x, y)\, d\sigma. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = \frac{1}{2\pi}\cdot\int_\sigma \frac{\partial^3 G}{\partial x_1^3} f(x, y)\, d\sigma. \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

Observons, puisque G et ses dérivées premières sont régulières

en σ (le contour s compris), que les formules (5) et (6) sont aussi valables, même lorsque les points x_1, y_1 de σ s'approchent indéfiniment des points de s.

3. Indiquons par F le module maximum de la fonction $f(x, y)$, que nous supposerons toujours finie dans le champ σ. On a, d'après (5) :

$$(5') \qquad |u| = \frac{F}{2\pi} \int_\sigma |G| \, d\sigma,$$

et si nous désignons par M le module maximum des maxima des fonctions

$$\frac{1}{2\pi} \int_\sigma |G| \, d\sigma, \quad \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \left| \frac{\partial G}{\partial x_1} \right| d\sigma, \quad \ldots,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_\sigma \left| \frac{\partial^2 G}{\partial x_1^2} \right| d\sigma, \quad \ldots, \quad \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \left| \frac{\partial^3 G}{\partial x_1^3} \right| d\sigma, \quad \ldots,$$

nous aurons d'après (5'), (6), (7) :

$$(5'') \qquad |u| < FM,$$

$$(6'') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \right| < FM, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left| \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right| < FM, \end{array} \right.$$

$$(7'') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left| \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \right| < FM, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Observons que (5'') (6'') valent aussi, même lorsque le point x_1, y_1 de σ s'approche indéfiniment de s.

Il est manifeste que la valeur constante de M dépend de la valeur de σ simplement et non de la fonction $f(x, y)$; de plus, nous pouvons dire que la valeur de cette constante décroît avec le décroissement successif du champ d'intégration.

ÉQUATIONS LINÉAIRES. MÉTHODE DES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES.

4. Considérons l'équation aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta\Delta u = {} & a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + a_3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + a_4 \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \\ & + a_5 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_7 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_8 \frac{\partial u}{\partial x} + a_9 \frac{\partial u}{\partial y} + a_{10} . u. \end{aligned}\right.$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$ fonctions régulières et toujours finies des points d'un certain champ fini σ; soit A le module maximum des maxima de $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$.

Supposons qu'on sache trouver la fonction t du n° 1, relative au champ σ, que nous considérons, et posons

$$\Gamma(u) = a_1 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + \ldots + a_{10} . u.$$

On intègre les équations indéfinies,

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} & \Delta\Delta u_0 = 0. \\ & \Delta\Delta u_1 = \Gamma(u_0). \\ & \Delta\Delta u_2 = \Gamma(u_1). \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \Delta\Delta u_i = \Gamma(u_{i-1}). \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

avec la condition que sur s on ait

$$u_0 = u_s, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s,$$

u_s, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$, étant deux fonctions des points du contour s arbitrairement données; et que pour les fonctions $u_1, u_2, \ldots$, on ait au contraire sur s

$$u_i = \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0.$$

En appliquant la formule (3)″ du n° 1, nous trouvons que u_0 est donnée par la formule

$$(10)\quad u_0 = \frac{1}{2\pi} \int_s \left[\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s \Delta G - u_s \frac{\partial \Delta G}{\partial n} \right] ds$$

u_i, en général, au contraire, par l'autre,

$$(10)\qquad u_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma G\,\Gamma(u_{i-1})\,d\sigma.$$

5. Supposé que les fonctions des points de s

$$u_s,\quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s,$$

plus qu'être intégrables sur s, soient encore toujours finies, nous aurons que la fonction u_0 sera toujours finie, ainsi que ses dérivées de tous ordres quelle que soit la position du point x_1, y_1 de σ.

Cela posé, l'expression $\Gamma(u_0)$ sera toujours finie et ne dépassera pas, en valeur absolue, une limite assignable F'. On aura alors par les $(5)''$, $(6)''$, $(7)''$ du n° 3 et par l'équation $(10)'$ du numéro précédent

$$\left.\begin{array}{c} |u_1| \\ \left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right| \\ \cdots \\ \left|\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right| \\ \cdots \\ \left|\dfrac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}\right| \\ \cdots \end{array}\right\} < F'M,$$

et par suite

$$|\Gamma(u_1)| < 10F'MA.$$

Par les mêmes formules $(5)''$, $(6)''$, $(7)''$, et par la formule (10) et la précédente, on a

$$\left.\begin{array}{c} |u_2| \\ \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right| \\ \cdots \\ \left|\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right| \\ \cdots \\ \left|\dfrac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3}\right| \\ \cdots \end{array}\right\} < 10MAF'M.$$

et par suite

$$|\Gamma(u_2)| < (10\,\mathrm{M}\,\mathrm{A})^2\,\mathrm{F}.$$

De même

$$\left|\begin{array}{l} u_3 \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} \\ \cdots \\ \dfrac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^3} \\ \cdots \end{array}\right| < (10\,\mathrm{M}\,\mathrm{A})^3\,\mathrm{F}'\,\mathrm{M}$$

et

$$|\Gamma(u_3)| < (10\,\mathrm{M}\,\mathrm{A})^3\,\mathrm{F}'.$$

Il est clair qu'on aura, d'une manière générale,

$$\left|u_n,\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1},\ \ldots,\ \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_1^2},\ \ldots,\ \frac{\partial^3 u_n}{\partial x_1^3},\ \ldots\right| < (10\,\mathrm{M}\,\mathrm{A})^{n-1}\,\mathrm{F}'\,\mathrm{M}$$

et

$$|\Gamma(u_n)| < (10\,\mathrm{M}\,\mathrm{A})^n\,\mathrm{F}'.$$

6. Considérons maintenant les séries

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial u_0}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = \dfrac{\partial^3 u_0}{\partial x_1^3} + \dfrac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + \dfrac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} + \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right.$$

Par les inégalités du paragraphe précédent, on a, pour ces séries, T indiquant le module maximum des valeurs maxima absolues

des fonctions

$$u_0, \quad \frac{\partial u_0}{\partial x_1}, \quad \ldots; \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}, \quad \ldots; \quad \frac{\partial^3 u_0}{\partial x_1^3}, \quad \ldots;$$

$$\left.\begin{array}{l} u \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \\ \ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \\ \ldots\ldots \end{array}\right\} \quad \mathrm{T} + \mathrm{F'M} + 10\mathrm{MA}\,\mathrm{F'M} + (10\mathrm{MA})^2\mathrm{F'M} + \ldots$$

d'où il résulte que les séries (11) convergent dans un égal degré en tous les points de σ, lorsque converge la série

$$1 - (10\mathrm{MA}) + (10\mathrm{MA})^2 - (10\mathrm{MA})^3 + \ldots$$

c'est-à-dire lorsqu'on a

$$10\mathrm{MA} < 1. \tag{12}$$

La constante A dépend, nous l'avons dit, de la nature des fonctions $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$; l'autre M, au contraire, dépend seulement de la nature de l'aire σ et elle décroît indéfiniment avec le décroissement des dimensions de σ.

En conclusion nous pouvons dire que :

Les séries (11) *convergent uniformément en tout* σ *lorsque dépendamment de la nature des fonctions* $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, *et de l'aire* σ, *la condition* (12) *est satisfaite.* Ajoutons que cette condition est certainement satisfaite si σ est suffisamment petit.

L'observation faite à la fin du n° 3, en ce qui regarde la validité des ($5''$), ($6''$), même lorsque le point de σ qu'on considère s'approche indéfiniment de s, nous montre que les inégalités du n° 5, relatives aux fonctions u_n et à leurs dérivées premières, valent aussi, même lorsque le point de σ s'approche indéfiniment de s et par suite que les trois premières des séries (11) convergent uniformément et encore la condition (12) étant satisfaite, lorsque le point de σ s'approche indéfiniment de s.

7. On multiplie les séries convergentes (11) respectivement par Ga_{10}, Ga_8, Ga_9, Ga_5, Ga_6, Ga_7, Ga_1, Ga_2, Ga_3, Ga_4, et on les somme en groupant les premiers termes entre eux, les deuxièmes entre eux, etc. On aura évidemment

$$G\Gamma(u) = G\Gamma(u_0) + G\Gamma(u_1) + G\Gamma(u_2) + \ldots.$$

Puisque cette série, comme celle dont elle dérive, est uniformément convergente en tout σ, nous pourrons intégrer en toute l'aire σ en appliquant le théorème de l'intégration des séries, et

$$\frac{1}{2\pi}\int_\sigma G\Gamma(u)\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma G\Gamma(u_0)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma G\Gamma(u_1)\,d\sigma + \ldots$$

et par la (10)

$$z = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma G\Gamma(u)\,d\sigma = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

et enfin

$$u = u_0 + z = u_0 + \frac{1}{2\pi}\int_\sigma G\Gamma(u)\,d\sigma.$$

Par la formule

$$G = u' - t,$$

il résulte

$$\Delta\Delta z = \frac{1}{2\pi}\Delta\Delta\int_\sigma u'\Gamma(u)\,d\sigma - \frac{1}{2\pi}\Delta\Delta\int_\sigma t\Gamma(u)\,d\sigma.$$

Or, t est régulier en tout σ, ainsi que ses dérivées de tout ordre et il satisfait, par hypothèse, à l'équation $\Delta\Delta t = 0$; et l'on a

$$\Delta\Delta z = \frac{1}{2\pi}\Delta\Delta\int_\sigma u'\Gamma(u)\,d\sigma.$$

Par la forme de la fonction u' du n° 1 on a

$$\Delta u' = \log r + 1,$$

par suite

$$\Delta\int_\sigma u'\Gamma(u)\,d\sigma = \int_\sigma \Gamma(u)\,\Delta u'\,d\sigma = \int_\sigma \Gamma(u)(\log r + 1)\,d\sigma;$$

en effet, nous savons que la dernière intégrale est propre, lorsque même l'expression $\log r$ devient infinie dans le point

$r = 0$. En concluant

$$\Delta\Delta\bar{u} = \frac{1}{2\pi}\Delta\int_\sigma \Gamma(u)(\log r - 1)\,d\tau$$
$$= -\frac{1}{2\pi}\Delta\int_\sigma \Gamma(u)\log r\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\Delta\int_\sigma \Gamma(u)\,d\tau,$$

et admis que les dérivées premières de l'expression $\Gamma(u)$ existent et soient régulières en tout σ, ce qui porte aux conditions trouvées au numéro précédent, on a, par le théorème de Poisson :

$$(13)\qquad \Delta\int_\sigma \Gamma(u)\log r\,d\tau = 2\pi\,\Gamma(u)$$

et enfin

$$\Delta\Delta\bar{u} = \Gamma(u).$$

Or, la fonction u_0 satisfait à l'équation : $\Delta\Delta u_0 = 0$, donc :

$$(14)\qquad \Delta\Delta u = \Gamma(u).$$

Cela nous démontre que la fonction u déterminée par la première des séries (11) satisfait en tout σ à l'équation donnée (8).

8. Par l'observation faite à la fin du paragraphe précédent il résulte, même si l'on approche indéfiniment de s, que

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial n} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \ldots\\ &= \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n} + \ldots\\ &\quad + \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n} + \ldots\\ &= \frac{\partial u_0}{\partial n} + \frac{\partial u_1}{\partial n} + \frac{\partial u_2}{\partial n} + \ldots\end{aligned}$$

Or, sur s, on a

$$u_0 = u_s,\qquad \frac{\partial u_0}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s,\qquad u_i = \frac{\partial u_i}{\partial n} = 0,$$

savoir, désignant par P un point quelconque de σ et par P_0 un autre de s

$$\lim_{PP_0 = 0} u_0 = u_s,\qquad \lim_{PP_0 = 0}\frac{\partial u_0}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s,\qquad \lim_{PP_0 = 0} u_i = \lim_{PP_0 = 0}\frac{\partial u_i}{\partial n} = 0.$$

et donc par la série déjà écrite et par la première des (11), puisque l'on peut appliquer le théorème des limites, chaque terme étant une fonction finie

$$\lim_{PP_0 = 0} \frac{\partial u}{\partial n} = \lim_{PP_0 = 0} \frac{\partial u_0}{\partial n} + \lim_{PP_0 = 0} \frac{\partial u_1}{\partial n} + \lim_{PP_0 = 0} \frac{\partial u_2}{\partial n} + \ldots = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s,$$

$$\lim_{PP_0 = 0} u = \lim_{PP_0 = 0} u_0 + \lim_{PP_0 = 0} u_1 + \ldots = u_s,$$

c'est-à-dire la fonction u déterminée par la première des (11) satisfait sur le contour s aux équations

$$u = u_s, \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s,$$

où u_s, $\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s$ sont des fonctions arbitraires données dans les points du contour s. Les deux résultats de ce paragraphe peuvent être énoncés de cette manière :

Il existe, au moins pour les champs σ suffisamment petits, une intégrale régulière de l'équation indéfinie (8), prenant sur s, ainsi que sa dérivée normale, des valeurs données à volonté. On peut toujours déterminer cette intégrale par des approximations successives.

9. La formule (13) et par suite la formule (14) ont pu être établies en supposant que l'expression $\Gamma(u)$ ait des dérivées premières régulières.

A la vérité le théorème de Poisson a été établi par plusieurs auteurs admettant pour la fonction $\Gamma(u)$ des conditions moins restrictives que celle que nous avons assignées pour l'existence des dérivées partielles premières de $\Gamma(u)$; mais, pour simplifier, nous nous bornerons à cette dernière, laquelle, quoique plus restrictive, est certainement plus simple.

Revenons un moment à l'expression $\Gamma(u)$ et démontrons que la dérivée première de cette fonction existe. Il faut établir avant tout une inégalité. Reprenons la formule

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma \frac{\partial^3 G}{\partial x_1^3} f(x, y) \, d\sigma.$$

qu'on peut écrire

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3} f(x, y)\, d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^3 t}{\partial x_1^3} f(x, y)\, d\tau.$$

Étant posé que la fonction $f(x, y)$ soit dérivable une fois par rapport à x et rappelé qu'on a $r = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$, il résulte, en intégrant par parties,

$$\int_\sigma \frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3} f(x, y)\, d\tau = -\int_\sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x^2} f(x, y)\, d\tau$$

$$= \int_\sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x}\, d\tau$$

$$- \int_s \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x^2} f(x, y) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds;$$

de là nous pouvons écrire

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x^2} \frac{\partial f}{\partial x}\, d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x^2} f(x, y) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^3 t}{\partial x_1^3} f(x, y)\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^2}\, d\tau - \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^2} f(x, y) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds - \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^3 t}{\partial x_1^3} f(x, y)\, d\tau$$

et, si $t = t(x, y)$,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^2}\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial^2 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^2} f(x, y) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds.$$

et

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3} \frac{\partial f}{\partial x}\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_s \frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3} f(x, y) \frac{\partial x}{\partial n}\, ds,$$

où les dérivations sous le signe d'intégration sont possibles, car la première intégrale, a-t-on dit, est propre; la deuxième, tant que le point x_1, y_1 n'est pas sur s, est certainement finie. Représentons par F_1 la plus grande valeur absolue de la fonction $\frac{\partial f}{\partial x}$

dans σ et nous aurons

$$\left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\right| = F_1 \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3}\right| d\sigma + F \frac{1}{2\pi}\int_s \left|\frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3}\right| \left|\frac{\partial x}{\partial n}\right| ds,$$

et puisque l'intégrale

$$(15) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3}\right| d\sigma$$

est propre, sa valeur décroîtra indéfiniment avec le décroissement successif des dimensions de σ; par suite, si H représente une constante déterminée, ce sera

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \left|\frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3}\right| d\sigma$$

et H pourra décroître indéfiniment avec σ.

En même temps, puisque $\frac{1}{2\pi}\int_s \left|\frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3}\right| \left|\frac{\partial x}{\partial n}\right| ds$ est toujours finie, on pourra déterminer une constante h, telle que

$$(16) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_s \left|\frac{\partial^3 \frac{1}{h} r^2 \log r}{\partial x_1^3}\right| \left|\frac{\partial x}{\partial n}\right| ds < h,$$

et l'on aura

$$(17) \qquad \left|\frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4}\right| = HF_1 + hF.$$

On a des formules analogues pour les autres dérivées quatrièmes de u; et nous admettrons, pour simplifier, que F_1 soit le maximum des valeurs absolues maxima des dérivées premières de $f(x, y)$, que H soit toujours supérieur à toute intégrale que l'on obtiendra analogue à l'intégrale (15) et que h soit toujours supérieur à toute expression analogue à (16). Cela posé, la formule (17) servira pour toutes les dérivées quatrièmes de la fonction u.

10. Par la (10), on a que les dérivées de tout ordre de u_0 sont régulières tant que le point (x_1, y_1) de σ n'est pas sur s; étant admis donc, que les dérivées successives des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ soient régulières, on aura que, comme $\Gamma(u_0)$ même ses dérivées premières seront régulières en tous les points de l'aire σ.

Et alors, si nous désignons par F'_1 le maximum des valeurs absolues maxima des dérivées premières de $\Gamma(u_0)$, on aura par (10) et (17) :

$$\left|\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}\right| < HF'_1 + hF',$$

$$\left|\frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial y_1}\right| < HF'_1 + hF',$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Or, on a :

$$\frac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial x_1} = a_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} + a_2 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial y_1} + a_3 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^2 \partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} \cdots$$

où $a_1, a_2, \ldots, \frac{\partial a_1}{\partial x_1}, \ldots$ sont régulières dans τ.

Rappelons-nous que Λ est le maximum des maxima de a_1, $a_2, \ldots, a_{10}$, et si A_1 représente la somme des plus grandes valeurs absolues des coefficients des dérivées troisièmes de u_1, dans l'expression précédente; A_2, celle des coefficients des dérivées deuxièmes de u_1; A_3, celle des coefficients des dérivées premières de u_1; A_4, celle des coefficients de u_1; nous aurons par les inégalités précédentes et par celles du n° 5

$$\left|\frac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial x_1}\right| < F'[\tfrac{1}{2}\Lambda h + M(A_1 + A_2 + A_3 + A_4)] + \tfrac{1}{2}\Lambda F'_1 H,$$

et posant

$$\tfrac{1}{2}\Lambda h + M(A_1 + A_2 + A_3 + A_4) = \Sigma,$$

et

$$\tfrac{1}{2}\Lambda H = \chi,$$

on peut écrire la formule précédente

$$\left|\frac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial x_1}\right| < F'\Sigma + F'_1\chi,$$

et pareillement

$$\left|\frac{\partial \Gamma(u_1)}{\partial y_1}\right| < F'\Sigma + F'_1\chi,$$

lesquelles avec l'autre

$$\Gamma(u_2) < F'\Theta$$

du n° 5 (ici est : $\Theta = 10\,M.\Lambda$) nous donnent par (17)

$$\left|\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3}\right| < H(F'\Sigma + F'_1\chi) + hF'\Theta,$$

$$\left|\frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^2 \partial y_1}\right| < H(F'\Sigma + F'_1\chi) + hF'\Theta,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

lesquelles avec l'autre

$$\frac{\partial \Gamma(u_2)}{\partial x_1} = a_1 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 u^2}{\partial x_1^3 \partial y_1} + \ldots + \frac{\partial a_1}{\partial x_1} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \ldots$$

donnent

$$\left|\frac{\partial \Gamma(u_2)}{\partial x_1}\right| < [H(F'\Sigma + F'_1\chi) + hF'\Theta] + F'\Theta M(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4),$$

c'est-à-dire

$$\left|\frac{\partial \Gamma(u_2)}{\partial x_1}\right| < F'\Sigma(\Theta + \chi) + F'_1\chi^2,$$

et pareillement

$$\left|\frac{\partial \Gamma(u_2)}{\partial y_1}\right| < F'\Sigma(\Theta + \chi) + F'_1\chi^2,$$

et ainsi, puisque d'après le n° 5,

$$|\Gamma(u_2)| < F'\Theta^2,$$

avec un raisonnement analogue, on a

$$\left|\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2}\right| < H[F'\Sigma(\Theta + \chi) + F'_1\chi^2] + hF'\Theta^2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|\Gamma(u_3)| < F'\Theta^2,$$

$$\left|\frac{\partial \Gamma(u_3)}{\partial x_1}\right| < F'\Sigma(\Theta^2 + \Theta\chi + \chi^2) + F'_1\chi^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left|\frac{\partial^2 u_4}{\partial x_1^2}\right| < H[F'\Sigma(\Theta^2 + \Theta\chi + \chi^2) + F'_1\chi^3] + hF'\Theta^3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On voit donc que, pour passer des dérivées quatrièmes d'une fonction u avec un certain index à celles de la fonction u successive, il faut substituer dans le deuxième membre de l'inégalité à F' l'expression $F'\Theta$, à F'_1 l'autre $F'\Sigma + F'_1\chi$; cela posé, on aura en général

$$(18)\qquad \left|\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x_1^2}\right| < H[F'\Sigma(\Theta^{n-1} + \Theta^{n-2}\chi + \ldots + \Theta\chi^{n-2} + \chi^{n-1}) + F'_1\chi^n] + hF'\Theta^n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

II. Considérons les séries

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \ldots \\[2ex] \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial y_1} = \dfrac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2 \partial y_1} + \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2 \partial y_1} + \dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2 \partial y_1} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Par (18), on a

$$\left|\frac{d^4 u}{dx_1^4}\right| \leq \left|\frac{d^4 u_0}{dx_1^4}\right| + (\mathrm{H}\mathrm{F}_1 + h\mathrm{F}')$$

$$+ \sum_1^{\infty} {}_n \{\mathrm{H}[\mathrm{F}'\Sigma(\Theta^{n-1} + \Theta^{n-2}\chi + \ldots + \Theta\chi^{n-2} + \chi^{n-1}) + \mathrm{F}_1\chi^n] + h\mathrm{F}\,\Theta^n\}.$$

. . . . . .

et les séries (19) seront certainement uniformément convergentes dans tout σ (les points de s inclus) si les trois séries, dont les termes généraux sont

$$\Theta^{n-1} + \Theta^{n-2}\chi + \ldots + \Theta\chi^{n-2} + \chi^{n-1}; \quad \chi^n; \quad \Theta^n,$$

convergent; on peut les écrire

$$\frac{\Theta^n - \chi^n}{\Theta - \chi}, \quad \chi^n, \quad \Theta^n;$$

c'est-à-dire, si convergent les deux séries dont les termes généraux sont

$$\chi^n, \quad \Theta^n.$$

Donc, les séries des dérivées quatrièmes (19) convergent tant qu'on a

$$\chi < 1, \quad \Theta < 1. \tag{20}$$

Par suite, outre la condition (12) : $\Theta < 1$, qu'on avait trouvée pour la convergence des séries (11), pour l'existence des dérivées quatrièmes de u, on doit avoir : $\chi < 1$, c'est-à-dire

$$\{\lambda\mathrm{H}\} < 1,$$

où H décroît indéfiniment avec le décroissement successif des dimensions de l'aire σ.

Ces remarques faites, nous concluons :

La fonction u déterminée par la première des séries (11) *satisfait dans σ à l'équation* (8) *et sur s prend, ainsi que sa dérivée normale, des valeurs données, pourvu que ces conditions* (20) *soient satisfaites, lesquelles sont certainement satisfaites tant que l'aire σ est suffisamment petite.*

SUR L'UNICITÉ DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS LINÉAIRES.

12. Les raisonnements précédents nous assurent l'existence d'une intégrale régulière de l'équation (8) dans σ par les conditions données au contour, au moins pour des aires σ suffisamment petites.

Nous allons maintenant examiner les cas où l'on peut parler d'unicité de cette intégrale régulière.

Désignons par u, v deux intégrales régulières de l'équation (8), qui prennent, ainsi que leurs dérivées normales, les mêmes valeurs sur s. La fonction régulière

$$w = u - v$$

satisfera elle-même à l'équation (8) et sur s elle et sa dérivée normale seront nulles.

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\int_\sigma w[\Delta\Delta w - F(w)]\,d\sigma = 0.$$

Intégrant par parties avec l'avertissement que w et $\frac{dw}{dn}$ sont nulles sur s, on a

$$\int_\sigma [(\Delta w)^2 - wF(w)]\,d\sigma = 0. \tag{24}$$

L'expression qui est sous le signe d'intégration est une forme quadratique en w et dans les dérivées premières, deuxièmes et troisièmes de w.

Or sur s

$$w = \frac{dw}{dn} = 0,$$

et l'on peut transformer cette forme quadratique en d'autres; par exemple en une, dans laquelle il ne se présente que w et ses dérivées premières et deuxièmes. En tous cas, lorsqu'on démontre d'une manière quelconque, qu'une de ces formes quadratiques (canoniques) est essentiellement positive, il sera facile de démontrer, en égalant à 0 les variables de la forme qu'on considère, qu'on a identiquement

$$w = u - v = 0,$$

savoir

$$u = v.$$

et alors évidemment il sera démontré l'unicité de l'intégrale de l'équation (8) par les conditions au contour données.

13. En particularisant la forme de l'expression $\Gamma(u)$, on peut arriver à des résultats suffisamment complets.

Si l'on a

$$(22) \qquad +\Gamma(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu,$$

(21) deviendra

$$\int_\sigma \left[(\Delta w)^2 + w\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial w}{\partial x} + 2e\frac{\partial w}{\partial y} + fw\right)\right] d\tau = 0.$$

En intégrant par parties

$$(21') \qquad \int_\sigma \left[(\Delta w)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + w^2\left(\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f\right)\right] d\tau = 0.$$

Si l'expression

$$(23) \qquad \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f$$

en tout σ n'est pas négative, la forme sous le signe d'intégration précédent est certainement positive et l'on aura pour tous les points de σ

$$w = 0.$$

ce qui démontre l'unicité de l'intégrale de la (8) tant que l'expression de $\Gamma(u)$ est la (22)

Si l'expression (23) n'est toujours positive, désignant par B, B′, deux fonctions régulières des points de σ, qu'on prendra convenablement, nous pouvons écrire l'intégrale (21′) sous la forme

$$\int_\sigma \left[(\Delta w)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2\mathrm{B}w\frac{\partial w}{\partial x} \right.$$
$$\left. + 2\mathrm{B}'w\frac{\partial w}{\partial y} + w^2\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f\right)\right] d\tau = 0.$$

qui est évidemment positive, si

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + 2\mathrm{B}w\frac{\partial w}{\partial x} + 2\mathrm{B}'w\frac{\partial w}{\partial y} + w^2\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f\right)$$

est aussi positive, et il suffira pour cela de choisir B et B′ de façon à satisfaire

$$\mathrm{B}^2 + \mathrm{B}'^2 + \frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f.$$

d'où l'on a, comme l'a démontré M. Picard [1], que

Pour des aires suffisamment petites, l'intégrale de la (8) *qui correspond à l'expression* (22) *et à des valeurs données pour elle et sa dérivée normale sur le contour s est certainement unique.*

14. Un autre cas qu'on peut complètement résoudre est celui de l'équation

$$\Delta\Delta u = ku, \tag{8'}$$

où k est constante.

En ce cas, l'expression (21) deviendra

$$\int_\sigma [(\Delta w)^2 - k w^2]\, d\sigma = 0,$$

laquelle nous montre que *par k fonction réelle et négative* (*on peut dire par k fonction régulière et jamais positive en σ*) *l'intégrale régulière de la* (8'), *par des valeurs données à son contour et à celui de sa dérivée normale, est unique* ».

Si k est quantité constante et complexe, posons

$$k = k' + ik'',$$
$$u = u' + iu'',$$

la (8') en ce cas deviendra

$$\Delta\Delta u' + i\Delta\Delta u'' = (k' + ik'')(u' + iu''),$$

c'est-à-dire

$$\Delta\Delta u' - k'u' + k''u'' = 0,$$
$$\Delta\Delta u'' - k'u'' - k''u' = 0,$$

et si nous multiplions la première par u'' et la seconde par u' et soustrayons membre à membre en intégrant par tout σ, nous aurons

$$\int_\sigma [u''\Delta\Delta u' - u'\Delta\Delta u'' - k''(u'^2 - u''^2)]\, d\sigma = 0. \tag{24}$$

Si la fonction u s'annule sur s ainsi que $\frac{\partial u}{\partial n}$, savoir :

$$u' = u'' = \frac{\partial u'}{\partial n} = \frac{\partial u''}{\partial n} = 0,$$

[1] PICARD (*l. c.*, Chap. I, § 1, ou *Acta mathematica*, t. XII, *Traité d'Analyse*, Chap. I, § 5).

on aura

$$\int_\sigma (u'' \Delta \Delta u' - u' \Delta \Delta u'') \, ds = 0,$$

et par la (22)

$$\int_\sigma k^2 (u'^2 + u''^2) \, d\sigma = 0, \tag{25}$$

et pour $k^2 > 0$

$$u' = u'' = 0,$$

en tout σ.

Ce résultat nous montre qu'il n'existe pas, pour les valeurs complexes de k, une intégrale régulière, non nulle, de l'équation (8'), laquelle sur s s'annule ainsi que sa dérivée normale; c'est-à-dire que :

« Pour des valeurs complexes de k, l'équation (8') admet une intégrale régulière et seulement une, qui correspond à des valeurs de u et de $\frac{\partial u}{\partial n}$ données sur s ».

On ne peut plus parler d'unicité d'intégrale régulière de la (8') dans le cas de k constante et négative et des aires de forme et dimensions quelles qu'elles soient.

Le résultat du numéro précédent nous assure, il est vrai, de l'unicité de l'intégrale régulière (8') pour k positif (savoir pour k pas toujours nul ou négatif), tant qu'on parle d'une aire σ suffisamment petite; mais pour une aire quelconque ce n'est pas ainsi généralement.

En vérité, il suffit d'observer que pour une aire circulaire ou elliptique σ il existe certainement des intégrales régulières de la (8') qui correspondent à des valeurs positives de k, lesquelles s'annulant encore sur s ainsi que leurs dérivées normales, néanmoins sont identiquement nulles dans tout σ [1]; et en effet il existera des intégrales régulières de la (8'), lesquelles, tandis qu'elles ne sont pas généralement égales en tout σ, sur s, elles et leurs dérivées normales prennent les mêmes valeurs.

ÉQUATIONS NON LINÉAIRES.

15. Examinons maintenant l'équation non linéaire, c'est-à-dire

[1] MATHIEU, *Sur le mouvement vibratoire des plaques*, *Journal de Mathématiques*, t. XIV, 2e série.

un type plus général

$$\Delta\Delta u = f\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, u, x, y\right),$$

et cherchons une intégrale de cette équation qui soit régulière en tout σ, telle que sur le contour s elle et sa dérivée normale prennent des valeurs données. Ces valeurs seront des fonctions des points de s, que nous supposerons toujours finies et que nous désignerons par u_s, $\left(\frac{du}{dn}\right)_s$.

Considérons à présent l'équation indéfinie :

$$\Delta\Delta u_0 = 0,$$

avec les conditions au contour s :

$$u_0 = u_s, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_s.$$

L'intégrale u_0 de cette équation sera régulière ainsi que ses dérivées de tout ordre; par cela, on pourra fixer une quantité finie L égale au maximum des maxima de u_0 et de ses dérivées des quatre premiers ordres.

Cela posé, on suppose que f, fonction des variables indépendantes $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, u, x, y$, variables entre — L et — L, soit toujours régulière; alors, il existera un maximum fini de ses valeurs absolues que nous désignerons par μ.

On intègre les équations indéfinies

$$\Delta\Delta u_1 = f\left(\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}, \ldots, \frac{\partial u_0}{\partial x}, \ldots, u_0, x, y\right),$$

$$\Delta\Delta u_2 = f\left(\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \ldots, u_1, x, y\right),$$

. . . . . .

avec les conditions que sur s les $u_1, u_2, \ldots$ et leurs dérivées normales s'annulent. Posant

$$f\left(\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3}, \ldots, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial u_i}{\partial x}, \ldots, u_i, x, y\right) = \Gamma(u_i),$$

nous aurons

$$u_i = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma G\,\Gamma(u_{i-1})\,d\sigma,$$

et, par l'hypothèse faite sur f, on a

$$|\Gamma(u_1)| \leqq \mu.$$

et, par les (5''), (6''), (7''),

$$\left.\begin{array}{c} |u_1| \\ \left|\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\right| \\ \left|\dfrac{\partial u_1}{\partial y_1}\right| \\ \left|\dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}\right| \\ \cdots\cdots \\ \left|\dfrac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3}\right| \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} < \mu M.$$

Faisons une hypothèse sur f, savoir que pour des valeurs de $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots, u$, comprises entre $-L$ et L, on peut déterminer dix constantes positives $B_1 \ldots B_{10}$, de manière que

$$|\Gamma(u')| < B_1 \left|\frac{\partial^3 u'}{\partial x^3}\right| + B_2 \left|\frac{\partial^3 u'}{\partial x^2 \partial y}\right| + \ldots + B_{10} |u'|,$$

où $\frac{\partial^3 u'}{\partial x^3}, \ldots u'$ désignent des valeurs quelles que soient les variables $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots, u$, comprises entre $-L$ et L.

Cette condition sera certainement satisfaite si la fonction f admet des dérivées partielles premières finies et continues respectivement aux dix variables $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots, u$.

En particulier, nous avons

$$|\Gamma(u_1)| < B_1 \mu M + B_2 \mu M + \ldots + B_{10} \mu M,$$

c'est-à-dire

$$|\Gamma(u_1)| < \mu M (B_1 + B_2 + \ldots + B_{10}),$$

et ayant posé

$$M(B_1 + B_2 + \ldots + B_{10}) = \Theta,$$

il résultera

$$\left.\begin{array}{c} |u_2| \\ \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right| \\ \cdots\cdots \\ \left|\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right| \\ \cdots\cdots \\ \left|\dfrac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3}\right| \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} < \mu \Theta M.$$

et, de proche en proche, on a

$$\left.\begin{array}{l} |u_2| \\ \left|\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right| \\ \cdots\cdots \\ \left|\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}\right| \\ \cdots\cdots \\ \left|\dfrac{\partial^n u_2}{\partial x_1^n}\right| \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} < 2\,\theta^{n-1}\,\mathrm{M}$$

et alors, comme au n° 6, on a que la série

$$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots \tag{26}$$

converge uniformément en tout τ, ainsi que ses dérivées des quatre premiers ordres : encore sur s pour u et ses dérivées premières, tant qu'on a

$$\mathrm{M}\,|\mathrm{B}_1| + |\mathrm{B}_2| + \ldots + |\mathrm{B}_{10}| < 1.$$

Il s'ensuit de là qu'il n'y a rien à changer aux raisonnements des n°s 7 et 8, pour démontrer que *la fonction u, déterminée par la (26) satisfait en τ, à l'équation (25) et sur s aux autres*

$$u = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_0.$$

Il va sans dire qu'encore ici pour établir le théorème précédent, il faut admettre l'existence des dérivées premières régulières de $f\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots, u, x, y\right)$ respectivement à x, y : f considérée comme fonction de x, y explicitement et respectivement à $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots, u$, parce qu'alors c'est facile de démontrer, avec des raisonnements parfaitement analogues à ceux des n°s 10, 11, que les dérivées quatrièmes de la fonction u, représentée par la série (26), existent et sont régulières et qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}}\frac{\partial^4 u}{\partial x^3\,\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}}\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}.$$

16. Pour l'unicité des intégrales de l'équation (25) voici ce qu'on peut dire en général.

Supposé que f admette les dérivées partielles respectivement à $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \ldots, u$, désignons par u_1 et u_2, deux intégrales de la (25) qui prennent sur s les mêmes valeurs ainsi que leurs dérivées normales. On aura

$$\Delta\Delta(u_1 - u_2) = \Gamma(u_1) - \Gamma(u_2),$$

et posant $v = u_1 - u_2$

$$\Delta\Delta v = \frac{\overline{\partial f}}{\partial\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\overline{\partial f}}{\partial\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y}\right)}\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\,\partial y} + \ldots + \frac{\overline{\partial f}}{\partial v}v,$$

où les symboles $\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}\right)}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial v}$ désignent les valeurs de ces dérivées premières même pour des valeurs de $\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}, \ldots, v$, comprises respectivement entre $\frac{\partial^3 u_1}{\partial x^3}$ et $\frac{\partial^3 u_2}{\partial x^3}, \ldots, u_1$ et u_2.

On peut considérer les symboles comme fonction de x et y, de telle manière que l'équation $(25)'$ devient une équation linéaire en v.

Les mêmes considérations du n° 12 peuvent ici servir pour voir si, dépendamment de la nature de la fonction f, l'intégrale de la $(25)'$, que sur s s'annule ainsi que sa dérivée normale, est identiquement nulle en tout σ; c'est-à-dire si l'intégrale de l'équation $(25)'$ est unique.

Pour énoncer des résultats plus complets, considérons le cas particulier où

$$-f = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u, x, y\right).$$

Dans ce cas, en appliquant la méthode déjà indiquée, on a

$$\int_\sigma \left\{(\Delta v)^2 - v\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \frac{\overline{\partial f_1}}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\overline{\partial f_1}}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\overline{\partial f_1}}{\partial v}v\right]\right\} d\sigma = 0,$$

et en intégrant par parties

$$\int_\sigma \left\{ (\Delta v)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 - v \left[\frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial f_1}{\partial v} v \right] \right\} d\sigma = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que la forme entre crochets en v, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, soit essentiellement positive est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)} & \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \end{vmatrix} - \frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}\right]^2 - \frac{1}{4}\left[\frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\right]^2 > 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{4} \frac{\partial f_1}{\partial v} > \left[\frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)}\right]^2 + \left[\frac{\partial f_1}{\partial\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)}\right]^2.$$

Lorsque la fonction f_1 est de façon à satisfaire à la précédente inégalité, si v et $\frac{\partial v}{\partial n}$ sont nulles sur s, la formule (27) nous donne $v = 0$ en tout σ; donc l'intégrale est unique.

En particulier, si la fonction f_1 ne contient pas les dérivées premières, savoir si elle est fonction de v, x, y, seulement, la condition précédente devient

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} > 0,$$

laquelle nous montre que la f_1 croît avec le croissement de v.

M. Poincaré.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Œuvres complètes de Christian Huygens, publiées par la Société hollandaise des Sciences. Tome VII, *Correspondance*, 1670-1675. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

La publication des Œuvres de Huygens se poursuit avec régularité. Le septième Volume de la Correspondance se termine à la 2082e Lettre, datée du 26 décembre 1675. La perte du regretté Biérens de Hahn, dont les premiers Volumes attestaient le grand savoir et le zèle infatigable, n'a ni ralenti la publication, ni changé le plan adopté. Nous retrouvons la même conscience, la même érudition, la même abondance d'éclaircissements solides et précis. M. Bosscha a accepté la lourde tâche que nul mieux que lui ne pouvait mener à bien; Christian Huygens recevra, ses admirateurs n'en doutent plus, le monument le plus achevé qui ait honoré la mémoire d'un homme illustre.

Aucun document n'est omis, tous ont leur importance; le génie de Huygens est assez grand pour que, dans sa vie, où la Science tient une si grande place, on prenne plaisir aux plus petits détails. S'intéressant à tout, aimé et respecté de tous, excellent frère, excellent fils, homme du monde très recherché à la ville, bien accueilli à la Cour, admiré des savants sans affecter jamais une supériorité que nul ne contestait, Huygens est resté assez grand pour que les attaques dirigées contre lui, tout en troublant quelquefois sa vie, n'aient amoindri que ses adversaires.

Le septième Volume commence avec l'année 1670. Christian Huygens est atteint d'une maladie *peu moins que mortelle;* la Correspondance scientifique est interrompue, et les alarmes de la famille remplissent les premières lettres. Le père et les frères, quoique fort émus, dissertent avec une entière liberté d'esprit. La perte d'un si digne enfant serait très sensible à Constantin, mais à son âge, ayant si peu d'espoir d'en jouir longtemps, il lui semble que le monde y perdrait plus encore que lui. Constantin Huygens était un poète latin renommé et habile; il semble qu'il médite une élégie sur la perte prochaine dont le pronostic des médecins le menace.

Le frère aîné de Christian, qui, comme le père, se nomme Constantin, dans une lettre au jeune frère Lodowick, le plus aimable et, à ce qu'il semble, le plus aimé de Christian, se montre désespéré des mauvaises nouvelles du bon frère; il consulte les médecins hollandais sur le traitement de la *Melancholia hypocondrica mera et pura,* c'est le nom que les médecins de Paris donnent à la maladie de Christian, qui porte aujourd'hui le nom de *mélancolie hypocondriaque;* c'est la forme mentale de l'hypocondrie. Les facultés intellectuelles de Huygens ne semblent pas avoir été atteintes; mais elles étaient menacées. Les médecins de Paris conseillent l'air natal, aussitôt que le malade sera transportable; ceux d'Amsterdam proposaient le lait de femme, s'il peut le supporter. Constantin en a vu de très heureux effets; plaise à Dieu qu'il puisse ramener le bon frère à la vie; mais, quoi qu'il advienne, il lui sait l'âme assez grande pour se résoudre avec courage au passage dans l'autre vie. Il espère le meilleur, si toutefois il peut y avoir quelque chose de meilleur que l'éternelle béatitude. Les sentiments de Christian sont plus naturels et plus humains. La vie mortelle lui est chère; il trouve la mort redoutable et mauvaise; il ne veut pas qu'on lui parle de la vie future, elle est incertaine. Le frère aîné s'en désole. La perte de son frère lui cuirait bien davantage s'il mourait dans de tels sentiments.

Dès que Christian put supporter le voyage, conduit par Lodowick qui était accouru à Paris, il alla se reposer chez son père. Heureux de revoir son cher Archimède, mais toujours besogneux au milieu d'une vie somptueuse, le vieux Constantin hésite à payer les dépenses faites. Le frère aîné écrit à Lodowick quelques jours avant le retour à la Haye : « J'ai parlé au *signor padre* touchant votre dépense chez le frère, sans en tirer rien de positif. Il dit tantôt qu'il fallait lui dire qu'il aurait soin de reconnaître cela, tantôt qu'il n'était pas déraisonnable qu'étant à son aise comme il l'est il logeât un frère venu pour l'assister, et enfin s'est étendu éloquemment sur la nécessité présente, le mauvais payement de tous côtés. »

Le jour même où son fils aîné lui demandait ses intentions, le père écrivait à Lodowick à Paris : « N'auriez-vous pas l'esprit entre vous deux de faire sentir *omnipotenti* par votre monsieur

Perrault, ou autres, que cette maladie est de si grand prix, que le Roy pourrait avoir la bonté de vous soulager de quelques subsides? D'autres auraient bien soin de se procurer adroitement de telles choses. »

Louis XIV alors préparait la guerre à la Hollande et lui-même avait grand besoin d'argent.

Christian, quoi qu'en puisse juger son père, ne se trouvait jamais fort à son aise; il aimait le luxe, et, espérant sans doute s'enrichir par ses inventions, dépensait au delà de ses revenus, dont le plus clair était la pension de six mille livres payée par le Roi. Cela suffisait alors pour bien vivre, non pour faire figure. Logé à la bibliothèque du Roi, Huygens fait parqueter l'appartement à ses frais, achète de beaux meubles, et fait ses visites en carrosse. « J'avais déjà deux laquais, écrit-il à Lodowick, et voilà un cocher de surplus; je vois bien que j'aurai de la peine à soutenir toute cette dépense, mais cela pourra toujours durer quelque temps, *et interim fiet aliquid.* »

Huygens compte sans doute sur le privilège obtenu pour ses inventions d'horlogerie. Beaucoup de déceptions l'attendaient. Christian n'aimait ni à solliciter, ni à épargner, et ne s'entendait guère aux affaires d'intérêt. Peu empressé à réclamer l'honneur de ses inventions, il l'était beaucoup moins encore à en disputer le profit.

Il écrit à Lodowick, qui a admiré sa perruque blonde et le prie de lui en envoyer une semblable : « Si vous voulez, je vous ferai encore faire une perruque, mais il faut aussi que vous ayez soin de m'envoyer de l'argent, car je n'en saurais plus débourser sans en faire venir de celui que le frère me garde, et même, sans rien débourser, je pense que j'en aurai affaire bientôt. Six personnes et deux chevaux que j'ai à nourrir font aller ma dépense extrêmement vite. » Les perruques coûtaient six louis; c'était la seconde que demandait Lodowick, et il devait encore la première. Christian l'aimait beaucoup, mais le savait mauvais payeur.

Pendant que Lodowick commandait des perruques à Paris, espérant les faire payer par *il signor padre,* qui souvent le faisait attendre, Christian avait profité de son séjour à la Haye pour commander au tailleur de sa famille un habit de couleur pour son laquais; la note lui arriva à Paris.

« Pourquoi, écrit-il à son frère, dans une lettre où il lui décrit le télescope de Newton, ne pas mettre cet habit au compte du *signor padre* aussi bien que l'étoffe de ceux qu'il fait pour les valets de vos seigneuries, car, étant en Hollande, je me suis cru de même condition et je ne pense pas que le *signor padre* l'entende autrement. »

Christian, dans ses lettres à Lodowick, parle avec abandon et sans aucun apprêt de ses relations mondaines à Paris, des souvenirs laissés en Hollande, des belles demoiselles, parentes ou amies, qui veulent bien ne pas l'oublier et auxquelles il souhaite d'heureux mariages; il assiste à une séance de réception à l'Académie française qu'il nomme *l'Académie française de M. le Chancelier*. Charles Perrault prononça sa harangue de remercîment au grand contentement des auditeurs, et reçut pour réponse autre harangue de M. Chapelain, directeur de la Compagnie. Huygens prit grand plaisir à se trouver parmi les vieux poètes et auteurs, Corneille, des Marets, Quinault, Cottin. Chapelain félicite surtout le nouvel élu de l'honneur qu'il aura de contribuer au travail de l'Académie sous les auspices de Monseigneur le Chancelier, son illustre protecteur, avec les comtes, les marquis, les gouverneurs de province, les conseillers d'État, les maîtres des requêtes dont elle est remplie, sans compter les ducs et pairs, les ministres d'État et les secrétaires de commandements qui ajoutent un si grand lustre à l'éclat de cette Compagnie.

Huygens entretient avec Oldenburg une correspondance très active. Empressé et bienveillant pour tous, ayant rarement une opinion personnelle, le secrétaire de la Société royale joue à peu près pour Christian Huygens le rôle du P. Mersenne près de Descartes; il le tient au courant, le plus souvent par l'envoi de leurs Mémoires, des travaux mécaniques de Wrenn, des subtiles inventions mathématiques de Wallis, des découvertes de Newton en Optique, des idées ingénieuses et des prétentions de Robert Hooke, de l'ignorance de Hobbes dans la Science, et de son imperturbable confiance.

Oldenburg prêche à tous la tolérance pour les illusions des inventeurs, à la bonne foi desquels il voudrait toujours croire. « Je vous assure, écrit-il à Huygens, à l'occasion de réclamations qui l'avaient froissé, que ceux de votre connaissance ici ne manquent

pas de continuer la même affection et estime pour votre personne et mérite, et qu'ils ne font rien autre que de prendre la même liberté envers vous que vous prenez envers eux, qui est de dire avec franchise leurs sentiments sur vos Ouvrages et de rectifier quelquefois les bévues qu'ils y pensent être commises touchant la propriété de quelques inventions. *Veniam damus petimusque vicissim*. Cela se pratique de part et d'autre ; il faut, ce me semble, entretenir constamment la même amitié et ne commettre rien qui puisse émousser ni détruire les forces des esprits qui travaillent à l'avancement des Sciences. »

Rien n'est plus impatientant que cette impartialité ignorante et niaise, qui ne veut pas se taire et croit sage de s'annuler ; on a le droit de garder le silence, il est impertinent de le conseiller à ceux qui se sentent insultés ou blessés. Huygens était accusé, et croyait ses accusateurs de mauvaise foi ; on comprend que de tels conseils aient rendu ses rapports avec Oldenburg plus rares et plus froids. Les prétentions de Hooke à la priorité de l'invention des horloges à pendule et du ressort spiral des montres l'entraînaient bien au delà des limites imposées par la courtoisie. Hooke alla jusqu'à insinuer, contre le confiant et naïf Oldenburg, l'accusation de complicité et de trahison. Le secrétaire de la Société royale avait, suivant lui, communiqué à Huygens les idées et les projets dont ses fonctions le faisaient dépositaire.

Robert Hooke, très instruit de toutes les sciences, sans faire sa spécialité d'aucune, agité d'une activité fébrile, abordant tous les problèmes avec un esprit d'invention souvent heureux, mais n'achevant aucune solution, est resté non moins célèbre par son caractère querelleur et défiant que par son mérite très réel.

On peut ouvrir au hasard l'un des quatre Volumes de l'*Histoire de la Société royale* par Berk, il est rare qu'on tombe sur une page de laquelle le nom de Hooke soit absent ; il prenait la parole sur tous les sujets, sans que jamais on l'accusât d'ignorance. Sur toute découverte importante, Hooke élevait de bonne foi une réclamation de priorité, et rappelait une idée analogue produite antérieurement, sans développement, sans précision et sans preuves. Hooke a disputé à Newton la découverte de l'attraction universelle, et à Huygens celle des horloges isochrones ; il est certain que, sans avoir atteint le but et sans être assez géomètre pour

lutter contre les difficultés du problème, il l'avait nettement posé.

M. Bosscha a réuni, à l'occasion du beau Livre d'Huygens *De horologio oscillatorio*, publié en 1672, des documents très intéressants et peu connus sur la découverte de l'attraction. Quoique Huygens ait toujours refusé de croire à l'action à distance, il a joué dans l'histoire de la découverte un rôle de grande importance. Newton s'est plu à le reconnaître. La théorie de la force centrifuge, révélée à la fin du beau Livre de Huygens, a rendu possible la démonstration, qui devait tarder quinze ans encore.

Les idées de Hooke, quoique certainement connues de Newton, ne pouvaient lui être d'aucune utilité. Hooke croyait fermement à l'attraction, mais il ne prouvait rien, et se bornait à déclarer certaine une idée que plusieurs autres, Roberval par exemple, avaient énoncée avant lui.

Huygens avait envoyé à Newton un exemplaire de son Livre, sans lettre d'envoi. Les remercîments furent adressés à Oldenburg, avec l'intention évidente que la lettre fût communiquée à Huygens. Oldenburg envoya la copie à Paris, en supprimant quelques lignes qui sont précisément celles que Newton citait vingt ans plus tard pour prouver que, dès cette époque, quinze ans avant la publication de son Livre, ses idées étaient déjà dirigées vers la théorie mécanique des mouvements célestes. Dans la copie envoyée à Huygens par Oldenburg, Newton se borne à louer le discours sur la force centrifuge *dont la conception peut être utilisée dans la Philosophie naturelle et en Astronomie*. La lettre originale, conservée par la Société royale, contient un développement qui ne le montre pas dans la bonne voie : « Si l'on admet, dit-il, que la raison pour laquelle la Lune tourne toujours la même face vers la Terre est due à l'effort plus grand de l'autre côté pour s'en éloigner, il en résulte (en admettant le mouvement de la Terre autour du Soleil) que la plus grande distance du Soleil à la Terre ne peut être à la plus grande distance de la Terre à la Lune dans un rapport plus grand que celui de 10000 à 56, et par conséquent, la parallaxe du Soleil supérieure à $\frac{56}{10000}$ de celle de la Lune, parce que, si la distance du Soleil était moindre, la Lune serait attirée vers le Soleil avec plus de force que vers la Terre. J'ai pensé ainsi que la libration de la Lune dépend du rapport de ses tendances

vers le Soleil et vers la Terre, jusqu'à ce que je trouve une explication meilleure. »

Il faut citer le texte anglais :

Thus, for instance, if the reason, why the same side of the Moon is ever towards the Earth, be the greater conatus of the other side to recede from it, it will follow (upon supposition of the Earths motion about the Sun) that the greatest distance of the Sun from the Earth is to the greatest distance of the Moon from the Earth, not greater than 10000 to 56, and therefore the parallax of the Sun not less than $\frac{56}{10000}$ of the parallax of the Moon, because were the Suns distance less in proportion to that of the Moon, she would have a greater conatus from the Sun than from the Earth; I thought also sometimes that the Moons libration might depend upon the conatus from the Sun and Earth compared together till I apprehend a better cause.

M. Bosscha s'étonne, sans proposer d'explication, que, contrairement à ses habitudes de correction et d'exactitude, Oldenburg ait supprimé ce passage. « Quelle est la main, dit-il, qui a soustrait aux yeux de Huygens les réflexions de Newton sur la force centrifuge, suscitées à la lecture de l'*Horologium oscillatorium* et dont Newton a voulu faire part à l'auteur? » Je ne hasarderai pas de conjecture. On ferait trop d'honneur à la perspicacité d'Oldenburg en admettant qu'il ait compris l'inextricable obscurité des lignes supprimées. Elles sont d'autant plus incompréhensibles qu'on voudra supposer Newton plus avancé sur la voie de sa grande découverte. S'il est vrai, comme on l'a souvent répété non sans vraisemblance, qu'il ait, non pas découvert, mais démontré la loi de l'attraction universelle en y pensant toujours, on ne doit pas oublier, en lisant les lignes précédentes, qu'entre elles et la publication du *Livre des principes* il se place quinze années de méditation.

Newton, sans doute, les citait de mémoire et n'en avait qu'un imparfait souvenir. Comment, en effet, sans avoir aucun indice sur le rapport de la masse du Soleil comparée à celle de la Terre, former une conjecture, moins encore proposer un raisonnement, sur la grandeur relative des actions exercées sur la Lune, et sur le rapport des distances? L'influence sur la libration du rapport de ces deux forces ne se comprend, d'ailleurs, ni avant ni après la découverte du principe.

Il semblerait tout naturel aujourd'hui qu'après avoir lu le livre de Huygens, et ayant eu, comme sa lettre le démontre, l'idée d'appliquer à l'étude des mouvements planétaires la théorie de la force centrifuge, Newton en ait déduit la loi de l'attraction solaire inversement proportionnelle au carré de la distance. Le calcul à faire ne dépassait pas même la science de Hooke, pourvu que l'on acceptât, comme première approximation, le mouvement circulaire des planètes autour du Soleil comme centre.

Soit, en effet, a le rayon d'une orbite circulaire parcourue uniformément dans un temps T; la force *centripète,* d'après la loi de Huygens, doit être par unité de masse, la vitesse étant V,

$$\frac{V^2}{a} = \left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2 \frac{1}{a} = \frac{4\pi^2 a}{T^2}.$$

L'attraction, si on l'accepte comme cause de mouvement, est donc proportionnelle à $\frac{a}{T^2}$; mais, en vertu d'une loi de Képler, $\frac{a^3}{T^2}$ est constant, et $\frac{a}{T^2}$ proportionnel à $\frac{1}{a^2}$, est en raison inverse du carré de la distance.

Pourquoi Newton n'a-t-il pas aperçu ce raisonnement? Pourquoi Huygens ne l'a-t-il pas fait lui-même? A la seconde question la réponse est facile : Huygens n'a jamais cru à l'attraction; l'influence exercée à distance lui semblait impossible à comprendre et à accepter. On peut ajouter, quoique la première raison suffise, que Huygens, faisant connaître les lois de la force centrifuge, et les démontrant d'une manière si ingénieuse, n'a jamais parlé de la force centripète. C'est par elle que nous commençons aujourd'hui; la force centrifuge s'en déduit, quand il y a lieu, et le mécanicien le plus attentif à ne supprimer aucune explication et aucun détail, en expliquant la théorie du mouvement circulaire ou elliptique des planètes, n'a pas occasion d'y introduire l'idée de force centrifuge. La force centrifuge, dans la théorie de Huygens, est la diminution *apparente* de pesanteur due à la rotation de la Terre, ou l'accroissement de la tension exercée sur un fil quand il contraint un poids à décrire un cercle dont il est le rayon; c'est l'action du poids sur le fil, sans qu'on y associe celle du fil sur le poids. L'égalité de l'action à la réaction, si familière à tous aujourd'hui, a été introduite par Newton : l'idée

de force centripète, en 1672, était très différente de celle de force centrifuge. La pensée de rapprocher l'étude des mouvements planétaires des théorèmes énoncés par Huygens ne pouvait naître alors que dans l'esprit de Newton.

Les revendications de Hooke au sujet du pendule n'étaient pas sans fondement; Huygens ne lui avait rien emprunté, personne, je crois, n'en a jamais douté; mais Hooke avait le droit de rappeler ses anciennes idées. Les soupçons injurieux et les accusations dépourvues de vraisemblance ont mis tous les torts de son côté. Ni les plaintes de Hooke, ni les allégations mensongères de l'horloger Thuret, ni les Mémoires juridiques de l'abbé Hautefeuille ne doivent diminuer la confiance dans l'entière bonne foi de Huygens; elles lui ont cependant donné beaucoup d'ennui. Désireux avant tout de tranquillité, il renonça au privilège que Colbert lui avait fait obtenir, et aux légitimes espérances de fortune accueillies un instant avec une joie paisible. Peu soucieux du lucre, il avait abandonné à Oldenburg les avantages espérés de son privilège en Angleterre; la calomnie voulut voir dans cette générosité la preuve d'un marché honteux. « Si Huygens a renoncé à ses droits, c'est qu'il a reconnu la vérité des accusations portées contre lui; s'il a abandonné à Oldenburg des avantages considérables, c'est le salaire du secret trahi sans lequel Huygens n'aurait rien inventé. » De telles insinuations ne méritaient que le mépris. Oldenburg en fut vivement ému; il pria Huygens de vouloir bien déclarer que sa générosité envers lui, comme il était vrai, n'avait eu d'autre motif que l'intérêt excité par la fortune étroite de son ami, dont il connaissait *rem angustam domi*.

La célébrité de Newton commençait alors avec la découverte des réfrangibilités inégales et du télescope qui s'y rattache, la substitution de la réflexion à la réfraction supprimant la coloration des images. Huygens accueille ces recherches avec des louanges sincères. La théorie nouvelle des couleurs lui paraît tout d'abord fort ingénieuse; il faudra voir si elle est compatible avec toutes les expériences. Il approuve fort l'invention du télescope, dont il rend compte dans le *Journal des Savants,* ainsi que de celui de Cassegrain vanté peu de temps après comme plus commode et plus ingénieux.

Huygens, après avoir revendiqué les droits de priorité de Gré-

gory, discute les avantages prétendus sur l'instrument de Newton, auquel il donne la préférence. M. Newton, suivant lui, traite le prétendu inventeur plus doucement qu'il ne mérite. Plusieurs lettres sont échangées, de plus en plus favorables aux théories et aux hypothèses de Newton. La doctrine nouvelle se confirme de plus en plus; toutefois, il semble que l'auteur doit se contenter que ce qu'il a annoncé passe pour une hypothèse fort vraisemblable. « De plus, ajoute le futur auteur du *Tractatus de lumine,* quand il serait vrai que les rayons de lumière, dès leur origine, fussent les uns rouges, les autres bleus, etc., il resterait encore la grande difficulté d'expliquer en quoi consiste cette diversité de couleurs. » La discussion s'échauffe peu à peu, et Huygens renonce à la continuer.

« Pour ce qui est des solutions de M. Newton aux doutes que j'avais proposés touchant sa théorie des couleurs, il y aurait de quoi répondre et former encore d'autres difficultés, mais, voyant qu'il soutient son opinion avec tant de chaleur, cela m'ôte l'envie de disputer. Que veut dire, je vous prie, qu'il assure que, quand même je lui aurais montré que le blanc peut se composer de deux seules couleurs primitives, je n'en pourrais cependant rien conclure contre lui? Et cependant il a dit que pour composer le blanc toutes les couleurs primitives sont nécessaires. Après cela il n'a garde de demeurer court à aucune objection qu'on lui puisse faire. »

Les relations de Huygens avec Leibnitz paraissent pour la première fois dans le septième Volume. Oldenburg écrit à Huygens : « Je ne sais, Monsieur, si vous connaissez un certain Dr Leibnitzius, à Mayence, qui est conseiller de cet Électeur, mais avec cela se mêle fort de philosophie. » Leibnitz était alors âgé de vingt-quatre ans. Oldenburg fait preuve de pénétration; il joint à sa lettre la copie d'une dissertation de Leibnitz sur le mouvement.

L'ingénieux jeune homme n'était encore ni géomètre, ni mécanicien. On le reconnaît en lisant son écrit. Oldenburg, dont l'instruction était peu profonde, a reconnu l'homme supérieur sans être choqué des ignorances qui n'ont pas pu échapper à Huygens, qui n'a rien répondu. Je doute fort que, sur ce premier indice, il ait conçu de grandes espérances. Leibnitz disait par exemple : « La nature des points est une chose admirable : s'il est vrai qu'un

point ne soit pas divisible *in partes positas extra partes*, il est cependant divisible *in partes antea non positas intra partes*, c'est-à-dire en parties qui se pénètrent, *seu in partes antea se penetrantes*. Un angle, en effet, n'est rien autre chose que la section d'un point (*puncti sectio*) et la théorie des angles est celle des quantités du point (*doctrina de quantitabus puncti*). »

Ni Oldenburg ni Huygens ne comprenaient, cela est certain; mais, plus défiant de lui-même, Oldenburg inclinait à juger favorablement; Huygens, il faut le croire, levait les épaules; et c'était lui cependant qui se trompait. Leibnitz avait infiniment plus de confiance encore. Ses idées sur la Mécanique le remplissent d'autant de joie que s'il avait trouvé la quadrature du cercle ou le mouvement perpétuel. « Je m'efforce, dit-il de tout expliquer. La circulation de l'éther, c'est-à-dire de la lumière ou du Soleil autour de la Terre, *circulationi Terræ contraria*, explique la gravité, l'élasticité, le magnétisme; les sympathies et les antipathies, c'est ainsi qu'on les nomme, les solutions, les précipitations, les fermentations, les réactions, les effets les plus extraordinaires de la nature sont dus à cet éther; il faut y rattacher la force non moins étrange des muscles, celle de la poudre, les effets des matières vénéneuses.

Leibnitz, Oldenburg l'affirme, n'est pas un esprit du commun. « Il semble juger, écrit-il à Huygens, que ni vous ni Wrenn n'avez assez assigné les causes des phénomènes que vous avez considérés en établissant vos règles sur la théorie du choc. C'est à vous à cette heure d'en juger, ajoute-t-il, avec une parfaite impartialité. » Huygens croyait aux corps parfaitement durs, sa théorie pouvait inspirer peu de confiance, mais celle de Leibnitz ne reposait sur rien.

Le jeune philosophe n'en trouva pas moins chez Huygens un accueil empressé. Leibnitz, dès sa première entrevue, fit paraître sans embarras une très grande ignorance; il connaissait imparfaitement la définition du centre de gravité. Huygens lui fit présent de son Livre récemment publié : *De horologio oscillatorio*, et, pour le lire, il fallut commencer des études sérieuses et précises. Huygens prit plaisir à les diriger. Dès l'année suivante, Leibnitz, devenu Géomètre, envoyait à son maître, sous le nom de *quadrature arithmétique du cercle*, une découverte considérée comme

très étrange, l'expression du rapport de la circonférence au diamètre par une série indéfinie. Huygens le félicite cordialement d'une découverte qui le rendra célèbre parmi les Géomètres.

Une lettre de 1675 sur le calcul des expressions imaginaires, introduites dans l'Algèbre par la règle de Cardan, non seulement justifie les espérances de Huygens, mais suffirait à elle seule pour donner rang à Leibnitz parmi les grands Géomètres de l'époque. Huygens avoue que depuis longtemps il a négligé les spéculations de ce genre; il y prend plaisir cependant, et en reconnaît l'originalité et l'intérêt. A des calculs très exacts et très nouveaux sur ces expressions mystérieuses dont il proclame l'entière généralité, Leibnitz, comme il faisait souvent, laissant courir son imagination, annonce des résultats brillants, dont certainement il n'avait pas la preuve.

« Il n'y a personne, dit-il à Huygens, qui puisse mieux juger que vous de la qualité de deux inventions qui sont, l'une, une méthode de tirer en nombres véritables ou approchants, les racines des binomes où il entre des imaginaires; et l'autre, du *compas des équations,* qui donne sans aucun calcul, tout à la fois, les racines d'une équation proposée de quelque degré et de quelque formule d'un degré donné qu'elle puisse être, soit géométriquement en ligne, soit arithmétiquement en nombres approchants, dont on peut incontinent tirer les véritables, s'il y en a, sans aucun calcul. Il semble qu'après cet instrument, il n'y a quasi plus rien à désirer pour l'usage que l'Algèbre peut ou pourra avoir dans la Mécanique ou dans la pratique. »

Leibnitz promet beaucoup plus que n'ont jamais réalisé depuis deux siècles les immenses progrès de l'Algèbre.

La correspondance de Huygens aborde tous les sujets; des Tables très bien faites, à la fin du Volume, donnent le détail des richesses qui s'y trouvent réunies, sans ordre et comme au hasard. La liste des personnages cités contient plus de cinq cents noms, presque tous un grand nombre de fois. Le nom d'Alhazen revient vingt-huit fois, celui de Boyle quarante et une fois, celui de Descartes vingt-deux fois, de Colbert quarante et une fois, de Robert Hooke soixante-dix-neuf fois, de Newton trente fois, de Louis XIV cinquante-quatre fois.

Le nombre des Ouvrages mentionnés dépasse trois cents; sur

chacun d'eux, les savants et infatigables éditeurs donnent au bas de la page une notice substantielle et précise.

A ceux qui voudraient, en quelques heures, se faire une idée du grand intérêt que présente le nouveau Volume, je conseillerais de jeter un coup d'œil sur la dernière table intitulée : *Matières traitées dans les lettres*. On y énumère plus de trois cents sujets, presque tous abordés un grand nombre de fois. M. Bosscha, suivant l'exemple donné par son savant prédécesseur, a marqué d'une étoile les articles les plus intéressants. C'est une grande responsabilité qu'il accepte. Les goûts sont divers, les curiosités capricieuses, il s'expose à plus d'un désaccord avec le lecteur. Le savant et judicieux éditeur ne l'ignore pas et, pour froisser le moins possible, il montre une indulgence extrême. Sous le titre de *Chromatique des lentilles*, par exemple, vingt-cinq pages sont indiquées dans la Table ; dix-neuf sont recommandées à l'attention du lecteur. C'est la proportion habituelle. JOSEPH BERTRAND.

PASCAL (E.). — REPERTORIO DI MATEMATICHE SUPERIORI. — Definizioni. Formole. Teoremi. Cenni bibliografici. — I. *Analisi*. — Un vol. in-16 : XV-642 p. (Collection des Manuels Hœpli). Milan, Hœpli. 1898.

Il est assez difficile d'analyser un livre qui n'est lui-même qu'un abrégé et comme un dictionnaire méthodique; on ne peut qu'essayer d'en donner l'idée. Tout d'abord, à la première page, on trouvera le sous-titre suivant, qui fera connaître les matières traitées :

Algèbre supérieure. Substitutions. Déterminants. Équations algébriques. Calcul différentiel. Calcul intégral. Équations différentielles. Groupes de transformations. Différences finies. Calcul des variations. Théorie des invariants. Variables complexes. Fonctions automorphes. Intégrales abéliennes. Fonctions elliptiques. Fonctions abéliennes. Fonctions hyperboliques. Fonctions sphériques. Fonctions cylindriques. Fonctions hypergéométriques. Série de Fourier. Théorie des nombres. Calcul des probabilités. Machines analytiques.

On est un peu étonné quand on lit tous ces titres et qu'on se

représente les gros Ouvrages sur lesquels figurent seulement quelqu'un d'entre eux. L'étonnement augmente lorsque, en feuilletant le livre, on voit qu'il tient les promesses du titre, et qu'il donne les renseignements essentiels sur les matières qu'il annonce. Bien entendu, on ne rencontre aucune démonstration, mais les définitions sont claires, intelligibles pour un mathématicien, et sur chaque sujet M. E. Pascal énonce des propositions vraiment fondamentales. Sur chaque sujet, sans doute, il a fallu se limiter et, plus d'une fois, l'auteur a dû hésiter. Il m'a paru, à la lecture de plusieurs Chapitres, qu'il avait su très bien garder la mesure. Ajoutons que c'est bien de la Science *actuelle* que M. Pascal a voulu donner un répertoire.

L'utilité d'un pareil livre est évidente : l'Auteur parle modestement, dans sa préface, des services qu'il peut rendre aux étudiants, il faudrait dire à tous ceux qui étudient; c'est encore plus à ceux qui savent, peut-être, qu'à ceux qui apprennent que ce répertoire sera utile.

Qui est-ce qui n'a rien oublié, qui n'a pas de lacune dans ses connaissances, qui n'a pas eu besoin de retrouver rapidement soit l'ensemble d'une théorie, soit une proposition particulière, soit une simple formule? Le plus souvent, on trouvera ce dont on a besoin dans ce *Répertoire*, commode et peu encombrant, et, ce qui est singulièrement précieux, on trouvera aussi les principales références.

M. E. Pascal nous annonce un second Volume sur la Géométrie : il sera aussi bienvenu que le premier.

SCHLESINGER (L.). — HANDBUCH DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN. In zwei Bänden : zweiten Bandes erster Theil (XVIII-532 p.). in-8°. Leipzig, Teubner; 1897.

On a dit ici même [1] l'intérêt qui s'attache à l'Ouvrage d'exposition dans lequel M. Schlesinger développe, sous ses divers

[1] L'analyse du premier Volume a été faite par M. J. Tannery (*Bulletin des Sciences mathématiques*, Deuxième série, tome XIX, année 1895, pages [illegible]).

aspects, la théorie des équations différentielles linéaires. L'abondance des matières à traiter a forcé l'auteur à diviser son second Volume en deux Parties, et la première, qui forme à vrai dire un important Volume, est la seule parue encore. Elle contient des théories, dont plusieurs ne paraissent avoir reçu jusqu'ici ni leur extension, ni leur forme définitive. C'était donc une tâche périlleuse, mais singulièrement utile, d'en entreprendre un exposé didactique : on reconnaîtra que l'auteur y a apporté beaucoup de netteté, de conscience et d'érudition.

I. Le Livre est divisé en quatre Sections (Sections IX, X, XI et XII de l'Ouvrage complet). La première est consacrée à la théorie générale du *groupe de transformations* d'une équation linéaire.

On sait que l'introduction de ce groupe est due à M. Picard, qui donnait, en 1883, le beau théorème suivant : *A chaque équation différentielle linéaire d'ordre n, à coefficients rationnels, correspond* (relativement à un système fondamental déterminé d'intégrales : $y_1, y_2, \ldots, y_n$) *un groupe continu algébrique de transformations linéaires homogènes à n variables. Toute fonction rationnelle de la variable indépendante x, de y_1, $y_2, \ldots, y_n$ et leurs dérivées, s'exprimant rationnellement en fonction de x, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les substitutions de ce groupe* G. M. Picard y joignait la proposition suivante :

Toute fonction rationnelle de x, de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ et leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe G, *est une fonction uniforme de x.* Je montrai plus tard que cette seconde proposition reste vraie, quand on y remplace le mot *uniforme* par le mot *rationnel,* ce qui me permit de développer la théorie de l'intégration des équations linéaires, publiée en 1892 aux *Annales de l'École Normale.* C'est cette théorie, analogue à celle qui est due à Galois, dont l'auteur s'occupe ici, en mettant aussi à profit les développements qui ont été donnés sur ce sujet par M. Klein, dans ses *Leçons autographiées* et par M. Picard, dans son *Traité d'Analyse.*

M. Schlesinger définit d'abord la notion de *groupe,* en prenant comme exemple le *groupe de monodromie* d'une équation linéaire : on sait que toutes ses opérations s'obtiennent par la répé-

tition (produit), dans un ordre quelconque, des substitutions fondamentales associées aux divers points singuliers de l'équation; ce qui conduit à définir ce que l'on entend par une *base* d'un tel groupe et par un *groupe dénombrable*. L'auteur introduit ensuite les *groupes continus* (finis) de transformations, de M. Sophus Lie, et expose, dans ses points essentiels, la théorie de ces groupes.

Puis il passe à l'étude des fonctions rationnelles des intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'un système fondamental d'une équation linéaire d'ordre n, et de leurs dérivées : à une telle fonction V correspond le groupe des transformations linéaires homogènes qui laissent cette fonction *formellement* invariante; le nombre r des paramètres de ce groupe Γ détermine le degré $(n^2 - r)$ de la *transformée* de l'équation linéaire proposée, dont V dépend; et la relation qui lie deux de ces fonctions dépend essentiellement de la comparaison de leurs groupes. C'est ainsi que l'on arrive au théorème suivant, qui est l'analogue du théorème de Lagrange pour les fonctions rationnelles de n indéterminées : *Toute fonction de la même nature que* V, *qui admet toutes les transformations du groupe* Γ *de* V, *s'exprime rationnellement au moyen des coefficients de l'équation, de* V, *et de leurs dérivées.*

L'auteur donne alors, d'après M. Picard, la définition du groupe de transformations, ou *groupe de rationalité,* d'une équation linéaire à coefficients rationnels et la démonstration de la double propriété de ce groupe, que nous énoncions tantôt, et qui le caractérise pleinement. C'est ce qu'il appelle le théorème de MM. Picard et Vessiot.

M. Schlesinger insiste avec juste raison, après M. Klein, sur la différence entre l'invariance *numérique* dont il est parlé dans cet énoncé, avec l'invariance *formelle* qui intervenait dans l'étude précédente. Mais on revient au point de vue formel, le seul au fond qui intervienne dans les applications, quand, au lieu de considérer des fonctions V isolées, on envisage les *familles* de fonctions, dont chacune est constituée par toutes les fonctions qui ont le même groupe. C'est l'idée féconde introduite en Algèbre par Kronecker, et qui conduit ici à considérer une équation linéaire particulière comme l'équation générale du même ordre, modifiée par l'*adjonction* de la famille de fonctions V correspon-

dant au groupe de transformations de l'équation donnée. On est ainsi amené à chercher à réduire progressivement ce groupe de rationalité, par l'adjonction de nouvelles fonctions V, ce qui se fait en intégrant une suite d'équations auxiliaires, dont les propriétés, et en particulier les ordres résultent de la nature du groupe de rationalité primitif.

L'application de ces principes fournit en particulier la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation linéaire soit intégrable par une suite de quadratures. C'est que le groupe de transformations soit, au sens de M. Lie, un groupe *intégrable*. Il en résulte que les équations linéaires, d'ordre supérieur au premier, ne sont pas, en général, intégrables par quadratures.

L'auteur indique ensuite divers problèmes qui se rattachent à la théorie précédente; en particulier, l'intégration d'une équation linéaire pour laquelle on connaît une relation algébrique liant certaines de ses intégrales et la recherche des équations linéaires intégrables algébriquement.

En général, le groupe de rationalité n'est pas dénombrable, et l'on peut dire seulement qu'il contient le groupe de monodromie. Un cas extrêmement remarquable est celui des équations de M. Fuchs (à intégrales régulières) : le groupe de rationalité est alors le plus petit groupe algébrique continu qui contienne le groupe de monodromie, et est, par suite, entièrement déterminé par ce dernier. Cette remarque de M. Klein explique pourquoi l'étude du seul groupe de monodromie donne, pour cette classe d'équations, la clef de toutes leurs propriétés. Tandis que, dans le cas général, il faudra encore avoir recours au groupe de rationalité, comme M. Schlesinger en donne un exemple en traitant de la réductibilité des équations linéaires (au sens de M. Fröbenius).

II. La Section suivante contient, sous le titre commun de : *Problèmes spéciaux de la théorie des groupes des équations linéaires,* des questions assez diverses. Se plaçant au point de vue de Riemann, d'après lequel on doit prendre comme point de départ les points singuliers des équations linéaires à étudier, et les substitutions linéaires qui y sont attachées, l'auteur étudie une certaine classification des équations linéaires d'un même ordre n. On y considère comme appartenant à une même *classe* celles qui ont

les mêmes points de ramification, avec les mêmes substitutions fondamentales correspondantes; les intégrales correspondantes de deux équations de la même classe sont liées par une relation réciproque de la forme

$$z = B_0 y + B_1 y' + \ldots + B_{n-1} y^{(n-1)},$$

où les B_i sont des fonctions uniformes de la variable indépendante x. La réductibilité d'une équation est alors caractérisée par l'abaissement (d'ordre) de l'une des équations de la classe.

Si l'on considère uniquement des équations de M. Fuchs, les coefficients B_i sont des fonctions rationnelles, et l'on a ce que M. Poincaré a appelé des *équations de même espèce :* elles ont, en particulier, le même groupe de rationalité. Un exemple intéressant d'équations de la même espèce est donné par les équations linéaires dont dépendent les mineurs, de même degré m, du déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

où $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont les intégrales d'un système fondamental quelconque d'une équation linéaire d'ordre n. On peut prendre pour représentant de l'espèce l'équation transformée dont dépend le déterminant

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_m \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)} & \ldots & y_m^{(m-1)} \end{vmatrix}.$$

C'est la $(n-m)^{\text{ième}}$ *associée* de la proposée; elle jouit de propriétés intéressantes, étudiées par de nombreux auteurs, et que M. Schlesinger expose en détail. Ces équations associées ont une signification géométrique remarquable, quand on considère la proposée comme définissant, en coordonnées homogènes, dans l'espace à $(n-1)$ dimensions, une courbe (*courbe intégrale*); par exemple, la $(n-1)^{\text{ième}}$ associée, qui ne diffère pas essentiellement de l'adjointe, représente la même courbe au point de vue tangentiel.

Une application importante des équations associées a été faite par M. Fuchs, qui a fondé sur elles une méthode pour reconnaître si une équation linéaire donnée est réductible. Le problème est ramené au suivant : *Reconnaître si une équation linéaire admet une intégrale dont la dérivée logarithmique soit rationnelle.* M. Schlesinger en donne la solution détaillée, en supposant l'équation donnée à coefficients rationnels; dans le cas particulier des équations de M. Fuchs, on arrive à un énoncé élégant, dû à M. Heffter.

L'auteur a eu déjà, à diverses reprises, l'occasion de signaler l'intérêt qu'il y a, dans mainte question, à étudier, au lieu des intégrales de l'équation linéaire, les *quotients intégraux,* c'est-à-dire les quotients de $n-1$ de ces intégrales par la $n^{\text{ième}}$. Les groupes de monodromie et de rationalité sont alors remplacés par des groupes projectifs isomorphes. Ces quotients intégraux vérifient une équation linéaire d'ordre $2n-1$, dont M. Schlesinger donne pour $n=2$ (et plus loin pour $n=3$) la forme bien connue.

La considération de ces quotients revient, au fond, à regarder comme équivalentes deux équations qui dérivent l'une de l'autre par une transformation

$$y = \lambda(\xi)z, \quad x = \varphi(\xi),$$

et conduit à la recherche des *invariants* de l'équation, vis-à-vis de telles transformations. Après avoir montré comment les méthodes générales de M. Lie interviennent ici, l'auteur expose les résultats généraux que l'on doit sur la question à M. Forsyth et à M. Brioschi.

L'interprétation des invariants trouvés amène enfin M. Schlesinger à étudier les équations dont les intégrales sont liées par des relations homogènes, et plus spécialement celles dont la courbe intégrale est algébrique.

III. Un intérêt tout particulier s'attache à la section de l'Ouvrage, où l'auteur s'occupe de l'étude générale de ce difficile *problème de l'inversion* des équations linéaires, illustré par les travaux de M. Schwartz, de M. Fuchs, de M. Klein, et surtout par les mémorables et décisives recherches de M. Poincaré. M. Schlesinger y conduit le lecteur en considérant les équations

du quatrième ordre, dont la courbe intégrale, sans être algébrique, est tracée sur une surface algébrique; on reconnaît, en effet, que les valeurs de la variable indépendante, qui correspondent à un même point de la courbe intégrale, sont, pour ces équations, en nombre limité, et il est dès lors naturel de rechercher toutes les équations, d'ordre quelconque, jouissant de la même propriété. On voit de plus que, si l'on se borne à des équations de M. Fuchs, on peut se limiter à celles pour lesquelles la variable indépendante x est fonction uniforme du point de la courbe intégrale.

Dans le cas où l'équation s'intègre algébriquement, M. Fuchs a montré que x peut s'exprimer en fonction rationnelle des coordonnées de ce point, c'est-à-dire des quotients intégraux $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ d'un système fondamental; et le problème analogue serait de trouver, dans le cas général, l'expression effective de x sous la forme d'une fonction uniforme de $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$, considérées comme des variables indépendantes. Tel est, en effet, le problème de l'inversion uniforme. Mais il présente des difficultés telles qu'il faut se borner à le discuter pour les équations du second ordre. Il n'y a alors qu'un seul quotient intégral η; et x sera, au sens ordinaire du mot, la fonction inverse de η, cette fonction inverse ayant cette propriété remarquable de rester invariable quand on effectue sur η l'une quelconque des transformations du groupe projectif (de monodromie) de l'équation.

L'auteur montre d'abord comment on trouve des conditions nécessaires pour qu'une équation du second ordre, à coefficients rationnels, de la classe de M. Fuchs, soit susceptible d'une inversion uniforme. En supposant, ce qui n'est qu'une restriction apparente, qu'elle est de la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = p(x)y,$$

on trouve qu'elle ne doit avoir aucun point à apparence singulière, et que les différences des racines des équations fondamentales déterminantes doivent être nulles ou être des inverses de nombres entiers. Mais un exemple extrêmement instructif, dû à M. Fuchs, montre que ces conditions algébriques ne sont, en

général, suffisantes que si on leur adjoint d'autres conditions de nature transcendante.

On a un résultat d'une importance capitale, si l'on étudie le groupe projectif (de monodromie) de l'équation considérée : c'est, comme l'on sait, que ce groupe doit être discontinu, dans le cas d'une inversion uniforme. Avant d'établir cette proposition, M. Schlesinger fait une étude détaillée des transformations projectives d'une variable : la définition des groupes discontinus, des groupes improprement discontinus, y est donnée avec grand soin. L'auteur indique ensuite comment la nature de la fonction inverse, supposée uniforme, est entièrement déterminée par le groupe de l'équation, qui donne à la fois le domaine d'existence et les points d'indétermination de cette fonction.

Le résultat essentiel de la discontinuité du groupe, dans le cas d'une inversion uniforme, subsiste pour les équations d'ordre supérieur. Un exemple d'un tel groupe se présente dans l'étude des intégrales hyperelliptiques de première espèce : la discontinuité du groupe est alors une conséquence de la solution du problème de Jacobi, au moyen des fonctions ϑ de M. Weierstrass, solution que l'auteur rappelle rapidement.

Il s'agit maintenant d'approfondir les relations qui existent entre une équation linéaire, de la classe de M. Fuchs, et son groupe de monodromie. L'énumération des constantes montre immédiatement que pour les équations d'ordre supérieur au second, sans points à apparence singulière, le groupe ne peut être quelconque; tandis qu'il y a autant de paramètres arbitraires dans les coefficients d'une équation du second ordre (de la classe de M. Fuchs et sans points à apparence singulière) que dans les substitutions fondamentales de son groupe. Ce cas sera donc plus facile à traiter, et l'on s'y bornera.

La méthode suivie par M. Schlesinger consiste à étudier la représentation conforme fournie par le quotient des intégrales, quand on l'applique au plan de la variable indépendante, modifié par des coupures joignant les points critiques de l'équation. On arrive ainsi très naturellement au *domaine fondamental* correspondant à l'équation, et au théorème relatif à la somme des angles, pour les sommets de ce domaine, qui constituent un *cycle*. Ce domaine fondamental est complètement déterminé par

le groupe de l'équation, de même qu'il définit entièrement ce groupe. De plus, en le transformant, suivant le procédé de MM. Klein et Poincaré, en une surface fermée, on reconnaît qu'il ne peut appartenir à deux équations essentiellement distinctes. On en conclut, en particulier, que les paramètres de l'équation sont fonctions uniformes des paramètres du groupe.

Une question fondamentale se pose maintenant : celle de savoir si tout groupe, donné par son domaine fondamental F_0, est effectivement le groupe de monodromie d'une équation linéaire du second ordre, de la nature considérée. L'auteur traite seulement le cas où le groupe n'est formé que de substitutions elliptiques ou paraboliques. Il établit alors, par l'emploi du procédé alterné, l'existence de fonctions, uniformes dans F_0, et n'ayant dans ce domaine qu'un seul infini. On voit ensuite, par un procédé bien connu, qui paraît remonter à Riemann, que l'existence d'une telle fonction entraîne celle d'une équation linéaire satisfaisant à la question. Le cas, ainsi traité, présente ce grand intérêt que c'est celui qui se présentera, si le groupe donné doit appartenir à une équation susceptible d'une inversion uniforme. On a donc prouvé par là (en admettant certains résultats de M. Poincaré sur les groupes discontinus) qu'il existe, pour chaque groupe discontinu, ne contenant que des substitutions elliptiques ou paraboliques, des équations linéaires correspondantes conduisant à une fonction inverse uniforme.

Les derniers Chapitres de cette Section sont consacrés à diverses études, qui se rattachent au problème de l'inversion. C'est d'abord celle des *familles* d'équations linéaires, que l'on doit à M. Poincaré. On sait que deux équations appartiennent à une même famille, si leurs variables dépendantes sont liées par une relation de la forme

$$[illegible]$$

où la dérivée logarithmique de A et les coefficients φ_i sont des fonctions rationnelles de la variable indépendante : elles ont les mêmes points singuliers proprement dits, mais non pas nécessairement les mêmes points à apparence singulière; leurs groupes projectifs de rationalité et de monodromie sont les mêmes. L'auteur montre, d'après M. Poincaré, comment on peut, dans le cas

d'équations du second ordre, définir pour chaque famille une équation *réduite*, ayant le nombre minimum de points à apparence singulière. Une étude analogue peut être faite pour les équations d'une même *classe*, d'ordre quelconque, comme l'a montré M. Fuchs.

M. Schlesinger donne enfin quelques indications sur cette importante et difficile question : Existe-t-il des équations linéaires ayant des points singuliers (proprement dits) donnés, avec des substitutions fondamentales données? La réponse exigerait une étude approfondie des relations qui existent entre les affixes des points singuliers et les paramètres des substitutions fondamentales. M. Fuchs a du moins fait une étude spéciale du cas où le groupe de monodromie est indépendant d'un paramètre arbitraire figurant dans les coefficients de l'équation : il est arrivé à ce résultat curieux que, dans le cas où l'équation est d'ordre pair $2m$, la $m^{\text{ième}}$ associée est réductible.

IV. La dernière Section contient une étude approfondie de la *transformation d'Euler*, qui se déduit de la transformation de Laplace, en y substituant, à la place de l'exponentielle e^{zx}, la fonction $(z-x)^{\xi-1}$. L'auteur s'attache, en particulier, à montrer comment on peut choisir, pour les intégrales définies auxquelles elle conduit, des chemins d'intégration tels qu'on puisse déduire de l'intégration de la transformée un système fondamental d'intégrales de la proposée. Il fait ensuite l'application de la méthode à l'équation de Tissot et Pochhammer, dont un cas particulier est l'équation de Gauss. L'étude d'un autre cas particulier, où l'équation est vérifiée par les modules de périodicité d'une intégrale abélienne, considérés comme fonctions de l'un des points de ramification, conduit l'auteur à établir, d'après M. Fuchs, la relation qui lie les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques, et qui est la généralisation de la célèbre relation de Legendre entre les périodes des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.

Enfin, dans le dernier Chapitre, M. Schlesinger expose comment M. Fuchs est arrivé, par l'extension aux équations linéaires du théorème de l'échange du paramètre et de l'argument dans les intégrales abéliennes de troisième espèce, à établir deux équa-

tions fondamentales qui s'offrent ainsi comme les analogues de la relation de Weierstrass et de Riemann liant les modules de périodicité des intégrales abéliennes, et semblent dès lors devoir servir de base à une solution générale du problème de l'inversion pour les équations linéaires d'ordre supérieur.

La dernière Partie de l'Ouvrage, qui reste à paraître, aura pour objet l'étude des fonctions triangulaires (*Dreiecks-Functionen*) à inversion uniforme, en particulier des fonctions modulaires, la théorie générale des fonctions fuchsiennes, et celle des équations linéaires à coefficients doublement périodiques.

ERNEST VESSIOT.

LAISANT C. — LA MATHÉMATIQUE. *Philosophie. Enseignement.* 1 vol. in-8°; 292 p. Paris, Georges Carré, 1898.

M. Laisant présente son Livre de la façon la plus modeste. Il se défend de rien vouloir apprendre aux savants, et, bien qu'il traite de Philosophie, de connaître la langue des philosophes; il devrait dire de quelques philosophes, car il a lu Leibnitz, Descartes, Pascal, d'Alembert, Diderot, Condorcet, Auguste Comte et il avoue qu'ils lui ont appris quelque chose. Ces gens-là étaient sans doute philosophes, et c'est l'être déjà que de se plaire dans leur commerce. Il est de ceux d'ailleurs qui souhaitent la réconciliation des Mathématiques et de la Philosophie et ce désir est si vif chez lui qu'il accuse les mathématiciens d'être les auteurs de la rupture; s'il en est ainsi, les philosophes auront le beau rôle en faisant les premiers pas. Quoi qu'il en soit, notre éminent collaborateur avait bien le droit d'inscrire le mot *Philosophie* dans le titre de son Livre; on fait de la Philosophie toutes les fois que l'on remue des idées générales, et que l'on donne à penser. Est-ce parce qu'il écrit clairement et dit nettement ce qu'il pense, qu'il a cru devoir s'excuser de son sous-titre? Je ne le soupçonne pas de cette ironie, et cependant il est vrai que le talent de trouver obscur ce que d'autres trouvent clair est une partie de l'esprit philosophique.

Son Livre est divisé en trois Parties : *la Mathématique pure, la Mathématique appliquée, l'Enseignement.*

Tout en reprenant cette vieille forme « *la Mathématique* » qui marque mieux l'unité de la Science, M. Laisant reconnaît avec raison qu'il est impossible de définir cette Science, de faire tenir tout ce qu'elle contient dans une courte phrase qui soit intelligible : c'est en l'étudiant qu'on apprendra ce qu'elle est. Il en affirme énergiquement l'origine expérimentale : « Sans la présence du monde extérieur, aucune connaissance mathématique n'aurait jamais pu pénétrer dans le cerveau de l'homme ». Il y aurait bien à dire sur ce point, et je regrette que l'auteur se soit borné à une affirmation. Tout d'abord, une condition nécessaire n'est pas forcément une origine; puis, si l'expérience est nécessaire à la constitution des Mathématiques, quelle expérience est-elle nécessaire? Est-ce bien l'expérience du monde extérieur? Veut-on dire qu'il n'y a pas d'autre expérience? Ce ne serait pas le lieu de discuter ici cette affirmation; mais tout changement dans la pensée n'est-il pas une expérience, d'où il est possible de faire sortir la notion de nombre? Cette notion suppose-t-elle autre chose que *le divers et l'unité,* que la faculté de séparer et de réunir qui est le fond même de notre intelligence? Un peu plus loin, M. Laisant dira : «... A la réalité des choses, nous substituons des êtres de raison, créés par notre cerveau, sur lesquels le raisonnement et les procédés mathématiques pourront librement s'exercer ». N'est-ce pas ces êtres-là qui sont le véritable objet de la Mathématique pure? C'est bien notre cerveau, ou mieux notre raison, qui les a créés, et cette création mérite d'être étudiée par les philosophes. Elle comporte peut-être un peu plus que l'abstraction, que l'oubli des complications phénoménales, puisque les idées qui en résultent sont, par leur perfection et leur pureté absolues, infiniment éloignées des images confuses qui les ont suscitées. Ces idées, il importe de les préciser, de les distinguer, de distinguer surtout les parties de la Science où elles interviennent, et de n'introduire que celles qui sont nécessaires : autrement, on cache le véritable caractère des faits mathématiques, et, en introduisant dans leur démonstration des éléments qui ne sont pas dans la nature des choses, on la complique, et l'on risque, en outre, de masquer l'identité de propositions qui se retrouvent

les mêmes, avec des mots différents, dans des Chapitres différents de la Science. M. Laisant en donne, à propos de la Mécanique, un exemple excellent, quand il observe que l'idée de force n'intervient pas dans ce Chapitre de la théorie des vecteurs qui constitue la plus grosse partie de la Statique du corps solide, au sens de Poinsot; cette même théorie se retrouve mot pour mot dans la Cinématique, quand on étudie la composition des rotations. Il y a donc intérêt à la séparer, comme il le propose avec raison, de la Statique ou de la Cinématique, et d'en faire un Chapitre de Géométrie, auquel on se référera, quand on en aura besoin. Il y a intérêt aussi à constituer à part une *Géométrie des masses,* où n'intervient pas le sens physique de la masse, du nombre que fournit la balance, mais où la masse n'est qu'un coefficient numérique qui affecte des éléments purement géométriques. Il est vrai aussi que la Cinématique n'est qu'un Chapitre de la Géométrie, où le caractère réel du temps n'importe nullement, où ce temps est une variable quelconque, et où l'on conservera, si l'on veut, les mots *vitesse* et *accélération,* à moins qu'on ne préfère dire *dérivée géométrique.* Ces éléments interviennent d'une façon nécessaire, quand on traite de la tangente et de la courbure, et, à vrai dire, la Cinématique n'est qu'une partie de ce qu'on appelle habituellement les Applications géométriques du Calcul différentiel. Tous ces Chapitres divers de la Géométrie, doivent, comme le demande M. Laisant, être enseignés avant la Dynamique et la Statique proprement dites, où interviennent ces postulats expérimentaux que l'on désigne d'habitude sous le nom de *lois de Newton* et, sur ce point, M. Laisant trouvera moins de contradicteurs que, peut-être, il ne se l'imagine. C'est bien ainsi que la Science s'organise, suivant les éléments essentiels qu'elle met en jeu; une partie de la Science n'est réellement constituée que lorsqu'elle a éliminé les éléments qui ne lui sont pas nécessaires et qui cependant ont contribué à sa formation. Si cela est vrai, n'est-il pas légitime de vouloir fonder la Science du nombre, c'est-à-dire toute l'Algèbre et toute l'Analyse sur la pure notion de nombre, même de nombre entier? Il semble que M. Laisant, si je l'ai bien compris, voie dans une pareille tentative, comme une atteinte à la *foi,* dont il prend chaudement la défense. De quelle foi parle-t-il, et à quelle inquisition veut-il livrer ses confrères?

Dans la Science, la foi n'est peut-être qu'un oreiller, plus commode que le scepticisme. Mais M. Laisant a raison s'il veut dire que les diverses parties des Mathématiques s'éclairent mutuellement, que le même fait mathématique qui apparaît ici entouré d'un lourd appareil logique, revêt là une clarté intuitive et que la puissance d'intuition, plus encore que la puissance logique, est la partie vraiment belle et essentielle de l'esprit mathématique. Encore faut-il faire quelques réserves : la clarté même de l'intuition empêche souvent de distinguer des choses qu'il faut cependant distinguer; la minutieuse logique y sert, c'est un rôle modeste, mais légitime. Et il se peut aussi que la facilité plus ou moins grande qu'offre une méthode ou une autre pour aborder une question mathématique soit purement subjective et comme un résultat d'habitudes contingentes de l'esprit. Il se peut que, bien employées, ces méthodes se valent toutes [1] et qu'elles se heurtent aux mêmes difficultés, qui sont dans la nature des choses et qui sont seulement revêtues de formes verbales différentes. Parfois des modes d'exposition, qui semblent très divers, sont, au fond, identiques, ou plutôt se correspondent exactement, dans toutes leurs parties. Cela est manifeste dans certaines démonstrations géométriques et analytiques, qui se recouvrent entièrement, en employant un symbolisme différent, et dont l'identité même semble marquer la perfection définitive; de deux expositions dont l'une est plus simple, l'autre plus compliquée, l'une est sans doute imparfaite, et c'est quelquefois la première, dont la simplicité n'est qu'apparente, et dont on n'aperçoit pas les lacunes.

Dans une centaine de pages, M. Laisant passe en revue les diverses branches de la Mathématique pure, en les rangeant dans leur ordre de complexité croissante : cette revue est forcément un peu rapide, et, sans le talent de l'auteur, sans la verve qui l'anime, elle serait un peu sèche; mais il trouve le moyen de toucher à la plupart des points essentiels.

Pour le *nombre,* l'auteur emprunte à M. H. Laurent la définition suivante : « On appelle *nombre* une locution et un signe qui servent à désigner avec précision une quantité et toutes celles qui lui sont

[1] J'ai entendu M. Raffy développer ingénieusement ce paradoxe, qui me semble contenir une grande part de vérité.

égales, de manière à les distinguer nettement de toutes celles qui sont différentes ». Sans critiquer cette définition, ni marquer les termes qui, comme *quantité* et *égalité*, auraient grand besoin d'explication, je me demande si une définition générale du nombre est plus utile qu'une définition de la Mathématique, et si les définitions de ce genre ne sont pas de ces ingénieuses devises, fort difficiles à trouver et à comprendre, qui disent trop de choses en trop peu de mots. La vraie définition du nombre est la synthèse des définitions des diverses espèces de nombres, et, ce qui importe, c'est que ces définitions particulières soient claires. M. Laisant raconte qu'il a trouvé un mathématicien qui se demandait si $\sqrt{2}$ existe; il a raison de se moquer de ce mathématicien-là : il ne s'agit pas de savoir si $\sqrt{2}$ existe, il s'agit d'avoir une idée claire de $\sqrt{2}$, et ce n'est pas non plus en disant que $\sqrt{2}$ existe qu'on en a une idée claire.

M. Laisant emprunte à Auguste Comte la définition de l'Algèbre; c'est, d'après lui, le calcul des fonctions. Cette définition me semble beaucoup trop vaste. On l'a dit, il y a longtemps, l'objet propre de l'Algèbre, c'est le polynome, la fonction entière. La théorie des équations est l'étude des valeurs particulières des variables qui annulent le polynome, ou l'étude des fonctions inverses des fonctions entières. Au reste, M. Laisant ne s'est nullement trompé sur le caractère particulier des fonctions qu'étudie l'Algèbre, puisque, après avoir donné d'intéressantes indications sur l'objet du Calcul infinitésimal, il a consacré un Chapitre de son Livre à la théorie des fonctions définies par les équations différentielles, théorie à propos de laquelle il expose, d'après M. Painlevé, la conception moderne de l'intégration d'une équation différentielle.

A propos de la Géométrie, M. Laisant s'élève contre l'appareil suranné d'Euclide. On sait assez que les avis sont partagés; il reste encore beaucoup d'excellents géomètres qui admirent la perfection logique de cet appareil et qui estiment que son étude est une excellente discipline pour les commençants, et il est vrai que, dans les pays dont les écoles gémissent sous la tyrannie d'Euclide, on ne voit pas que la Géométrie moderne soit négligée. Tout en respectant des divisions consacrées, et qui ont l'avantage de bien se fixer dans la mémoire, il est cependant légitime de montrer le

lien qui fait une théorie d'un faisceau de théorèmes, et d'orienter la Géométrie dite *élémentaire* vers la science moderne, en y faisant pénétrer, comme le demande M. Laisant, l'idée de la transformation des figures; mais il me semble que cette orientation se produit toute seule et qu'elle se manifeste suffisamment dans les livres qui paraissent. Faut-il aller plus loin? Cela n'est pas défendu : je ne crois pas, par exemple, que les idées profondes développées par M. Klein dans son *Programme d'Erlangen*, soient inconnues dans notre pays et il se peut qu'elles aient eu sur l'enseignement de quelque modeste professeur une influence discrète.

Je me trouve avoir déjà parlé de quelques-unes des idées de M. Laisant sur la Mécanique rationnelle.

Ses observations sur les applications sont intéressantes : il distingue trois degrés dans tout problème de Philosophie naturelle : le passage du concret à l'abstrait, qui substitue à la réalité les êtres de raison des mathématiciens : c'est, en gros, la mise en équations ; puis, la résolution mathématique du problème ; enfin, le passage de l'abstrait au concret, qui comporte essentiellement, comme le fait remarquer l'auteur, une discussion approfondie de l'approximation sur laquelle on peut compter, des limites entre lesquelles sont comprises les erreurs de la solution, inévitables à cause des erreurs que comportent les données. On ne saurait répéter trop souvent, semble-t-il, que les Mathématiques ne peuvent transformer des données approchées qu'en résultats approchés, et qu'il convient de conformer l'exactitude des calculs à celle des données. M. Laisant passe rapidement en revue les principales applications du calcul, du dessin géométrique, de la Mécanique.

C'est avec une grande chaleur que M. Laisant parle de l'enseignement : on sent vraiment, dans cette partie de son Livre, le maître qui aime la Science : seulement, je ne puis m'empêcher de penser que bien des professeurs en le lisant, avec l'attention qu'il mérite, se diront plus d'une fois : « Mais on nous reproche de ne pas faire précisément ce que nous faisons, de ne pas introduire dans la Science les méthodes que nous enseignons ». Je suis persuadé que si M. Laisant était chargé d'une inspection générale, il ne changerait rien à ses idées, dont la plupart sont excellentes, mais qu'il modifierait la manière de les exprimer. Bien entendu, sur ses idées mêmes, j'aurais quelques réserves à indiquer, par

exemple sur l'utilité (très douteuse à mon sens) de l'introduction des imaginaires dans l'enseignement élémentaire, ou de la notation différentielle dans la classe de Mathématiques spéciales; si je crois, comme M. Laisant, qu'il est à la fois utile et commode d'introduire, comme on le fait de plus en plus, les éléments du calcul des vecteurs, je serais un peu plus sceptique à l'égard des quaternions; mais, pour ce qui est des quaternions, un peu de partialité lui est sans doute permise. Il me semble aussi que l'amusante sortie à laquelle il se livre contre la Trigonométrie n'est pas bien justifiée : ce que l'on enseigne sous ce nom, c'est, d'une part, un Chapitre de l'application de l'Algèbre à la Géométrie, et dans ce Chapitre la théorie des projections a sa place marquée, d'autre part, les principes de la théorie des fonctions circulaires. C'est, à coup sûr, deux des plus beaux Chapitres de la Science élémentaire, et s'ils fournissent l'occasion d'applications numériques, il ne faut pas s'en plaindre. Quoi qu'il en soit, j'espère que les lecteurs de M. Laisant ne prendront pas pour de la mauvaise humeur ce qui, sans doute, n'est que de la verve.

Assurément, notre enseignement mathématique est loin d'être parfait et je souhaite que le livre de M. Laisant contribue à l'améliorer; l'auteur a raison quand il se plaint de la façon dont on néglige le calcul numérique, des classes trop rares et surtout trop espacées; ce sont des défauts qu'il n'est pas impossible de corriger; dans les parties élevées, c'est surtout de la préparation hâtive aux concours que vient le mal et, malheureusement, je ne connais, pas plus que M. Laisant, de remède à ce mal nécessaire.

J. T.

MÉLANGES.

NOTE SUR LE PENDULE SPHÉRIQUE;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Quand un pendule sphérique va de l'un des sommets de sa trajectoire au sommet suivant, son azimut varie d'un angle Ψ compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π; la limite inférieure a été donnée par V. Puiseux, l'autre par Halphen. Dans une Note, insérée au *Bulletin des Sciences mathématiques* en mai 1896, j'ai montré que la limite supérieure s'obtient aisément à l'aide du théorème de Cauchy : l'analyse serait utilement complétée si l'on en déduisait aussi la limite inférieure de Ψ.

Or, dans la Note citée, je trouve la relation

$$\Psi = \pi - \int^{c} \frac{l\,dz\sqrt{(l^2-a^2)(l^2-b^2)}}{z(l^2-z^2)\sqrt{(a-b)(a-z)(z-b)(z-c)}};$$

l désigne la longueur du pendule, a, b ses cotes maxima et minima au-dessous du point de suspension, c la quantité $-\frac{l^2+ab}{a+b}$.

Tous les éléments de l'intégrale étant négatifs, Ψ est $< \pi$; pour prouver qu'il est $> \frac{\pi}{2}$, il suffira de montrer que la valeur absolue S de l'intégrale est $< \frac{\pi}{2}$. Remplaçant z par $\frac{c}{\sin\varphi}$, puis c par $-k$, k étant $> l$, je trouve

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l\cos\varphi\,d\varphi\sqrt{k(l^2-a^2)(l^2-b^2)\sin^3\varphi}}{(k^2-l^2\sin^2\varphi)\sqrt{(a-b)(k+a\sin\varphi)(k-b\sin\varphi)(1-\sin\varphi)}}.$$

Sous le radical en dénominateur, figure le produit

$$(k+a\sin\varphi)(k-b\sin\varphi) = k^2 - ab\sin^2\varphi + k(a-b)\sin\varphi;$$

si j'y remplace k^2 par la quantité plus petite $l^2\sin^2\varphi$, S sera remplacée par une intégrale $S_1 > S$; en tenant compte des relations

$$l^2 + ab = k(a+b), \qquad (l^2-a^2)(l^2-b^2) = (a+b)^2(k^2-l^2)$$

on trouve, après de simples réductions,

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l\sqrt{k^2 - l^2}\sin\varphi\, d\varphi}{k^2 - l^2\sin^2\varphi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l\sqrt{k^2 - l^2}\sin\varphi\, d\varphi}{k^2 - l^2 - l^2\cos^2\varphi} = \text{arc tang}\,\frac{l}{\sqrt{k^2 - l^2}},$$

l'arc tangente étant dans le premier quadrant. Donc S_1 et, *a fortiori*, S sont $< \frac{\pi}{2}$, $\Psi > \frac{\pi}{2}$: on voit même que Ψ est plus grand que l'arc du second quadrant dont le sinus est $\frac{l}{k}$. En diminuant S, on aurait des limites supérieures de Ψ.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WHITEHEAD (A.). — A Treatise on Universal Algebra with Applications. Tome I; Gr. in-8°; xxvi-586 p. Cambridge, University Press, 1898.

L'*Algèbre universelle,* telle que l'entend l'auteur, est un ensemble de raisonnements et de calculs fondés essentiellement sur les idées d'addition et de multiplication. Le développement abstrait de ces théories est légitime en soi, indépendamment des interprétations et des applications, pourvu que ce développement soit cohérent et que les définitions ne comportent aucune contradiction interne; mais l'auteur pense avec raison que, tout en présentant d'abord les choses sous forme abstraite, de facon qu'aucun doute ne subsiste sur l'indépendance entre les développements des théories et leur interprétation, il convient de ne pas éloigner l'interprétation de la théorie; cette théorie, toute seule, bien qu'on soit assuré de sa légitimité, semble un jeu, qui fatigue vite l'esprit, à cause du vide des symboles. Dans les interprétations, qui sont déjà fort abstraites, il subsiste quelque place solide pour l'intuition, où l'on peut se reposer, et s'assurer contre le vertige. Le mode d'exposition adopté par M. Whitehead semble bien le meilleur possible.

Considérons un ensemble d'*objets* (*Manifold*), déterminé, si l'on veut, par quelque caractère commun à ces objets. Supposons qu'à chaque couple a, a' d'objets de cet ensemble, on fasse correspondre un objet (a, a') du même ensemble, qui, ainsi, pourra être regardé comme la réunion des deux objets a, a'. Chaque mode de correspondance définira une opération effectuée sur un couple d'objets, et cette opération méritera le nom d'addition, si elle est commutative et associative, c'est-à-dire si l'objet (a, a') de l'ensemble qu'on fait correspondre aux objets a, a' de l'ensemble, rangés dans l'ordre même que l'on vient d'écrire, est le même que l'objet (a, a') que l'on fait correspondre aux deux objets a', a et si l'objet $[a, (a', a'')]$ que l'on fait correspondre aux deux objets a, (a', a'') est le même que l'objet $[(a, a'), a'']$ que l'on fait correspondre aux deux objets (a, a'), a''. Pour une addition, au lieu

du symbole (a, a') on emploiera le symbole $a + a'$. S'il y a dans l'ensemble un objet spécial qui, combiné par addition avec n'importe quel objet de l'ensemble reproduise ce dernier objet, cet objet spécial s'appellera l'*objet nul* et se représentera par o. De la définition de l'addition, résulte celle de la soustraction qui, bien entendu, n'est pas toujours une opération possible. Un ensemble où l'addition est définie est dit *algébrique*.

La définition de l'addition concerne ainsi les objets d'un même ensemble. La définition de la multiplication concernera les objets de deux ensembles algébriques A, B qui toutefois peuvent être identiques. Nous représenterons par a, a', a'', ... les objets du premier ensemble, par b, b', b'', ... les objets du second ensemble. Imaginons que l'on puisse former un troisième ensemble C, aussi algébrique, dans le sens que l'on vient de dire et dont chaque élément correspondra à un couple d'éléments pris l'un dans l'ensemble A, l'autre dans l'ensemble B, ou à un couple d'éléments pris l'un dans l'ensemble B, l'autre dans l'ensemble A, en sorte que chaque objet de C puisse être regardé comme étant de l'une ou de l'autre des deux formes (a, b), (b, a), en désignant par a, b les objets des ensembles A, B que l'on associe, et que à chaque association (a, b) ou (b, a) de tels objets corresponde un objet déterminé de C. Cette opération qui, avec un objet de A et un objet de B, crée un objet de C, méritera le nom de multiplication, si elle est distributive, c'est-à-dire si l'on a

$$(a, b + b') = (a, b) + (a, b'),$$
$$(a + a', b) = (a, b) + (a', b),$$
$$(b, a + a') = (b, a) + (b, a'),$$
$$(b + b', a) = (b, a) + (b', a).$$

Les trois ensembles A, B, C étant supposés algébriques, le signe + a, dans ces égalités, une signification définie. La définition générale de la multiplication ne suppose ni la loi associative, ni la loi commutative. La multiplication se représentera par le signe $\times$ placé entre les deux éléments que l'on associe ou par la simple juxtaposition de ces éléments.

Si la multiplication peut être définie pour un seul ensemble A, c'est-à-dire si la définition précédente s'applique en regardant comme identiques les deux ensembles A, B, l'ensemble A sera dit

du premier ordre; par la multiplication des objets qui le constitue, pris deux à deux, il engendrera un ensemble A_1 (l'ensemble C de la définition générale), qui sera dit *du second ordre*. Si la multiplication peut être définie pour les deux ensembles algébriques A, A_1, on définira par là même un ensemble A_2 qui sera dit *du troisième ordre,* etc. On peut supposer que l'on continue ainsi, chacun des ensembles A, A_1, A_2, ... étant susceptible de multiplication tant avec lui-même qu'avec ceux qui le précèdent : l'ensemble complet du $m^{\text{ième}}$ ordre contiendra tous les objets obtenus en multipliant un objet d'un ensemble quelconque du $p^{\text{ième}}$ ordre par un objet d'un ensemble d'ordre $m - p$. Il peut d'ailleurs arriver que l'ensemble d'ordre m soit identique à l'ensemble du premier ordre; l'ensemble d'ordre $m + 1$ est alors identique à l'ensemble du second ordre, etc.; l'Algèbre est dite alors de l'espèce $m - 1$; l'Algèbre de première espèce est dite aussi Algèbre linéaire.

C'est là les définitions générales que l'*Algèbre universelle* devra mettre en œuvre : en les particularisant, on créera les Algèbres spéciales.

Il est clair que la multiplication sera beaucoup plus riche que l'addition en variétés de formes.

Pour l'addition, une variété importante est le cas bien familier où, la soustraction étant toujours possible et univoque, les objets de l'ensemble forment, au sens précis du mot, un *groupe* pour la composition par addition : telle est l'addition algébrique des nombres ordinaires, ou l'addition géométrique des vecteurs.

Une variété qui s'éloigne beaucoup de celle-là, est la variété où l'on fait l'hypothèse formulée par l'égalité

$$a + a = a,$$

a étant un objet quelconque de l'ensemble. En d'autres termes, si l'on se reporte aux définitions précédentes, à chaque couple formé par la répétition d'un même objet du groupe on fait correspondre ce même objet. Cette hypothèse caractérise le seul mode d'addition qui soit essentiellement différent de l'addition ordinaire; elle est à la base de la *logique symbolique,* dont l'exposition est condensée dans le Livre II de l'Ouvrage de M. Whitehead.

L'Algèbre de la logique symbolique concerne un ensemble

algébrique et linéaire au sens que l'on a spécifié plus haut, dont les objets $a, b, c, \ldots$ obéissent, pour ce qui est de l'addition et de la multiplication aux lois formelles que voici :

$$(1) \qquad a + b = b + a,$$

$$(2) \qquad a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c),$$

$$(3) \qquad a + a = a,$$

$$(4) \qquad a + 0 = a,$$

$$(5) \qquad c(a + b) = ca + cb,$$

$$(6) \qquad (a + b)c = ac + bc,$$

$$(7) \qquad ab = ba,$$

$$(8) \qquad abc = (ab)c = a(bc),$$

$$(9) \qquad aa = a,$$

$$(10) \qquad a + ab = a,$$

$$(11) \qquad ai = a.$$

Les lois (1), (2), (5), (6) ne sont autres que les lois générales de l'addition et de la multiplication. La loi (4) exprime qu'il y a dans l'ensemble un objet nul; la loi (3) est ce caractère spécial de l'addition dont j'ai déjà parlé, caractère qui est contenu comme cas particulier dans la loi (10), connue sous le nom de *loi d'absorption :* les lois (7), (8), (9) n'ont pas besoin d'explication; la loi (11) enfin se rapporte à un objet i de l'ensemble dit *universel;* si l'on réunit, par multiplication, cet objet à un objet quelconque de l'ensemble, on reproduit ce dernier objet. Notons encore l'hypothèse suivante : à chaque objet a de l'ensemble correspond un objet *supplémentaire* b : deux objets a, b sont dits *supplémentaires* si l'on a à la fois

$$a + b = i, \qquad ab = 0.$$

Quant aux propriétés qui expriment les égalités

$$x0 = 0 = 0x,$$
$$x + i = i = i + x,$$

elles sont des conséquences des lois supposées.

Comme conséquence immédiate de ces lois formelles, le lecteur observera la parfaite réciprocité de l'addition et de la multiplication : toute propriété concernant l'addition et la multiplication peut être aussi bien envisagée comme concernant la multiplica-

tion. Cette réciprocité a été remarquée indépendamment par M. Peirce et par M. Schröder. On conçoit que sur ces lois on puisse établir tout un calcul, le calcul de la *logique symbolique* fondé par Boole (*Laws of Thougt,* 1854), développé par Venn (*Symbolic logic*, 1881, 1894), Jevons (*Pure logic,* 1864), Peirce (*Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences,* VII, 1867, *American Journal of Mathematics,* III et VII), Schröder (*Operationskreis des Logikcalcüls,* 1877, *Vorlesungen über die Algebra der Logik,* t. I, 1890, t. II, 1891, t. III, 1895), Miss Love et Dr Mitchell (*Studies in Deductive Logic,* 1883), W. Johnson (*The Logical calculus,* dans le *Mind,* 1892), Mc Coll (*Proceedings of the London Mathematical Society,* IX, X, XI, XIII), etc. On trouvera l'intéressant développement de ce calcul dans le Livre de M. Whitehead; je ne veux que dire un mot d'une des interprétations qu'il comporte.

Appelons *région* une portion continue de l'espace, ou la réunion de plusieurs de ces portions. L'ensemble que nous considérerons sera formé de toutes les régions possibles. La somme de deux régions sera la région formée par la réunion des portions d'espace qui les constituent. Si les deux régions que l'on ajoute sont identiques, il est clair que l'addition reproduit l'une de ces régions. Le produit de deux régions sera la partie commune à ces deux régions, leur intersection. La région o, c'est l'absence de toute région. Le produit de deux régions qui n'ont pas de partie commune est o. La région universelle est l'espace tout entier. Si l'on ajoute à une région a la région commune à cette région et à une région b, on ne fait que reproduire la région a, c'est la loi d'absorption (10). La région supplémentaire d'une région donnée est l'espace extérieur à cette région. Toutes les lois et hypothèses formelles qui ont été introduites plus haut, et toutes leurs conséquences, s'interprètent donc avec la plus grande facilité.

Il y a d'ailleurs longtemps qu'Euler a identifié la théorie du syllogisme avec la théorie géométrique du contenant et du contenu; on conçoit donc une interprétation des lois et hypothèses du calcul qui nous occupe dans le domaine de la logique déductive.

Passant ensuite aux théories dont Grassmann est le fondateur et dont les développements essentiels se trouvent dans les deux édi-

tions de l'*Ausdehnungslehre*. M. Whitehead traite des ensembles de situation (*positional manifolds*). Voici comment est constitué un tel ensemble (I) : considérons, d'une part, ν objets $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ que l'on désignera sous le nom d'*unités fondamentales* et, d'autre part, l'ensemble des nombres ordinaires (réels ou imaginaires), qui seront désignés systématiquement par des lettres grecques : un objet de l'ensemble (I) s'obtiendra en associant à chacun des objets e_ρ un nombre α_ρ et se représentera par

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu;$$

l'association d'un élément α_ρ à l'objet e_ρ doit d'ailleurs être regardée comme une multiplication, jouissant par conséquent de la propriété distributive, et le signe $+$ a, dans le précédent symbole, les propriétés exposées dans la définition de l'addition. Si α_ρ est nul, le symbole $\alpha_\rho e_\rho$ disparaît de l'expression précédente si α_ρ est le nombre 1, $\alpha_\rho e_\rho$ peut être remplacé par e_ρ, en sorte que les objets $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ sont eux-mêmes des objets de l'ensemble. L'objet

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu$$

peut d'ailleurs être multiplié par un nombre λ; il devient alors l'objet

$$\lambda\alpha_1 e_1 + \lambda\alpha_2 e_2 + \ldots + \lambda\alpha_\nu e_\nu.$$

On admet que ces deux objets correspondent au même *élément*, au même point de l'espace à $\nu - 1$ dimensions, si l'on veut. Ce sont deux objets congruents, mais *d'intensité* différente. Deux objets de l'ensemble peuvent d'ailleurs être ajoutés, en ajoutant les coefficients numériques des e; un objet de l'ensemble s'appelle d'après M. Cayley un *extraordinaire* et se représente par une lettre italique, les lettres grecques, encore une fois, étant réservées aux purs nombres. ρ extraordinaires, $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ seront dits *dépendants* ou *indépendants* suivant qu'on pourra ou qu'on ne pourra pas trouver n nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\rho$ tels que l'on ait

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_\rho x_\rho = 0;$$

il faut entendre par là que le premier membre, ordonné par rapport à $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, a tous ses coefficients numériques nuls. De là une théorie qui reproduit mot pour mot la théorie des formes linéaires,

et sur laquelle il est inutile d'insister. Si $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ désignent ν extraordinaires indépendants, l'ensemble de tous les éléments

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\nu x_\nu$$

constitue la *région complète* définie par ces extraordinaires; elle est la même que la région complète définie par $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$. C'est une région à $\nu - 1$ dimensions; si les extraordinaires indépendants $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ sont en nombre $\rho < \nu$, ils définissent une sous-région à $\rho - 1$ dimensions, constituée par les éléments

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_\rho x_\rho,$$

contenue dans la région complète; par exemple, si l'on ne considère que deux extraordinaires indépendants x_1, x_2, ils définiront une *droite* joignant les deux éléments x_1, x_2 et constituée par les éléments $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$.

En supposant que $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ désignent ν extraordinaires indépendants, l'ensemble des extraordinaires $\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_\nu x_\nu$ dont les coefficients numériques $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ sont liés par une ou plusieurs équations homogènes constitue un lieu. S'il n'y a qu'une seule équation, le lieu est une surface. L'auteur étudie, en particulier, les surfaces du second degré au point de vue des sous-régions qu'elles contiennent; c'est la généralisation des génératrices rectilignes des quadriques.

On n'a défini jusqu'ici l'*intensité* que comme une sorte de qualité numérique qui distingue deux objets

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu, \quad \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu$$

de l'ensemble défini par les unités fondamentales $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, dans lesquels les coefficients $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\nu$ sont proportionnels aux coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, c'est-à-dire deux objets qui correspondent au même élément, au même point. Il convient tout d'abord de regarder les unités fondamentales $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$ comme étant d'intensité 1, puis l'objet $\alpha_i e_i$ comme étant d'intensité α_i, enfin l'intensité d'un objet $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_\nu e_\nu$ comme étant une fonction homogène du premier degré de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$. L'auteur se borne au cas où cette fonction est la racine $\mu^{\text{ième}}$ d'un polynome du $\mu^{\text{ième}}$ degré en $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, polynome dans lequel les coefficients des puissances $\mu^{\text{ièmes}}$ sont l'unité et dans lequel

tous les autres coefficients sont égaux. Les cas $\mu = 1$, $\mu = 2$ offrent un intérêt particulier. La considération du lieu des éléments d'intensité nulle s'impose d'une façon nécessaire et se relie à la considération des éléments à l'infini.

Arrivons maintenant à la multiplication de deux objets $\sum \alpha_\rho e_\rho$, $\sum \beta_\rho e_\rho$ ($\rho = 1, 2, \ldots, \nu$) d'un même ensemble (I), du premier ordre. A chaque couple (e_ρ, e_σ) d'unités fondamentales, faisons correspondre un objet d'une seconde espèce que nous désignerons par $(e_\rho e_\sigma)$ et que nous regarderons comme le produit de e_ρ par e_σ; le produit de l'objet $\alpha_\rho e_\rho$ par l'objet $\alpha_\sigma e_\sigma$ sera, par définition, $\alpha_\rho \alpha_\sigma (e_\rho e_\sigma)$, c'est-à-dire l'objet de la seconde espèce $(e_\rho e_\sigma)$ affecté du coefficient numérique obtenu en multipliant les deux coefficients numériques α_ρ, α_σ; dès lors, en vertu de la distributivité, le produit $\sum \alpha_\rho e_\rho$ par $\sum \beta_\rho e_\rho$ devra être $\sum_{\rho,\sigma} \alpha_\rho \beta_\sigma (e_\rho e_\sigma)$. Les ν^2 objets de la seconde espèce $(e_\rho e_\sigma)$, s'ils étaient indépendants, pourraient être regardés comme définissant un ensemble de situation de la dimension $\nu^2 - 1$. Le produit de $\sum \alpha_\rho e_\rho$ par $\sum \beta_\rho e_\rho$ serait alors un objet de cet ensemble, non d'ailleurs un objet quelconque, puisque les ν^2 nombres $\alpha_\rho \beta_\sigma$, qui ne dépendent que de 2ν nombres, ne peuvent pas être identifiés à ν^2 nombres quelconques. On est d'ailleurs libre de ne pas regarder les objets de la seconde espèce $(e_\rho e_\sigma)$ comme indépendants, c'est-à-dire de poser entre eux des relations linéaires. Le cas vraiment intéressant est celui où ces relations sont *invariantes :* supposons que, au lieu des unités fondamentales $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, on se serve, pour définir un objet de l'ensemble (I), de ν extraordinaires indépendants $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$; les deux objets à multiplier seront de la forme $\sum \alpha'_\rho x_\rho$, $\sum \beta'_\rho x_\rho$ et leur produit de la forme $\sum_{\rho,\sigma} \alpha'_\rho \beta'_\sigma x_\rho x_\sigma$; les $x_\rho x_\sigma$ s'expriment d'ailleurs linéairement au moyen des $(e_\rho e_\sigma)$, et toute relation linéaire entre ces dernières quantités entraîne une relation linéaire entre les premières; les relations linéaires entre les $(e_\rho e_\sigma)$ seront dites *invariantes* si les relations qu'elles impliquent entre les $x_\rho x_\sigma$ s'obtiennent simplement en remplaçant les x par les e. On dé-

montre aisément que les seules relations possibles qui aient ce caractère sont du type

$$(e_\rho e_\rho) = 0, \qquad (e_\rho e_\sigma) - (e_\sigma e_\rho) = 0$$

ou du type

$$(e_\rho e_\sigma) = (e_\sigma e_\rho);$$

le premier type de relations donne naissance à la *multiplication combinatoire progressive,* définie par ces relations mêmes et par la relation d'associativité

$$(e_1 e_2 \ldots e_\rho)(e_{\rho+1} e_{\rho+2} \ldots e_\sigma) = (e_1 e_2 \ldots e_\rho e_{\rho+1} \ldots e_\sigma),$$

qui permet de définir le produit d'un nombre quelconque d'objets de l'ensemble du premier ordre. Si l'on considère μ de ces objets définis par les μ expressions

$$\sum_{\rho=1}^{\rho=\nu} \alpha_{\rho\sigma} e_\rho \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, \mu),$$

leur produit

$$\left(\sum \alpha_{\rho 1} e_\rho\right)\left(\sum \alpha_{\rho 2} e_\rho\right) \ldots \left(\sum \alpha_{\rho\mu} e_\rho\right)$$

sera, en vertu des hypothèses précédentes, de la forme

$$\sum |\alpha_{\rho\sigma}| (e_{\rho_1} e_{\rho_2} \ldots e_{\rho_\mu}),$$

où $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_\mu$ est une combinaison des nombres $1, 2, \ldots, \nu$ pris μ à μ et où $|\alpha_{\rho\sigma}|$ est un déterminant d'ordre μ où l'indice ρ doit prendre les valeurs $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ et l'indice σ les valeurs $1, 2, \ldots, \mu$. Si deux des nombres $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\mu$ sont égaux, le produit $(e_{\rho_1} e_{\rho_2} \ldots e_{\rho_\mu})$ est nul; il en serait de même, d'ailleurs, du déterminant correspondant; si donc on a $\mu > \nu$, le produit est toujours nul; si l'on a $\mu < \nu$, il y aura

$$\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{1.2\ldots\mu}$$

combinaisons distinctes $(e_{\rho_1} e_{\rho_2} \ldots e_{\rho_\mu})$ dans lesquelles on supposera $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_\mu$. Tous les produits $(e_{\rho_1} e_{\rho_2} \ldots e_{\rho_\mu})$ obtenus de cette manière sont indépendants : en désignant, pour abréger, ces produits par les symboles E_μ, E'_μ, ..., on voit qu'ils définissent

un ensemble dont les objets pourront être représentés par

$$\alpha E_\mu + \alpha' E'_\mu + \ldots;$$

cet ensemble est dit *dérivé du* $\mu^{\text{ième}}$ *ordre :* il est à

$$\frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-\mu+1)}{1.2\ldots\mu} - 1$$

dimensions; le produit des μ objets de l'ensemble (I) du premier ordre sera nul ou non suivant que ces objets ne seront pas indépendants. Ce produit est un objet de l'ensemble dérivé du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, mais non d'ailleurs un objet quelconque de cet ensemble. Le caractère invariant des relations fondamentales permet aisément d'étendre ces résultats au cas où les objets de l'ensemble (I) que l'on multiplie entre eux sont donnés sous la forme $\sum \xi_\rho x_\rho$ en désignant par $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, ν extraordinaires indépendants, au lieu d'être exprimés au moyen des unités fondamentales $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$.

Considérons, en particulier, μ extraordinaires indépendants a_1, $a_2, \ldots, a_\mu$ $(\mu < \nu)$, la sous-région qu'ils définissent et μ objets de l'ensemble (I) appartenant à cette sous-région; ils auront des expressions telles que

$$\begin{aligned}
a'_1 &= \lambda_{11} a_1 + \lambda_{12} a_2 + \ldots + \lambda_{1\mu} a_\mu, \\
a'_2 &= \lambda_{21} a_1 + \lambda_{22} a_2 + \ldots + \lambda_{2\mu} a_\mu, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a'_\mu &= \lambda_{\mu 1} a_1 + \lambda_{\mu 2} a_2 + \ldots + \lambda_{\mu\mu} a_\mu,
\end{aligned}$$

et leur produit $(a'_1 a'_2 \ldots a'_\mu)$ sera égal au produit $(a_1 a_2 \ldots a_\mu)$ multiplié par un facteur numérique égal au déterminant

$$|\lambda_{\rho\sigma}| \qquad \begin{pmatrix} \rho = 1, 2, \ldots, \mu \\ \sigma = 1, 2, \ldots, \mu \end{pmatrix};$$

les deux produits $(a'_1 a'_2 \ldots a'_\mu)$ et $(a_1 a_2 \ldots a_\mu)$ représentent donc le même *élément* de l'ensemble dérivé du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, mais non, en général, le même *objet,* puisque les intensités sont différentes, quand le déterminant $|\lambda_{\rho\sigma}|$ n'est pas égal à 1. Quoi qu'il en soit, si un objet de l'ensemble dérivé du $\mu^{\text{ième}}$ ordre peut être regardé comme le produit de μ objets indépendants de l'ensemble (I), il

peut aussi bien, d'après ce que l'on vient de dire, être regardé à un facteur numérique près, comme le produit de μ autres objets indépendants quelconques appartenant à la sous-région définie par les μ premiers objets, en sorte que rien n'empêche de l'identifier avec cette sous-région, que l'on doit toutefois, en tant qu'on la regarde comme un produit d'objets de l'ensemble (I) du premier ordre, ou comme un objet de l'ensemble du $\mu^{\text{ième}}$ ordre, regarder comme ayant une intensité, comme affectée d'un coefficient numérique. Une sous-région ainsi considérée comme un produit sera un objet régional, d'ordre μ : c'est un objet *simple* de l'ensemble dérivé du $\mu^{\text{ième}}$ ordre. Les objets de ce dernier ensemble qui ne sont pas simples sont *composés* avec des objets simples. Deux objets régionaux peuvent être multipliés : leur produit définit une sous-région qui contient les deux sous-régions définies par les deux facteurs. Si A et B sont deux objets régionaux d'ordres respectifs ρ, σ ($\rho > \sigma$) et si la sous-région A contient la sous-région B, il existe un objet régional C, d'ordre $\rho - \sigma$, tel que l'on ait $A = (BC)$. Le produit de plusieurs objets régionaux est nul s'ils ont un objet régional commun ; c'est ce qui arrivera forcément si la somme de leurs ordres est supérieur à ν. Si cette somme est égale à un, le produit sera égal à $(e_1 e_2 \ldots e_\nu)$ multiplié par un nombre ordinaire. Il est commode de regarder un tel produit comme purement numérique, en convenant de regarder $(e_1 e_2 \ldots e_\nu)$ comme étant égal à un.

La multiplication combinatoire définie comme ci-dessus est dite *progressive,* et les produits qu'elle engendre sont dits *progressifs*. Le produit progressif de deux objets S_ρ, S_σ dont les ordres ρ, σ ont une somme supérieure à ν étant nul, on peut convenir de ne le faire jamais figurer dans une équation, et alors il devient loisible d'adopter pour un tel produit telle autre définition que l'on voudra. On va définir la multiplication *régressive,* à laquelle conduit la notion importante de *supplément*. Jusqu'à ce que cette définition soit donnée, et tant qu'on ne préviendra pas du contraire, les produits dont il sera question seront progressifs.

Considérons une *combinaison multiplicative* E_μ obtenue en multipliant μ unités $e_1, e_2, \ldots, e_\mu$ des ν unités fondamentales e_1, $e_2, \ldots, e_\nu$, il existera une combinaison multiplicative supplémentaire $E_{\nu-\mu}$ formée avec les éléments $e_{\nu+1}, e_{\nu+2}, \ldots, e_\mu$ qui ne

figurent pas dans E_μ, en sorte que l'on aura

$$(E_\mu E_{\nu-\mu}) = (e_1 e_2 \ldots e_\nu) = \pm 1,$$

en adoptant la convention spécifiée plus haut. Le supplément de E_μ ne sera autre chose que $E_{\nu-\mu}$, en supposant les facteurs de $E_{\nu-\mu}$ rangés dans un ordre tel que le produit $(E_\mu E_{\nu-\mu})$ soit $+1$. Le supplément d'un objet s'indique en plaçant un trait vertical $|$ devant le symbole de cet objet : ainsi $|E_\mu$ est le supplément de E_μ, et, d'après la convention précédente, on peut écrire

$$|E_\mu = (E_\mu E_{\nu-\mu}) E_{\nu-\mu},$$

en regardant le produit $(E_\mu E_{\nu-\mu})$ comme un simple nombre (± 1). Le supplément d'un nombre est ce nombre lui-même. En désignant par E_μ, E'_μ, E''_μ, ... des combinaisons multiplicatives toujours formées avec μ des unités $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, on aura par définition

$$|(\alpha E_\mu + \alpha' E'_\mu + \alpha'' E''_\mu + \ldots) = \alpha\,|E_\mu + \alpha'\,|E'_\mu + \alpha''\,|E''_\mu + \ldots.$$

Dès lors, le supplément d'un objet quelconque A_μ de l'ensemble dérivé du $\mu^{\text{ième}}$ ordre est défini. En prenant le supplément du supplément d'un objet, on reproduit cet objet, au signe près : d'une façon précise, on a

$$|A_\mu = (-1)^{\mu(\nu-\mu)} A_\mu.$$

Si maintenant l'on considère deux objets A_ρ, A_σ dont les ordres respectifs ρ et σ ont une somme supérieure à ν, le produit *régressif* $A_\rho A_\sigma$ sera par définition l'objet d'ordre $\rho + \sigma - \nu$ dont le supplément est le produit (progressif) des suppléments $|A_\rho$, $|A_\sigma$ des objets A_ρ, A_σ. Ces suppléments ayant respectivement les ordres $\nu - \rho$, $\nu - \sigma$ ont bien un produit progressif puisque l'on a $(\nu - \rho) + (\nu - \sigma) \leqq \nu$. On peut donc écrire symboliquement

$$A_\rho A_\sigma = |(|A_\rho\,|A_\sigma)$$

en désignant par $A_\rho A_\sigma$ le produit régressif des objets A_ρ, A_σ. Il suit de là que tandis qu'un produit progressif $A_\rho A_\sigma$ $(\rho + \sigma \leqq \nu)$ représente la sous-région qui comprend les sous-régions A_ρ, A_σ, un produit régressif $A_\rho A_\rho$ $(\rho + \sigma > \nu)$ représente la sous-région

commune aux deux sous-régions A_ρ, A_σ. Lorsque $\rho - \sigma$ est égal à ν les définitions des produits progressifs et régressifs concordent.

Si l'on a alors

$$A_\rho = \alpha_\rho E_\rho + \alpha'_\rho E'_\rho + \ldots,$$
$$A_\sigma = \alpha_\sigma | E_\rho + \alpha'_\sigma | E'_\rho + \ldots,$$

on aura pour l'un ou l'autre produit le nombre

$$\alpha_\rho \alpha_\sigma + \alpha'_\rho \alpha'_\sigma + \ldots.$$

Observons encore que l'égalité

$$A_\rho A_\sigma = A_\rho | A_\sigma$$

subsiste, soit que le produit $A_\rho A_\sigma$ soit régressif, soit qu'il soit progressif; dans le second cas, c'est le deuxième membre qui est un produit régressif.

On est amené maintenant à distinguer les produits *purs* et les produits *mixtes*. Un produit est pur quand toutes les multiplications qui y sont indiquées sont toutes progressives, ou toutes régressives; dans le premier cas il est purement progressif, dans le second purement régressif. Autrement il est mixte. Ainsi le produit AB.CD, où l'on doit entendre qu'on fait le produit de A par B, le produit de C par D et que l'on multiplie le premier produit par le second, sera un produit purement régressif si le produit AB est régressif ainsi que le produit CD et que le produit de AB par CD. La multiplication pure est associative, non la multiplication mixte.

Le calcul des produits progressifs s'effectue au moyen d'une proposition connue sous le nom de *règle (généralisée) du facteur moyen,* et que voici : Soient A_ρ, B_σ deux objets régionaux des ordres ρ, σ; on suppose $\rho + \sigma = \nu + \gamma$, γ étant plus petit que ν. A_ρ est, par hypothèse, le produit de ρ facteurs de l'ensemble (I) du premier ordre. Désignons par $C_\gamma^{(1)}$, $C_\gamma^{(2)}$, ... les différents produits formés en prenant γ des facteurs qui forment A_ρ, on peut écrire

$$A_\sigma = A_{\rho-\gamma}^{(1)} C_\gamma^{(1)} = A_{\rho-\gamma}^{(2)} C_\gamma^{(2)} = \ldots.$$

en désignant par $A_{\rho-\gamma}^{(1)}$, $A_{\rho-\gamma}^{(2)}$, ... des produits de $\rho - \gamma$ facteurs

du premier ordre ; on aura

$$A_\rho B_\sigma = (A^{(1)}_{\rho-\gamma} B_\sigma) C^{(1)}_\gamma + (A^{(2)}_{\rho-\gamma} B_\sigma) C^{(2)}_\gamma + \ldots,$$

où, dans le second membre, les produits $(A^{(1)}_{\rho-\gamma} B_\sigma)$, ... sont purement numériques. De même, si l'on désigne par $D^{(1)}_\gamma$, $D^{(2)}_\gamma$, ... les différents produits formés avec γ facteurs du premier ordre qui figurent dans B_σ on pourra écrire

$$B_\sigma = D^{(1)}_\gamma B^{(1)}_{\sigma-\gamma} + D^{(2)}_\gamma B^{(2)}_{\sigma-\gamma} + \ldots,$$

et l'on aura

$$A_\rho B_\sigma = (A_\rho B^{(1)}_{\sigma-\gamma}) D^{(1)}_\gamma + (A_\rho B^{(2)}_{\sigma-\gamma}) D^{(2)}_\gamma + \ldots.$$

Par exemple, dans le cas où ν est égal à 3, on aura

$$pq.rs = (prs)q - (qrs)p = (pqs)r - (pqr)s.$$

M. Whitehead développe diverses autres propriétés de ces produits, entre autres un théorème important dû à M. E. Müller (*Mathematische Annalen,* 1897). Outre les produits progressifs et régressifs qui constituent les *produits extérieurs,* il y a encore lieu de considérer ce que Grassmann a appelé les *produits intérieurs.* Ce sont les produits formés au moyen de deux objets P, Q en multipliant l'un par le supplément de l'autre. Ce mode de multiplication donne encore lieu à des règles simples. Enfin, signalons le lien étroit qu'il y a entre la théorie des régions supplémentaires et la théorie des polaires réciproques, étendue à un espace à $\nu - 1$ dimensions.

Telles sont, rapidement esquissées, les idées fondamentales (dues presque toutes à Grassmann) qui seront le lien des nombreuses applications que va maintenant parcourir M. Whitehead. Les premières concernent ce qu'il appelle la *Géométrie descriptive :* l'épithète *descriptive* ne doit pas être entendue dans le sens restreint auquel nous sommes habitués depuis Monge, mais dans son sens général ; il s'agit, dans le Chapitre auquel l'auteur a donné ce titre, de la description de constructions géométriques, planes pour le plus grand nombre.

Ainsi l'égalité

$$(sbc)(sea)(sfb) = (sdb)(sec)(sfa)$$

exprime cette propriété des deux triangles *abc*, *def* que si les

droites sd, se, sf coupent respectivement les trois côtés bc, ca, ab en trois points situés en ligne droite, les trois droites sa, sb, sc couperont en trois points situés en ligne droite les côtés ef, fd, de du second triangle. Une importante application concerne la *Construction de von Staudt,* qui joue un rôle essentiel dans l'exposition de la Géométrie projective et dont l'objet est de montrer, étant donnés trois points a, b, c d'un plan, non en ligne droite, et deux points d, e situés respectivement sur les droites ac, bc, que tout point de ac peut être obtenu par la multiplication des points considérés, ou, en d'autres termes, être construit par des opérations qui consistent à joindre les points donnés par des droites, à prendre les intersections de droites ainsi menées, à joindre par des droites les points ainsi obtenus, etc. Il faut entendre d'ailleurs que les opérations peuvent être poursuivies indéfiniment et qu'elles conduisent alors à un point limite. D'autres applications concernent la théorie de la projection, et les constructions de coniques et de cubiques planes. Puis M. Whitehead expose la théorie des *matrices,* d'après Grassmann et M. Bucheim (*Proceedings London Math. Soc.,* XVI, 1885). Deux intéressants Chapitres concernent la théorie des systèmes de forces, indépendamment de toute notion métrique, une force étant regardée, dans l'espace à trois dimensions, comme le produit (progressif) de deux points ou le produit (régressif) de deux plans. Les propositions concernant le *Null-System* se présentent là de la façon la plus naturelle. La théorie des matrices trouve d'ailleurs dans cette théorie des systèmes de forces d'importantes applications.

Jusqu'ici les propriétés métriques n'ont été jamais introduites ni invoquées. Entrant en quelque sorte dans les Géométries particulières, l'auteur développe la théorie de la distance, d'après Cayley et M. Klein, les propositions fondamentales de la Géométrie elliptique et de la Géométrie hyperbolique, les propriétés métriques des systèmes de forces; la théorie du déplacement, fondée par M. Klein sur la considération des transformations (*congruentes*) qui changent l'absolu en lui-même, les notions fondamentales de la Mécanique, la théorie de la courbure des courbes et des surfaces.

Les derniers Chapitres se rapportent à la Géométrie euclidienne. On y trouvera tout d'abord une élégante théorie du vecteur consi-

déré comme un point à l'infini, du vecteur-aire et du vecteur-volume; diverses propositions de Géométrie et de Mécanique, et l'application de la théorie des vecteurs aux systèmes déformables, en particulier aux fluides (hydrodynamique).

L'Ouvrage considérable que vient de publier M. Whitehead, outre qu'il apporte sur divers points des contributions importantes à des théories difficiles servira certainement à répandre des idées qui, déjà vieilles d'un demi-siècle, ne semblent pas avoir pris toute l'extension dont elles sont capables : parce que les méthodes de Grassmann ne sont pas de celles dont on ne peut pas se passer, il ne faut nier ni leur profondeur, ni leur fécondité, ni l'unité qu'elles apportent dans des théories diverses, ni l'extrême condensation qu'elles permettent dans l'exposition de ces théories. La grande clarté avec laquelle ces méthodes sont décrites dans le livre de M. Whitehead contribuera à les faire mieux connaître, et plus facilement. Il suffira au lecteur de ne pas se laisser rebuter par leur inévitable symbolisme : les *mille et une nuits* racontent l'histoire d'un pauvre homme à qui un riche seigneur persan fait servir un repas imaginaire; le pauvre homme se prête à cette fantaisie et pendant longtemps, consciencieusement, il mâche à vide; mais il est récompensé de sa patience et finit par bien dîner, avec des mets substantiels. J. T.

BRAHY (E.). — EXERCICES MÉTHODIQUES DE CALCUL INTÉGRAL. Un vol. in-8. VIII-301 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1895.

Le livre de M. Brahy est un de ces livres modestes qui rendent des services. L'auteur n'a pas la prétention d'apprendre à ses lecteurs les hautes théories de l'Analyse; il veut seulement les rendre familiers avec les procédés les plus élémentaires du Calcul intégral avec ces *règles* qu'il faut savoir appliquer comme les règles du Calcul numérique. La disposition adoptée dans chaque Chapitre est la suivante : l'auteur rappelle d'abord rapidement les méthodes classiques; il donne ensuite plusieurs exemples, puis il indique un grand nombre d'exercices avec les résultats : ce sont des exercices dans le vrai sens du mot, non des problèmes.

M. Brahy s'attend à ce qu'on lui reproche des omissions qui ont été, dit-il, « volontaires et réfléchies » et qui tiennent à ce qu'il a voulu rester très élémentaire.

Rester élémentaire, c'est, à coup sûr, le droit d'un auteur, et les livres élémentaires ne sont sans doute pas les moins utiles. Que l'auteur, par exemple, ait voulu rester dans le domaine du réel et ne rien dire des intégrales prises entre des limites imaginaires : c'est ce qui se comprend parfaitement et ce n'est assurément pas aux variables imaginaires que l'auteur pensait lorsqu'il a parlé des « théories qui, si belles et si ingénieuses qu'elles puissent être, ne présentent pas assez d'applications ». Mais pourquoi, lorsqu'il traite des procédés qui permettent de rendre rationnelle la quantité sous le signe $\int$, ne dit-il rien des courbes unicursales? Quelques lignes auraient suffi et les applications ne manquaient pas.

L'auteur connaît sans doute par expérience la classe de lecteurs auxquels il s'adresse, son livre en est la meilleure preuve; je regrette de ne pas y avoir trouvé quelques remarques bien utiles pour les commençants et qui auraient pu leur éviter des fautes dans lesquelles ils risquent de tomber constamment. Par exemple, la formule

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log \frac{b}{a}$$

s'applique, si a et b sont tous deux positifs ou tous deux négatifs; dans la formule

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} = \text{arc tang}\, b - \text{arc tang}\, a,$$

le symbole arc tang désigne toujours un arc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, etc.

Quelques indications sur les précautions qu'il convient de prendre, quand on change la variable sous le signe $\int$ dans une intégrale définie, seraient aussi les bienvenues.

Quoi qu'il en soit, le livre de M. Brahy, qui contient des exercices sur toutes les théories essentielles du Calcul intégral (re-

cherches des fonctions primitives, intégrales définies, quadratures et cubatures, équations différentielles ordinaires ou aux dérivées partielles], rendra de grands services aux étudiants qui voudront bien s'astreindre à traiter les exercices proposés par l'auteur; ils seront sûrs d'acquérir ainsi cette habitude des méthodes qui est indispensable soit pour les applications pratiques, soit pour l'étude ultérieure de la Science. J. T.

KIEPERT (L.). — GRUNDRISS DER DIFFERENTIAL UND INTEGRAL RECHNUNG. I. Theil : *Differential Rechnung. Achte volständig ungearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfaden von weil. Dr. Max Siegemann.* 1 vol. in-8°, XVIII-660 p. Hannover, Helwing : 1897.

C'est la huitième édition d'un Livre dont il a été plusieurs fois question dans le *Bulletin* : livre d'une nature élémentaire, approprié aux besoins des hautes écoles techniques, qui se recommande par sa clarté et que, d'édition en édition, M. L. Kiepert a considérablement amélioré.

MADDISON (J.). — ON SINGULAR SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER IN TWO WARIABLES, AND THE GEOMETRICAL PROPERTIES OF CERTAIN INVARIANTS AND COVARIANTS OF THEIR COMPLETE PRIMITIVES.

L'objet de l'auteur est l'étude des équations différentielles du premier ordre obtenues en partant d'une équation de la forme

$$U = a\Omega^n - nb\Omega^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2}c\Omega^{n-2} - \ldots = 0,$$

où Ω est une constante arbitraire, et où les coefficients $a, b, c, \ldots$ sont des fonctions de x, y (qui ne sont pas nécessairement algébriques), puis en éliminant la constante Ω entre cette équation et l'équation

$$\frac{\partial U}{\partial x} + p\frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

où p est mis à la place de $\frac{dy}{dx}$: on forme ainsi une équation différentielle du premier ordre et du $n^{\text{ième}}$ degré en p, dont on suppose en outre que les coefficients soient des fonctions entières en x, y. Cette équation différentielle est étudiée au point de vue des solutions singulières. C'est l'un des deux points de vue si nettement distingués par M. Darboux dans sa Note *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées ordinaires du premier ordre* (¹). L'auteur regarde les premiers membres U et V des équations en Ω et p comme des formes binaires aux variables Ω, 1 ou p, 1. Tout d'abord les discriminants de ces deux formes, leurs modes de décomposition en facteurs simples et multiples et, en particulier, les facteurs communs aux deux discriminants, joueront le rôle essentiel dans cette étude, où interviendront aussi le *lieu des contacts,* en un point duquel se touchent deux courbes de la famille $U = 0$ correspondant à deux valeurs distinctes de Ω, le lieu des points doubles ou des points de rebroussement des courbes de la même famille, à supposer que ces lieux existent.

Dans le cas où n est égal à 2, l'étude des solutions singulières a été poussée très loin par M. Casorati (²); elle a été poursuivie par M. Workman (³); M. Maddison la reprend à son tour pour la compléter sur quelques points et développer en particulier les cas où les coefficients a, b, c sont du premier, du deuxième ou du troisième degré.

Les cas où n est égal à 3 ou à 4 n'avaient pas été étudiés jusqu'ici. Pour $n = 2$ la forme en Ω ne présente qu'un invariant, son discriminant; tandis que pour $n = 3$, par exemple, il y aura lieu d'introduire, outre le discriminant, qui jouera toujours le rôle principal, le hessien et le covariant cubique; en égalant à zéro ces covariants, on définira de nouvelles familles de courbes, familles dont M. Maddison montrera le rôle géométrique. Les cas

---

(¹) *Bulletin*, 1re série, t. IV, 1873, p. 158.

(²) *Voir,* en particulier, *Bulletin,* t. III_1, 1879, p. 48 : *Nouvelle théorie des solutions singulières des équations différentielles du premier ordre et du second degré entre deux variables.*

(³) *Theory of singular Solutions of integrable differential equations of the first order* (*Quarterly Journal,* XXII).

où les coefficients a, b, c, d sont du premier ou du second degré en x, y sont considérés à part. L'étude du cas où $n = 4$ est faite dans le même ordre d'idée.

L'intérêt du travail de M. Maddison est augmenté par les nombreux exemples numériques qu'il donne, où les calculs sont poussés jusqu'au bout. J. T.

LÉVY (L.). — PRÉCIS ÉLÉMENTAIRE DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES AVEC TABLES NUMÉRIQUES ET APPLICATIONS. Un vol. in-8°; XII-237 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

Le *Précis élémentaire* de M. Lucien Lévy rendra d'incontestables services en raison même de son caractère simple et pratique et de la clarté avec laquelle il est rédigé; ce caractère pratique se manifeste en particulier par les Tables numériques qui terminent le Volume : la première de ces Tables donne avec cinq décimales les valeurs de K et de E pour les diverses valeurs de l'arc θ dont le sinus est égal à k, supposé compris entre 0 et 1. Les intervalles ont été choisis de manière que l'interpolation par parties proportionnelles fournisse une approximation égale à celle de la Table; les valeurs de K ont été calculées par M. G. Humbert, professeur à l'École Polytechnique. La Table II, extraite par M. Humbert des Tables de Legendre à dix décimales, est à double entrée; elle fournit, avec cinq décimales, les valeurs de u pour les diverses valeurs de l'amplitude $\varphi = \text{arc sin}(\text{sn}u)$, et de l'angle θ; les valeurs de φ inscrites dans la Table vont de degré en degré et les valeurs de θ de cinq degrés en cinq degrés. La Table III, extraite par M. Lévy des Tables de Legendre, donne les valeurs de

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi;$$

dans des conditions semblables, elle permet le calcul de la fonction ζu. La Table IV est empruntée au *Calcul intégral* de M. J. Bertrand; elle donne les valeurs du logarithme vulgaire de q pour les diverses valeurs de θ, de cinq minutes en cinq minutes. L'uti-

lité de ces Tables n'est pas contestable; à la vérité, elles peuvent être remplacées par les séries si convergentes que l'on trouve dans les *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques* de M. Schwarz, séries qui fournissent dans tous les cas, avec une approximation très supérieure aux besoins de la pratique, les résultats dont on a besoin. Mais il ne pouvait entrer dans le plan de M. Lévy d'établir les formules sur lesquelles reposent ces développements en série, dont les Tables qu'il a mises à la fin de son Volume tiennent lieu, dans une certaine mesure; au reste, ces Tables conservent, dans tous les cas, leur valeur et leur utilité propres. Il eût toutefois été légitime de citer, sans démonstration, quelques-uns de ces développements en série, en raison même de leur valeur pratique; l'objet propre d'un précis élémentaire — et il m'a bien semblé que c'était là l'opinion de l'auteur — est de faire connaître au lecteur les fondements de la théorie et de lui en permettre l'application : il me semble qu'un développement en série, même non démontré, peut être admis au même titre qu'une Table numérique qui, elle aussi, ne contient, après tout, que des résultats sans démonstration.

L'auteur part de la série

$$\varphi(z) = \sum (-1)^n e^{\left(n-\frac{1}{2}\right)z + \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 a},$$

établit les propriétés relatives aux périodes $2\pi i$ et $2a$, et montre que ces propriétés définissent complètement la fonction $\varphi(z)$ si on la suppose développable en une série entière en z, toujours convergente. Cette proposition même suffit à établir la décomposition en facteurs. L'équation à trois termes est établie par la multiplication des séries. On a dès lors le moyen d'établir les propriétés essentielles des fonctions $\mathfrak{S}$, d'où se déduisent les propriétés de la fonction σ : celle-ci engendre par différentiation les fonctions ζ, p, à côté desquelles M. Lévy définit les fonctions sn, cn, dn. L'équation différentielle de la fonction p est déduite du théorème d'addition, et cette équation différentielle conduit ensuite aux équations différentielles relatives aux fonctions sn, cn, dn. Les variations de ces diverses fonctions ainsi que de la fonction ζu sont étudiées avec soin, en supposant la variable réelle, ainsi que les nombres e_1, e_2, e_3 : des tracés graphiques figurent ces variations. M. Lévy

aborde ensuite le problème de l'intégration au moyen des fonctions elliptiques.

Pour ramener, en particulier, une intégrale de la forme $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}$, où X est un polynome du quatrième degré en x, à la forme $\int \frac{dy}{-\sqrt{Y}}$, où Y est un polynome du troisième degré, polynome que, dans ce qui suit, je supposerai de la forme $4y^3 - g_2 y - g_3$, il indique trois méthodes, dont les deux premières consistent dans une transformation fractionnaire du premier degré et supposent la connaissance d'une ou de deux racines de X, dont la dernière, qui ne suppose pas cette connaissance, est la belle méthode fondée sur l'identité

$$[p(u+v) - pv]^2 = x^3 - 6x^2 pv + 4x p'v - 9p^2 v - p''v,$$

où x est mis à la place de $\frac{1}{2}\frac{p'u - p'v}{pu - pv}$. La comparaison de ces procédés suggère quelques observations qui, sauf une remarque préliminaire, sont implicitement contenues dans l'Ouvrage même de M. Lévy.

La remarque préliminaire consiste en ce que la détermination d'une substitution de la forme

$$x = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta},$$

telle que l'on ait

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int \frac{dy}{-\sqrt{Y}} \qquad \sqrt{Y} = -\frac{(\gamma y + \delta)^2}{\alpha\delta - \beta\gamma}\sqrt{X},$$

en supposant que Y ait la forme indiquée, $4y^3 - g_2 y - g_3$, est un problème entièrement déterminé quand on se donne la racine de X dont dépendent les coefficients de la substitution; en désignant par x_0 cette racine, et par $X'_0, X''_0, \ldots$ ce que deviennent les dérivées de $X', X'', \ldots$ de X, cette substitution est

$$x = x_0 - \frac{\frac{1}{4}X'_0}{y - \frac{1}{24}X''_0};$$

mais les coefficients g_2 et g_3 ne dépendent pas de la racine x_0, ce sont les mêmes invariants g_2 et g_3 de la forme du quatrième degré X qui s'introduisent dans la troisième méthode; pour calculer ces

invariants, fonctions entières des coefficients de X, il n'est pas nécessaire de résoudre l'équation $X = 0$, en sorte qu'il ne semble pas utile de distinguer le cas où l'on connaît deux racines de X de celui où l'on n'en connaît qu'une. Enfin, quand on dit que la troisième méthode ne suppose pas la résolution de l'équation $X = 0$, il faut s'entendre; le calcul de la valeur de l'intégrale $\int \frac{dy}{\sqrt{Y}}$ revient au calcul de u connaissant pu, ce qui, comme la détermination des périodes, exige la résolution de l'équation $Y = 0$; or cette résolution, sauf des extractions de racine carrée qui, ici, sont manifestement insignifiantes, est exactement le même problème que la résolution de l'équation $X = 0$. D'ailleurs, que l'on emploie la première ou la troisième méthode, la quantité sous le signe $\int$ est la même; c'est seulement le calcul des limites qui diffère, calcul où, dans la première méthode, intervient effectivement une racine de l'équation $X = 0$. C'est plutôt, à ce qui me semble, dans la forme élégante des résultats auxquels conduit la dernière méthode que réside l'intérêt de cette méthode.

Quoi qu'il en soit, l'Auteur explique très clairement les opérations à faire pour effectuer les intégrations et calculer les constantes dont on a besoin, en se plaçant surtout au point de vue de la fonction p, tant dans le cas du discriminant positif que dans le cas du discriminant négatif, ainsi que l'usage des Tables, dont j'ai déjà parlé, pour les calculs numériques. Des applications sont ensuite faites aux problèmes suivants : pendule simple, élastique plane, mouvement d'un projectile dans un milieu où la résistance est proportionnelle au cube de la vitesse (Greenhill), pendule sphérique, arc de l'ellipse, aire de l'ellipsoïde, résolution numérique d'une équation du quatrième degré. Revenant à la théorie, M. Lévy montre comment, lorsque l'on a calculé q, on peut se servir des séries $\mathfrak{I}$ pour trouver $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, ... connaissant u, ou pour résoudre les problèmes inverses. Un dernier Chapitre concerne les applications du théorème de Cauchy sur les intégrales prises le long d'un contour; on y trouvera, en particulier, la formule de décomposition en éléments simples.

Diverses Notes concernent les intégrales

$$\int \frac{F(x)}{\sqrt[3]{X}}, \quad \int \frac{F(x)}{\sqrt[4]{X}},$$

où X est un polynome du quatrième degré (d'après M. de Sparre); la dégénérescence, quelques remarques sur l'inversion au moyen des fonctions de Jacobi, l'application des fonctions elliptiques (d'après M. de Sparre) à l'étude du tir des projectiles dans le cas de la résistance proportionnelle à la quatrième puissance de la vitesse et où la tangente à la trajectoire fait avec l'horizon un angle supérieur à 75°.

Les différents Chapitres sont suivis d'exercices destinés, soit à familiariser le lecteur avec l'objet du Chapitre, soit à accroître ses connaissances en lui faisant démontrer des résultats importants qui n'avaient pu trouver place dans le Précis. Enfin, les Tables numériques sont précédées d'un Résumé des principales formules. On sent que l'Auteur a eu le souci de faire un livre vraiment utile et commode.

J. T.

W.-W. ROUSE BALL. — Récréations et Problèmes mathématiques des temps anciens et modernes. 3e édition, traduite par M. *J. Fitz-Patrick*. Un vol. in-8°, IV-352 p. Paris, A. Hermann; 1898.

J'ai déjà eu le plaisir de signaler, ici même, en 1893 (1), la seconde édition des intéressantes *Récréations mathématiques* de M. W.-W. Rouse Ball.

M. Fitz-Patrick, l'auteur-traducteur bien connu, vient de faire paraître à la librairie Hermann une traduction de la troisième édition de cet Ouvrage. Ce n'est pas une *traduction* que je devrais dire mais une excellente *adaptation française*, car M. Fitz-Patrick ne s'est pas contenté de transcrire le Livre de M. Rouse Ball, mais il y a ajouté de nombreuses et élégantes Notes qui augmentent encore l'intérêt de cet Ouvrage, déjà fort curieux par lui-même.

Au risque de me répéter, et dans un pareil cas la récidive est presque de rigueur, je ne puis résister au désir de parler encore de ce Volume.

Il se compose de deux Parties distinctes : l'une qui contient des récréations mathématiques, l'autre réservée à l'exposition de

---

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XVII; 1893, première Partie, p. 165-167.

quelques questions célèbres ou de théories d'un caractère général quelque peu philosophique.

L'intérêt de la première Partie réside surtout dans la variété des sujets et leur choix judicieux. En sept Chapitres l'Auteur passe en revue les paradoxes les plus fameux, des artifices arithmétiques et géométriques dont plus d'un est presque classique, des problèmes de Géométrie de situation et de position, des questions de mécanique, de jeux, des tours de cartes. Puis, encore, les célèbres carrés magiques, qui eurent tant de vogue au dix-huitième siècle, et ces problèmes de tracés continus, comme le problème d'Euler sur les ponts de Königsberg, qui ont donné lieu à de vrais travaux de haute Science.

En relisant tout cela, j'ai été singulièrement frappé par ce fait que tous les auteurs, même les plus modernes, n'ont guère tiré parti, en traitant ces questions, des puissantes ressources que nous offre l'Analyse dans son état actuel. Ainsi, pour ne citer qu'un exemple, comment se fait-il qu'on ne trouve pas trace, au moins d'une façon apparente, d'applications de la théorie des substitutions de n lettres aux problèmes de jeux de cartes? Toutes ces questions de déplacements, de transports, d'échanges de cartes ne sont-ce pas des substitutions plus ou moins déguisées? L'une des plus simples, de ce genre, est, me semble-t-il, la suivante : on prend un certain nombre de cartes; supposons, pour fixer les idées, quatre cartes : as, roi, dame et valet. On les place au hasard en ligne, face en bas, et l'on se propose de les ranger dans l'ordre naturel en procédant comme il suit : On tire une carte, mettons que ce soit la seconde (celle qui occupe la place du roi) et que ce soit le valet. On transporte cette carte à la quatrième place (celle du valet) en enlevant la carte qui s'y trouve et qui est, par exemple, l'as. On transporte l'as à sa place en enlevant la carte qui l'occupe et l'on continue de la sorte jusqu'à ce qu'on soit amené à tirer le roi, c'est-à-dire à tirer la carte qui doit occuper la seconde place qui est libre. Le rapprochement de l'ordre initial des cartes avec l'ordre final définit une certaine substitution et, par l'opération que nous venons de décrire, on a mis un certain nombre de cartes en place en parcourant un cycle de la substitution. On peut, par exemple, admettre qu'il y a *réussite*, si l'on arrive à ranger toutes les cartes en un seul

cycle ou en un nombre donné à l'avance de cycles. Une formule de Cauchy [1], bien connue, permettrait, dans chaque cas particulier, de calculer la probabilité de la réussite. Mais on pourrait se poser, à ce sujet, des questions très variées et souvent fort difficiles. En voici une qui se pose naturellement, si l'on veut avoir un jeu équitable. Soit n cartes rangées en file, au hasard, qu'il s'agit de placer dans un ordre déterminé par la méthode de substitution précédente. Il y aura réussite s'il faut *au plus* p cycles pour amener les cartes dans l'ordre donné. Peut-on choisir n et p de façon que la probabilité de réussite soit $\frac{1}{2}$?

Cette observation ne s'adresse évidemment pas à M. Rouse Ball que nous ne saurions, au contraire, trop féliciter pour la simplicité et l'élégance de son exposition.

La seconde Partie du Volume comprend cinq Chapitres. L'un traite des trois fameux problèmes *de la duplication du cube,* de la *trisection de l'angle* et de la *quadrature du cercle*. Un autre est réservé à l'astrologie, un troisième à l'hyperespace, l'avant-dernier au temps et à sa mesure; le dernier aux hypothèses sur la matière et sur l'éther.

Le mouvement vers la Philosophie mathématique, qui se dessine actuellement en France, fera que plus d'un lecteur s'intéressera plus spécialement à ces derniers Chapitres. Je regrette même que M. Rouse Ball, ou M. Fitz-Patrick, ne leur ait pas donné encore plus d'ampleur.

Il y eût eu place pour plus d'un extrait des articles récents parus sur ces sujets, en particulier pour les remarquables articles de M. H. Poincaré dans la *Revue générale des Sciences* et la *Revue de Métaphysique et Morale*, pour ne parler que des plus fameux.

Je n'insiste pas, car je ne voudrais pas, en quoi que ce soit, diminuer le désir que je veux inspirer à mes lecteurs de lire et relire cet intéressant Ouvrage. C. Bourlet.

---

[1] Cauchy, *Exercices d'Analyse*, t. III, p. 173.

MÉLANGES.

SOLUTION COMPLÈTE D'UNE QUESTION PROPOSÉE PAR FERMAT;

PAR M. R. LIPSCHITZ.

Fermat, dans une lettre qui est datée du 18 octobre 1640, mais dont l'adresse est supprimée, lettre publiée [1] p. 162 des *Varia opera mathematica D. Petri de Fermat,* a formulé le théorème qui portera son nom dans les mots suivants : « Tout nombre premier mesure infailliblement une des puissances — 1 de quelque progression que ce soit (c'est-à-dire géométrique) et l'exposant de ladite puissance est sous-multiple du nombre premier donné — 1. »

Après avoir éclairci ledit théorème par plusieurs exemples, il continue ainsi :

« Mais il n'est pas vray que tout nombre premier mesure une puissance + 1 en toute sorte de progressions. Car si la première puissance — 1 qui est mesurée par ledit nombre premier a pour exposant un nombre impair, en ce cas il n'y a aucune puissance + 1 dans toute la progression qui soit mesurée par ledit nombre premier. » Et plus tard : « En un mot il faut déterminer quels nombres premiers sont ceux qui mesurent leur première puissance — 1 et en telle sorte que l'exposant de ladite puissance soit un nombre impair, ce que j'estime fort malaisé, ...

» ... Voici une de mes propositions ... que j'estime beaucoup, bien qu'elle ne découvre pas tout ce que je cherche ....

» En la progression double, si d'un nombre quarré, généralement parlant, vous ôtez 2 ou 8 ou 32, etc., les nombres premiers moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste, feront l'effet requis; comme de 25, qui est un quarré, ôtez 2, le reste 23 mesurera la 11e puissance — 1; ôtez 2 de 49, le reste 47 mesurera la 23e puissance — 1.

---

[1] Dans l'édition de MM. Paul Tannery et Charles Henry (t. II, p. 206), cette lettre est portée comme adressée à Frenicle.

» Otez 2 de 225, le reste 223 mesurera la 37e puissance — 1, etc.

» En la progression triple, si d'un nombre quarré, *ut supra*, vous ôtez 3 ou 27 ou 243, etc., les nombres premiers et moindres de l'unité qu'un multiple du quaternaire, qui mesureront le reste, feront l'effet requis. Comme de 25 ôtez 3, le reste 22 est mesuré par 11, qui est premier et moindre de l'unité qu'un multiple de 4; aussi 11 mesure la 5e puissance — 1.

» Otez 3 de 121, le reste 118 est mesuré par 59, moindre de l'unité, etc., aussi 59 mesure la 29e puissance — 1.

» En la progression quadruple il faut ôter 4 ou 64, etc., et à l'infini en toutes progressions en procédant de même façon. »

Comme l'on verra, la question proposée par Fermat peut être décidée absolument en faisant usage des racines primitives relatives à un nombre premier impair.

Que soient a un nombre donné quelconque positif ou négatif, p un nombre premier impair, qui ne divise pas le nombre a; il s'agit de trouver la condition nécessaire et suffisante qui comporte l'impossibilité ou la possibilité de la congruence

$$a^x + 1 \equiv 0 \pmod{p}. \tag{1}$$

Désignons par g une racine primitive relative au module p. Parce que l'on a toujours

$$-1 \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

la congruence (1) peut être remplacée par la suivante

$$g^{x \operatorname{ind} a} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p},$$

qui entraîne la congruence

$$x \operatorname{ind} a \equiv \frac{p-1}{2} \pmod{p-1}; \tag{2}$$

d'ailleurs celle-ci n'est autre chose que l'équation

$$x \operatorname{ind} a = \frac{p-1}{2}(1+2y) \tag{3}$$

pour les deux nombres entiers x et y.

Que l'on dénote par 2^λ la plus haute puissance de 2 contenue dans $p-1$, par P un nombre impair, de manière que l'on ait

$$p-1=2^\lambda P;$$

pareillement soit

$$\operatorname{ind} a = 2^\varkappa Q,$$

où Q désigne un nombre impair. Alors l'équation (3) prend la forme

$$(4) \qquad x 2^\varkappa Q = 2^{\lambda-1} P(1-2y).$$

Cette équation est évidemment impossible ou possible, selon que la différence des exposants $\lambda-1-\varkappa$ est négative ou non. Donc la condition nécessaire et suffisante, sous laquelle la congruence (1) devient impossible, c'est l'inégalité

$$(5) \qquad \lambda \leqq \varkappa.$$

Supposons que d soit le plus grand commun diviseur des deux nombres impairs P et Q, de façon que l'on ait

$$P = dP', \qquad Q = dQ'.$$

Alors l'équation (4) devient

$$(6) \qquad x 2^\varkappa Q' = 2^{\lambda-1} P'(1-2y).$$

Partant, dans le cas qu'elle est possible, où $\lambda > \varkappa$, les nombres les plus petits, qui satisfont, sont ceux-ci :

$$(7) \qquad x = 2^{\lambda-1-\varkappa} P', \qquad 1-2y = Q'.$$

Pour y comparer l'énoncé de Fermat, soit z le nombre le plus petit pour lequel on a

$$a^z - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Il est clair que z est déterminé par l'équation

$$z \operatorname{ind} a = w(p-1),$$

w étant un nombre entier. Cela veut dire

$$z 2^\varkappa Q = w 2^\lambda P,$$

ou bien

$$z 2^\varkappa Q' = w 2^\lambda P'.$$

Or les nombres les plus petits z et w y sont déterminés comme il suit :

Pour $\lambda \leqq \varkappa$, on a

$$z = P', \qquad w = 2^{\varkappa-\lambda}Q';$$

pour $\lambda \geqq \varkappa$

$$z = 2^{\lambda-\varkappa}P', \qquad w = Q'.$$

Dans le premier cas, où la congruence (1) est impossible, z est impair; dans le second, où la congruence (1) est possible, z est pair, et $\frac{z}{2}$ exprime selon (7) la valeur la plus petite du nombre x, comme Fermat l'a dit.

Pour arriver au but de déterminer, le nombre a étant donné, tous les nombres premiers impairs p, qui font impossible la congruence (1), on peut maintenant enfiler le chemin suivant. Si, à propos de l'équation $\operatorname{ind} a = 2^{\varkappa}Q$, nous désignons par u le nombre correspondant à l'indice impair Q par rapport au module premier p, il est évident que u doit être un non-résidu quadratique respectivement au module p, et que réciproquement à un non-résidu u appartiendra toujours un indice impair.

Cela étant, de l'expression mentionnée de l'$\operatorname{ind} a$ découle la congruence

$$(8) \qquad u^{2^{\varkappa}} - a \equiv 0 \pmod{p},$$

où le nombre u est nécessairement non-résidu quadratique par rapport au module p. Comme, de l'autre côté, on a $p - 1 = 2^{\lambda}P$, où P est impair, et que la congruence (1) devient impossible sous la condition (5) et seulement sous celle-ci, les nombres premiers p, pour lesquels la congruence (1) est impossible, sont ceux et exclusivement ceux chez lesquels, dans la congruence (8), u est non-résidu quadratique par rapport au module p et l'exposant λ plus petit ou égal à l'exposant $\varkappa$.

Vu que l'exposant λ a sa valeur la plus petite, c'est-à-dire de l'unité, l'exposant $\varkappa$ doit être de même égal à l'unité ou plus grand qu'elle. On est conduit par là à formuler avec le nombre donné a l'expression $s^2 - a$, où l'on pose pour s successivement tous les nombres 1, 2, 3, ... Admettons que la décomposition du résultat en puissances de nombres premiers différents donne

l'équation

$$(9) \qquad s^2 - a = \pm 2^\alpha p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots.$$

Au cas où s est égal à un carré, on peut exprimer s à l'aide de la base de ce carré et, s'il le faut, ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait pour s une expression t^{2^τ}, où t n'est pas égal à un carré. En l'introduisant, l'expression mentionnée (9) prendra la forme

$$(9^*) \qquad t^{2^{\tau+1}} - a = \pm 2^\alpha p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots.$$

Pour rapprocher cette équation de la congruence (8), il faut examiner le nombre t successivement par rapport aux nombres premiers impairs $p_1, p_2 \ldots$. Après y avoir élu un nombre quelconque p_m, supposons que t soit résidu quadratique respectivement au module p_m; alors on peut remplacer t par rapport à ce module par le carré d'un nombre convenablement choisi, et ainsi de suite, jusqu'à ce que l'on ait remplacé t par une puissance $u_m^{2^{\rho_m}}$, où u_m est non-résidu quadratique pour le module p_m. L'équation (9) donnera alors la congruence

$$(10) \qquad u_m^{2^{\tau+\rho_m+1}} - a \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, p_m):$$

donc en supposant $p_m - 1 = 2^{\lambda_m} P_m$, où P_m est impair, pour le nombre premier p_m la congruence (1) sera impossible on non, selon qu'on aura $\lambda_m \leqq \tau + \rho_m + 1$ ou non. Étant traités de ladite manière tous les nombres premiers $p_1, p_2, \ldots$, la question proposée se trouvera complètement résolue.

La solution complète expliquée de la question proposée par Fermat permet une conclusion générale. Vu que les nombres dénotés par τ ou par ρ_m sont positifs ou nuls, mais jamais négatifs, la condition $\lambda_m \leqq \tau + \rho_m + 1$ se trouve toujours remplie, au cas où λ_m est égal à l'unité, c'est-à-dire où $p_m - 1 = 2 P_m$, P_m étant impair $= 2 R_m + 1$, partant au cas où $p_m = 4 R_m + 3$. Voilà le cas de la règle exprimée par Fermat, que p_m soit un nombre premier, qui est moindre de l'unité d'un multiple du quaternaire, et qui mesure l'expression $s^2 - a$.

Pour les valeurs $a = \pm 2, \pm 3, \pm 5$ j'ai discuté les valeurs de l'expression $s^2 - a$ pour la série des nombres naturels $s = 1, 2, \ldots, 31$. Le terme 31 a été indiqué par le dessein que la valeur

de $s^2 - a$ ne surpasse pas la valeur de 1000, le calcul étant bien facilité par l'aide du *Canon arithmeticus* de Jacobi. Les nombres premiers p résultant du calcul désigné, pour lesquels la congruence $a^c + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ devient impossible, et qui ne sont pas embrassés par la règle de Fermat, sont les suivants :

Pour

$a = 2$, $p = 89$, 337,

$a = -2$, $p = 281$,

$a = 3$, $p = 13$,

$a = -3$, $p = 37$, 157, 61,

$a = 5$, $p = 109$, 181,

$a = -5$, $p = 61$, 29.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LILIENTHAL (R. v.). — GRUNDLAGEN EINER KRÜMMUNGSLEHRE DER CURVENSCHAAREN. In-8°, VII-115 p. Leipzig, Teubner, 1896.

Si l'on considère dans l'espace une série de courbes dépendant d'un ou de deux paramètres, elles forment une suite simplement infinie et engendrent une surface lorsqu'elles dépendent d'un seul paramètre; elles forment une suite doublement infinie et engendrent une congruence de courbes lorsqu'elles dépendent de deux paramètres.

L'étude d'une suite simplement infinie de courbes se confond évidemment avec celle de la surface qu'elles engendrent et des différents systèmes de coordonnées curvilignes propres à définir les points de cette surface; au contraire, la théorie des congruences de courbes est relativement nouvelle et elle peut donner naissance à un grand nombre de propositions intéressantes.

Dans l'Ouvrage qu'il vient de publier, M. v. Lilienthal s'est occupé des deux séries de courbes que nous venons de définir et s'est proposé plus particulièrement d'étudier les propriétés qui concernent la courbure. Une première Partie très courte fait connaître ce qui concerne les familles à un seul paramètre, soit dans le plan, soit dans l'espace; nous y signalerons les notions essentielles sur la courbure normale, la courbure géodésique, sur la courbure totale de Gauss, sur les paramètres différentiels de Lamé et de Beltrami. Cette première Partie doit être considérée comme une espèce d'introduction propre à préparer le lecteur à l'étude plus difficile des congruences de courbes.

La seconde Partie traite des congruences de courbes, considérées comme définies par des équations en termes finis. L'auteur y développe une théorie nouvelle, toute semblable à celle d'Euler sur la courbure des surfaces. Cette théorie repose surtout sur l'emploi des trajectoires orthogonales des courbes de la congruence. Il y a ici des lignes analogues aux lignes asymptotiques, il y a deux espèces différentes de lignes de courbure, des théorèmes analogues à ceux d'Euler sur la théorie des surfaces, etc. L'Au-

teur applique cette théorie aux systèmes de rayons rectilignes et retrouve ainsi comme cas particulier de ses propositions générales les belles propriétés que la Science doit à Kummer sur ce sujet. Peut-être ces propositions générales auraient-elles gagné en intérêt et en simplicité, si M. v. Lilienthal les avait rattachées à celles de Kummer sur les rayons rectilignes. Il suffit pour cela d'opérer de la manière la plus simple et d'introduire pour chaque point de l'espace la congruence rectiligne suivante. On construit le plan normal en ce point à la courbe de la congruence et l'on mène les tangentes aux courbes infiniment voisines dans le point même où elles rencontrent ce plan. On obtient ainsi la congruence rectiligne que nous voulions indiquer et dont toutes les propriétés infinitésimales conduisent à celles qui ont été si bien étudiées directement par l'Auteur. Après la théorie générale viennent d'assez nombreuses applications dans lesquelles l'Auteur choisit des coordonnées spéciales ou démontre des propositions de MM. Guichard, Ribaucour et Weingarten.

La troisième Partie de l'Ouvrage traite encore des congruences de courbes; mais on les suppose maintenant définies par des équations différentielles. Il y a là des applications de la théorie nouvelle instituée par l'Auteur, des déterminations directes des éléments définis dans la seconde Partie, l'indication des moyens par lesquels on exprime que la congruence de courbes rentre dans certaines catégories spéciales, etc.

La méthode suivie par l'Auteur est purement analytique; elle repose principalement sur l'emploi de la différentiation suivant les courbes considérées et par rapport à leur arc, opération qui présente un caractère invariatif et permet d'écrire les formules avec simplicité.

Ce compte rendu permettra à nos lecteurs de se rendre compte de la nature et des caractères distinctifs du nouvel Ouvrage de Géométrie infinitésimale de M. v. Lilienthal. G. D.

WOLFGANGI BOLYAI DE BOLYA TENTAMEN JUVENTUTEM STUDIOSAM IN elementa Matheseos puræ elementaris ac sublimioris methodo intuitiva evidentiaque huic propria introducendi cum appendice triplici. — Editio secunda, tomus I : Conspectus arithmeticæ generalis mandato Academiæ Scientiarum Hungaricæ suis adnotationibus adjectis ediderunt JULIUS KONIG et MAURICIUS RÉTHY, Ac. Sc. Hung. Sodales. Accedit effigies auctoris. MDCCCXCVII, in-4°, XII-679 p. XI Tab. Budapestini, sumptibus Academiæ Scientiarum Hungaricæ (Paris, Gauthier-Villars).

Tous ceux qui suivent avec attention le développement de la Science mathématique peuvent constater quelle place, de plus en plus grande, prennent dans l'attention des géomètres les recherches de toute nature relatives à la Géométrie non euclidienne. Le temps est loin où notre regretté collaborateur J. Hoüel était presque seul à signaler la haute importance des travaux de Gauss, de Lobatchefsky, de Bolyai. Tout le monde se rend compte aujourd'hui que les études entreprises sur les fondements même de la Géométrie ont la plus haute importance philosophique ; que, seules peut-être, elles sont de nature à nous donner des clartés nouvelles relativement à l'origine et à la formation de nos connaissances. On se rappelle les honneurs que, sur l'invitation de la Société physico-mathématique de Kasan, les géomètres du monde entier rendaient à N. Lobatchefsky [1]. On ne s'étonnera donc pas que l'Académie hongroise des Sciences de Budapest ait considéré comme un devoir de mettre en lumière les travaux jusqu'ici trop peu connus des deux Bolyai et ait songé à nous donner tout d'abord une édition du *Tentamen* de Wolfgang Bolyai.

Déjà, dans la traduction que notre collaborateur M. Laugel a donnée ici même en août dernier de l'article que MM. Paul Stäckel et F. Engel ont consacré à Gauss, aux deux Bolyai et à la Géo-

---

[1] Dans sa séance du 3 novembre dernier, la Société de Kasan vient de décerner pour la première fois le prix Lobatchefsky et, sur le rapport de M. F. Klein, elle l'a attribué aux importantes recherches de M. Lie sur les principes de la Géométrie contenus dans le Tome III de la *Theorie der Transformationsgruppen*. Elle a décerné des mentions honorables à M. L. Gérard pour sa *Thèse sur la Géométrie non euclidienne*, à M. E. Cesaro pour ses *Lezioni di Geometria intrinseca* et à M. G. Fontené pour son Ouvrage *L'hyperspace à $n-1$ dimensions*.

métrie non euclidienne, article qui nous apporte tant de renseignements intéressants, tant de documents inconnus jusqu'ici, il avait été dit un mot de cette édition du *Tentamen*. Bien qu'elle ne soit pas encore complète, nous nous reprocherions cependant de ne pas la signaler dès à présent, et d'une manière tout à fait particulière, à nos lecteurs. Rarement une œuvre de savant a été éditée avec autant de luxe et autant de soin, et MM. J. Kœnigs et Réthy, auxquels l'Académie des Sciences avait confié le soin de publier cette seconde édition du *Tentamen*, ont justifié de la manière la plus éclatante la confiance qui leur était témoignée. Dans une préface écrite en latin, ils indiquent avec le plus grand soin les règles qu'ils ont suivies dans la publication nouvelle, et qui n'ont d'autre but que de respecter la pensée de l'Auteur en rendant aussi facile que possible la lecture de l'Ouvrage. Pour la publication, le *Tentamen* a été divisé en Sections. Celles qui sont publiées aujourd'hui et qui forment le premier Volume tout entier embrassent l'ensemble de l'Arithmétique. Elles contiennent les premiers principes de l'Arithmétique, du Calcul différentiel et intégral, de la théorie des équations. Les signes et les notations de Bolyai ont été scrupuleusement respectés. Les annotations nombreuses des éditeurs, ainsi que les figures dessinées par M. le professeur Totossy, ont été rejetées à la fin.

Nous reviendrons sur l'ensemble quand la Géométrie aura paru.

G. D.

GASTON DARBOUX, Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences. — LEÇONS SUR LA THÉORIE GÉNÉRALE DES SURFACES ET LES APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL. T. III et IV.

1. Depuis deux ans que sont parus les deux derniers Volumes des *Leçons sur la Théorie des surfaces*, le public mathématicien a pu apprécier quelle somme de matériaux se trouve accumulée dans cet Ouvrage et quel art a présidé à la coordination d'éléments parfois disparates. Grâce à cette œuvre, qui marque l'étape accomplie dans ce siècle par la Géométrie infinitésimale, depuis les Traités de Monge et de Dupin, les géomètres ont aujourd'hui

sous la main les résultats jusque-là dispersés dans des centaines de Mémoires et publiés dans les Recueils périodiques français ou étrangers les plus divers.

Mais ce qui frappera certainement le plus vivement, c'est la façon dont l'auteur a su rattacher à quelques idées ou principes simples l'ensemble innombrable des faits épars; c'est le savoir et aussi le savoir-faire qu'il aura su y déployer sans prétention, sans emphase, sans dogmatisme excessif, en évitant surtout cet écueil banal de l'esprit de système où l'on voit parfois une main savante mais lourde faire tomber le gouvernail.

La question du goût dans les écrits mathématiques arrête rarement la critique. On est plus pressé de louer les résultats acquis, la solidité de la forme, les généralisations hardies. Cependant l'esprit de système, les généralisations inutiles, la lourdeur, la diffusion, que l'on confond quelquefois avec la rigueur logique, témoignent d'un manque de goût. C'est l'absence de goût qui rend parfois indigeste, ennuyeuse telle doctrine mathématique jusqu'à ce qu'un homme de goût lui donne la base la plus accessible à la raison et la forme qui plaît à l'esprit. Mais il n'est pas fréquent de trouver uni à la force, qui peut démontrer et trouver, ce goût qui sait discerner.

Ceux qui auront lu ces Leçons auront été mis à même d'apprécier ce que peut donner l'esprit de généralisation appliqué avec puissance, mais aussi avec justesse et mesure. Ils auront eu des exemples de rigueur élégante. Ils auront éprouvé les surprises des rapprochements inattendus, mais que devait naturellement amener une science plus ingénieuse et plus profonde. Ils auront vu à l'œuvre une méthode alerte et forte, cherchant droit son but et l'atteignant avec grâce.

2. Les deux derniers Volumes dont nous allons rendre compte contiennent les Livres VI, VII et VIII de l'Ouvrage.

Le Livre VI traite des lignes géodésiques et de la courbure géodésique.

Le Livre VII a pour objet le problème général de la déformation des surfaces.

Enfin, le Livre VIII, d'une étendue exceptionnelle, puisqu'il occupe à lui seul tout le Tome IV, a trait à la déformation infini-

ment petite et à ses connexions avec la représentation sphérique, question toute récente et qui doit à l'auteur ses principes les plus essentiels.

Livre VI. — *Lignes géodésiques.*

3. Rappelons d'abord que dans le Tome II, au Livre V, consacré aux lignes tracées sur une surface, la question des lignes géodésiques avait été déjà abordée, ainsi que la question connexe des familles de courbes parallèles. L'extension de cette question aux cas de plusieurs variables avait conduit l'auteur à écrire une importante digression en trois Chapitres sur la méthode de Jacobi, sur son interprétation géométrique et sur les équations générales de la Dynamique.

Dans le Livre VI, M. Darboux reprend la question des lignes géodésiques, pour s'attacher, en premier lieu, aux procédés d'intégration de l'équation différentielle de ces lignes et aux problèmes divers que soulève l'étude de ces procédés.

Ainsi, la méthode de Jacobi amène naturellement les géodésiques des surfaces de révolution et plus généralement de celles dont le ds^2 est réductible au type de Liouville. L'ellipsoïde rentre dans ce type, qui prête du reste, par ailleurs, à une généralisation des propriétés des coniques, par le moyen de ce que Dini appelle des *coniques géodésiques*.

4. La recherche d'une intégrale fait naître toutes les questions relatives aux cas où l'une ou même plusieurs de ces intégrales sont algébriques et, plus particulièrement, linéaires ou quadratiques par rapport aux vitesses. Ces divers cas donnent lieu à d'importants développements qui tiennent plusieurs Chapitres, où se trouvent résumées les recherches de Bour, Bonnet, Maurice Lévy, sur les intégrales algébriques homogènes par rapport aux vitesses.

Nous ne saurions passer sous silence l'élégant Chapitre qui a pour titre : *De la représentation géodésique de deux surfaces l'une sur l'autre*. Le problème dont il s'agit consiste à représenter, point par point, deux surfaces l'une sur l'autre avec correspondance des lignes géodésiques. Ce problème, traité d'abord

par Beltrami dans le cas des surfaces à courbure constante, l'a été ensuite dans le cas général, par Dini. On retombe sur les ds^2 de Liouville, sauf le cas d'exception de Lie. L'auteur ne se borne pas à la solution élémentaire et classique qui repose sur un beau théorème dû à M. Tissot; il porte la question sur un terrain beaucoup plus étendu et la généralise en la forme suivante : *Trouver toutes les fonctions* $f(u, v, v')$ *où* $v' = \frac{dv}{du}$, *telles que le problème de variations relatif à l'intégrale*

$$\int f(u, v, v')\, du$$

se résolve par l'intégration d'une équation du second ordre DONNÉE

$$v'' = \varphi(u, v, v').$$

La conséquence remarquable à laquelle on parvient, c'est que si l'on sait intégrer cette équation du second ordre, la détermination générale de la fonction f n'exigera que des quadratures. L'application aux problèmes de Beltrami et de Dini en fournit les solutions sous une forme élégante et presque intuitive.

5. La question du plus court chemin entre deux points sur une surface a exercé la sagacité des plus habiles géomètres. L'auteur l'analyse en un Chapitre extrêmement instructif et dont la portée pourrait sans aucun doute être étendue à d'autres questions de variations. L'auteur expose en premier lieu les résultats classiques de Jacobi et d'Ossian Bonnet qu'il complète en certains points. Notons l'emploi qui est fait en cette étude des recherches, un peu oubliées, de Sturm sur les équations différentielles du second ordre et principalement sur le zéro des solutions de ces équations.

6. Dans le Chapitre consacré aux cercles géodésiques, M. Darboux a, on peut le dire, renouvelé et donné un véritable corps à la théorie de ces lignes avant lui peu étudiées, et qui offre cependant un si profond intérêt. Élargissant son point de vue, l'auteur arrive à généraliser le problème sans augmenter sensiblement sa difficulté : le problème généralisé se formule en ces termes :

Trouver les lignes (F) *dont la courbure géodésique est, en*

chaque point de la surface, une fonction donnée des coordonnées de ce point $F(u, v)$.

Il est tout à fait digne de remarque que l'on puisse, comme le montre l'auteur, faire dépendre la question d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré, comme l'avait fait Jacobi dans le cas particulier des géodésiques, cas où F est nul. Le cas où F est constant est celui des cercles géodésiques. Les analogies avec les lignes géodésiques sont d'ailleurs nombreuses et même dans le cas où F est une fonction quelconque, les courbes (F) fournissent la solution de certains problèmes de variations. Le lecteur admirera dans ce Chapitre comment, avec l'appareil le plus simple, sans compliquer pour ainsi dire les formules, en conservant presque toutes leurs propriétés, l'auteur a su pousser la question à sa suprême généralisation.

7. Signalons encore deux Chapitres qui complètent et parachèvent cette féconde théorie des lignes géodésiques, qui aura fourni d'aussi beaux motifs à l'auteur. D'abord le Chapitre qui traite de la courbure géodésique en général et contient le beau théorème de Gauss d'après lequel la courbure totale d'un triangle géodésique est égale à l'excès sur π de la somme de ses angles. En second lieu, le Chapitre consacré aux triangles géodésiques et au théorème de Gauss sur les petits triangles géodésiques. L'auteur est naturellement amené à parler des nombreuses et profondes recherches qui ont été faites dans ces vingt dernières années sur les triangles géodésiques.

Dans son Mémoire inséré en 1868 aux *Abhandlungen de Berlin* et intitulé : *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke*, M. Christoffel a émis, entre autres idées neuves, celle de classer les surfaces d'après le nombre des relations pouvant exister entre les six éléments (angles et côtés) d'un triangle géodésique; il proposait quatre classes selon qu'il existait 0, 1, 2 ou 3 relations entre ces six éléments. L'idée était ingénieuse et profonde puisqu'elle tendait à classer les surfaces d'après un de leurs éléments les plus essentiels, les triangles géodésiques. Malheureusement cette classification de Christoffel conduit pratiquement

à un résultat qui lui ôte beaucoup de son intérêt. En 1882, M. Weingarten a en effet démontré qu'il n'y a en réalité que trois classes et non pas quatre et que les troisième et quatrième classes de Christoffel n'en forment qu'une, à savoir celle des surfaces de courbure constante. Plus tard, M. von Mangoldt a fait voir que la seconde classe de Christoffel ne comprend que les surfaces applicables sur les surfaces de révolution. De la sorte, en dehors des cas des surfaces de courbure constante et des surfaces applicables sur des surfaces de révolution, il n'y a généralement aucune relation entre les six éléments d'un triangle géodésique. M. Darboux tire de considérations géométriques aidées de développements en série une démonstration relativement courte de ces propositions si cachées.

Livre VII. — *La déformation des surfaces.*

8. Poinsot a mis, en tête de sa *Théorie nouvelle de la rotation des corps,* cette première phrase : « *Voici une des questions qui m'ont le plus occupé et, si l'on me permet de parler ainsi, une des choses que j'ai le plus désiré savoir en Dynamique.*

Combien de géomètres en ont pu dire autant de la déformation des surfaces, à commencer par l'illustre Gauss qui se proposa le premier le problème et lui apporta les contributions les plus essentielles. Pas un n'y a trouvé cette satisfaction complète et presque orgueilleuse qui éclate dans les pages où l'habile et élégant Poinsot a exposé sa désirée et presque irréprochable solution.

Le progrès de la Science recule chaque jour l'accès de ces satisfactions parfaites. On sait aujourd'hui aller plus vite au fond des choses et ce sont les vraies difficultés que l'on étreint. La déformation des surfaces est de celles-là. L'impossibilité aujourd'hui reconnue d'intégrer l'équation différentielle du problème dans le cas général, le nombre si restreint des cas où cette intégration aboutit, les difficultés mêmes des questions connexes, tout cela, heureusement, n'a pas découragé les géomètres.

On a étudié le problème sous les faces les plus diverses; à son propos on a introduit les conceptions les plus ingénieuses et les plus imprévues, créé des méthodes fécondes; aussi est-il vrai

de dire que sur cette équation inintégrable, sur ce roc stérile, les géomètres les plus illustres ont élevé un monument génial, un temple à la Géométrie cachée, *Deo ignoto!*

9. L'étude de la déformation des surfaces implique des calculs considérables qui seraient inabordables sans l'emploi des paramètres différentiels dont l'étude remonte à Lamé et Beltrami. C'est par l'étude de ces paramètres que s'ouvre le Livre VII. L'auteur les fait immédiatement servir à la solution de ce problème résolu par O. Bonnet : deux surfaces étant données, reconnaître si elles sont applicables l'une sur l'autre.

D'après le célèbre théorème de Gauss, la courbure totale doit être la même aux points correspondants. Alors s'offre naturellement la distinction du cas où la courbure totale est partout constante et a même valeur pour les deux surfaces. Il se trouve qu'en ce cas l'applicabilité s'ensuit d'elle-même et que cette applicabilité peut être réalisée d'une infinité de façons. La solution du problème repose sur la connaissance supposée des géodésiques de la surface. Or, d'autre part, la détermination des géodésiques d'une surface donnée, dont la courbure est constante, dépend d'une équation de Riccati. C'est donc d'équations de Riccati que dépendra l'application effective l'une sur l'autre de deux surfaces qui ont même courbure constante.

Si la courbure des deux surfaces Σ, Σ_1 n'est pas constante, l'égalité des deux courbures aux points correspondants fournira une première équation

$$\varphi(u, v) = \varphi_1(u_1, v_1).$$

Si $\psi(u, v)$ est un autre invariant, représenté par $\psi_1(u_1, v_1)$ sur la seconde surface, on devra avoir

$$\psi(u, v) = \psi_1(u_1, v_1),$$

et alors, en représentant par $\Delta\varphi$, $\Delta(\varphi, \psi)$, $\Delta\psi$ les paramètres différentiels relatifs aux fonctions φ, ψ sur les surfaces Σ et en mettant l'indice 1 pour les mêmes invariants sur la surface Σ_1, l'applicabilité exige qu'on ait

$$\Delta\varphi = \Delta_1\varphi_1, \qquad \Delta(\varphi, \psi) = \Delta_1(\varphi_1, \psi_1), \qquad \Delta\psi = \Delta_1\psi_1;$$

ces équations supposées vérifiées assurent du reste l'applicabilité.

Tout revient donc à trouver un invariant $\psi(u, v)$, distinct de la courbure φ. On pourra prendre $\psi = \Delta\varphi$, $\psi_1 = \Delta_1\varphi_1$. Il n'y aurait d'objection que si l'on avait $\Delta\varphi = \pi(\varphi)$. Mais la théorie des paramètres différentiels vient encore aisément à bout de ce cas particulier.

Comme application, l'auteur étudie les conditions d'applicabilité d'une surface réglée sur une surface de révolution. Il cherche ensuite dans quel cas deux surfaces réglées peuvent s'appliquer l'une sur l'autre sans correspondance des génératrices rectilignes. Le résultat, c'est que ces deux surfaces sont toutes deux applicables sur une même surface réglée du second degré, avec correspondance des génératrices rectilignes aux génératrices rectilignes de l'un des systèmes de la quadrique.

10. Après ces intéressantes applications, l'auteur pénètre au cœur du sujet en reprenant la démonstration des belles et capitales formules que Gauss a données dans son Mémoire : *Disquisitiones circa superficies curvas.*

M. Darboux rappelle d'abord que la question de la détermination des surfaces applicables sur une surface donnée ou qui ont un ds^2 donné fut mise au concours en 1859 par l'Académie des Sciences. « *Il est curieux toutefois,* ajoute-t-il, *de remarquer qu'une étude attentive du Mémoire de Gauss devait conduire immédiatement et sans effort à l'équation aux dérivées partielles du second ordre des surfaces applicables sur une surface donnée* ». Et, en effet, après avoir établi les formules de Gauss, M. Darboux montre qu'il suffit d'un léger complément pour obtenir un ensemble équivalent aux fameuses formules de Codazzi.

Il suffit, pour cela, de prendre comme variables auxiliaires les trois déterminants D, D′, D″ de Gauss qui interviennent dans l'équation différentielle

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0$$

des lignes asymptotiques. Par l'élimination de ces trois auxiliaires on arrive, au contraire, à l'équation aux dérivées partielles du second ordre que vérifient les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface. Il y a du reste bien des façons de former cette équa-

tion du second ordre, aussi bien que celle que vérifie le rayon vecteur d'un point de la surface. L'auteur lui-même, dans son Mémoire : *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces* a indiqué, il y a déjà longtemps, une méthode très simple qui consiste à exprimer que le ds^2

$$dx^2 + dy^2 = ds^2 - dz^2$$

convient au plan et le ds^2

$$d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2 = \frac{ds^2 - dr^2}{r^2}$$

à la sphère de rayon 1. Ces méthodes diverses font l'objet du Chapitre IV.

11. Le Chapitre qui suit est un des plus importants de cette Partie; il a trait à l'étude fondamentale de l'équation du second ordre dont nous parlons plus haut et au rôle que jouent les caractéristiques qui, dans l'espèce, sont les asymptotiques de la surface. Le problème de Cauchy est la clef de cette théorie; selon la façon dont on le présente, il prend des formes et des interprétations géométriques différentes et donne ainsi la solution de questions très variées. Comme par exemple : Une surface (S) étant donnée, la déformer de sorte qu'une courbe (Γ) tracée sur (S) vienne coïncider avec une courbe (D) donnée. Ou bien encore :

Étant donnée une courbe (D) et une développable (Δ) circonscrite à (D) est-il possible de déformer une surface S de sorte qu'elle vienne passer par (D) tout en étant tangente à (Δ) en chaque point de la courbe (D)? Si (D) est l'arête de rebroussement de Δ, il y a impossibilité, à moins que la courbe (D) ne vérifie une certaine relation de la forme

$$\Phi\left(\rho, \frac{d\rho}{ds}, \tau, \frac{d\tau}{ds}, \frac{d^2\tau}{ds^2}, \frac{d^3\tau}{ds^3}\right) = 0$$

où s, ρ, τ sont l'arc et les deux courbures de la courbe (D). Comme alors la courbe (D) est une asymptotique sur la surface, on voit que les asymptotiques des surfaces applicables sur une surface donnée vérifient toutes une même relation de la forme ci-dessus $\Phi = 0$. Si la courbure de la surface est constante et égale à $-\frac{1}{a^2}$,

l'équation ci-dessus se réduit à la forme simple

$$\tau = a.$$

Nous indiquons en passant cet exemple dans son détail pour bien marquer combien l'auteur sait à propos appliquer les théories les plus générales et choisir dans le nombre les applications qu'elles donnent avec le plus d'élégance et de facilité. Au fond, il n'y a pas de théorie générale si parfaite qu'elle s'applique également à tout : chacune s'adapte à des problèmes d'un caractère déterminé, et c'est l'art du géomètre de savoir les choisir.

Le rôle que jouent les asymptotiques dans la question de la déformation amène l'auteur à se poser le problème suivant :

Un ds^2 étant donné

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

que faut-il pour que u, v soient les paramètres des asymptotiques de l'une des surfaces qui admettent ce ds^2? Les paramètres différentiels fournissent les deux équations de condition sous une forme relativement simple.

Parmi les conséquences qu'en tire l'auteur, signalons celle-ci : La connaissance d'une famille d'asymptotiques d'une surface qui a un ds^2 donné entraîne la connaissance de la seconde famille.

12. Après un élégant Chapitre sur la déformation des surfaces réglées, question tout à fait classique et que les recherches d'une quantité de géomètres semblent avoir épuisée, l'auteur aborde l'étude beaucoup plus neuve des beaux théorèmes où M. Weingarten a fixé le rôle, dans le problème de la déformation, des surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation. Après avoir démontré par l'Analyse et par la Géométrie ces curieuses propositions, M. Darboux fait voir comment elles conduisent à la détermination complète des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

Comme les propositions précédentes mettent en jeu la surface des centres, l'auteur, en vue de poursuivre diverses conséquences de ces propositions, consacre au préalable tout un Chapitre à l'étude de la surface des centres dans le cas le plus général. Il donne notamment un Tableau de formules qui seront de la plus

grande utilité aux géomètres qui voudront entreprendre sur ce sujet des recherches de Géométrie générale. M. Darboux en tire diverses propositions concernant l'ordre du contact des deux surfaces de centres de deux surfaces qui ont elles-mêmes un contact d'un ordre donné.

Le cas où les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la surface des centres amène cette remarque de Ribaucour : que la différence des rayons de courbure principaux est alors constante.

Au même ordre d'idées peuvent être rattachés les théorèmes de Laguerre et de Beltrami concernant les congruences de normales définies en fonction du point où chaque normale perce une surface donnée. Ces considérations trouvent une extension dans les systèmes cycliques qui, après les recherches de Ribaucour et de M. Darboux, ont pris une place si importante dans le problème de la déformation.

Si des cercles tracés chacun dans le plan tangent d'une surface Σ *et formant, par suite, une congruence ou ensemble à deux paramètres, sont normaux à une famille de surfaces, ils restent encore normaux à une famille de surfaces lorsque la surface* Σ *se déforme en entraînant ses plans tangents avec les cercles qui y sont tracés.* Ce beau théorème de Ribaucour a été complété de la manière la plus élégante par cet autre théorème de M. Darboux :

Pour trouver le système cyclique le plus général formé de cercles situés dans les plans tangents d'une surface Σ, *on prendra une surface quelconque* Σ' *applicable sur* Σ, *et l'on construira tous les cercles* C' *qui sont à l'intersection des plans tangents à* Σ' *et d'une sphère fixe de rayon nul. Si la surface* Σ' *se déforme pour venir coïncider avec* Σ, *la congruence des cercles* C' *se transforme dans le système cyclique cherché.*

Par cette construction, la recherche des systèmes cycliques dont les plans des cercles enveloppent une surface Σ donnée se trouve ramenée à celle des surfaces applicables sur cette surface.

Après cette belle digression sur la Géométrie générale, M. Darboux revient sur les surfaces de Weingarten pour leur appliquer les considérations qu'il vient de développer. Signalons en premier

lieu le théorème d'Halphen concernant ces surfaces, la détermination par quadratures de leurs lignes de courbure et la propriété si curieuse de correspondance des lignes asymptotiques sur la surface des centres, dont l'auteur nous montre la véritable origine; elle réside en ce fait que ces lignes asymptotiques sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles dont dépend le problème de la déformation. Le Chapitre se termine par une détermination directe et explicite des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution.

13. Parmi les surfaces de Weingarten, celles dont la courbure totale ou la courbure moyenne est constante avaient depuis longtemps attiré l'attention des géomètres. M. Bonnet notamment avait démontré que toute surface à courbure constante est comprise entre deux surfaces qui lui sont parallèles et dont la courbure moyenne est constante. L'application à ces surfaces des propositions de Weingarten ne pouvait manquer de conduire à des méthodes élégantes et à des résultats importants : c'est à quoi l'auteur s'attache dans les Chapitres X et XI, ce dernier particulièrement consacré à l'étude de la surface de révolution à courbure constante négative appelée *pseudo-sphère*. Cette surface, engendrée par la révolution de la tractrice, possède des géodésiques pleines de propriétés curieuses qui ont été utilisées par divers géomètres pour donner une image sensible des conceptions de la Géométrie plane non euclidienne.

14. Les surfaces à courbure constante $-\frac{1}{a^2}$ sont des surfaces de Weingarten puisque leurs rayons de courbure principaux sont liés par la relation

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{a^2}; \tag{1}$$

mais, comme elles sont applicables sur des surfaces de révolution, chacune peut aussi être regardée comme une nappe de la surface des centres d'une autre surface de Weingarten. La relation qui lie les rayons de courbure de cette nouvelle surface de Weingarten est la suivante

$$R + R' = a \tag{2}$$

On est donc amené ainsi à appliquer, sous une autre forme, aux surfaces de courbure constante les propositions de Weingarten. Cette voie fait retrouver une série de belles découvertes dues à Bianchi, Lie, Ribaucour, Backlund.

D'abord, si l'on part d'une surface Σ à courbure constante $-\frac{1}{a^2}$, et si l'on construit une famille (F) de géodésiques dont les tangentes soient normales à une surface de Weingarten pour laquelle est vérifiée la relation (2), on trouve que la seconde nappe de la surface focale est une autre surface Σ' de même courbure constante $-\frac{1}{a^2}$. Le passage de Σ à Σ' constitue une transformation due à Bianchi, qui permet de déduire d'une surface à courbure constante $-\frac{1}{a^2}$ une autre surface de même nature; la question se ramène à la détermination de la famille (F) de géodésiques. D'après Lie, cette détermination n'exige qu'une quadrature qui introduit dans la question une constante arbitraire. En réitérant l'opération, on pourra donc obtenir des surfaces à courbure constante dépendant d'autant de constantes arbitraires que l'on voudra.

M. Darboux fait justement observer que, bien antérieurement à Bianchi, Ribaucour avait fait connaître une proposition qui contenait virtuellement celle de ce géomètre. Si autour d'un point d'une surface de courbure totale constante et négative $-\frac{1}{a^2}$ on décrit, dans le plan tangent, un cercle C de rayon a, les cercles C ainsi construits forment une congruence et sont normaux à une famille de surfaces. Ces surfaces ont leur courbure constante et égale à $-\frac{1}{a^2}$, comme la proposée. Elles présentent en outre cette particularité de constituer l'une des familles de surfaces d'un système triple orthogonal. On retombe ainsi sur une proposition générale relative aux systèmes cycliques, qui ont fait l'objet d'une étude approfondie au Tome II de l'Ouvrage et dont nous avons eu à reparler déjà au n° 12.

Les conséquences géométriques des théorèmes de Ribaucour et de Bianchi sont si nombreuses, dit l'auteur, qu'elles introduisent peut être quelque confusion. Aussi, pour donner plus de netteté à son exposition, a-t-il recours à la méthode analytique fondée,

bien entendu, sur l'emploi du trièdre de référence mobile. Il est ainsi conduit, entre autres résultats, à la transformation de Backlund, qui se ramène, au fond, à une transformation de Bianchi accompagnée d'une autre transformation due à M. Lie.

Dans le Chapitre XIII, l'auteur applique les méthodes précédentes à des surfaces de courbure constante négative $-\frac{1}{a^2}$ particulières. Notons, en passant, l'élégante méthode par laquelle est traité le problème qui consiste à exprimer qu'une surface, rapportée à ses lignes de courbures, a les lignes de courbure d'un système sphériques. L'application du résultat obtenu aux surfaces de courbure constante négative rappelle les recherches d'Enneper, complétées par Dobriner, sur les surfaces à courbure constante dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques. Partant de ces surfaces, M. Darboux se propose ensuite d'en déduire d'autres, par l'application des transformations de Lie et de Bianchi. La solution de ce problème donne lieu à des développements analytiques du plus vif intérêt pour lesquels nous ne pouvons que renvoyer le lecteur au Livre lui-même.

15. Les rapprochements entre les surfaces à courbure constante et les surfaces minima avaient déjà occupé l'auteur dans des Communications faites à l'Académie des Sciences et réimprimées il y a quelques années dans les *Annales scientifiques de l'École Normale*. L'auteur reprend cet intéressant sujet dans le XIVe et dernier Chapitre du Livre VII. La base de ces rapprochements réside en la remarque suivante : Si l'on cherche les surfaces minima en Géométrie non euclidienne, lorsque l'absolu est une quadrique quelconque, on est conduit à l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \sin 2\omega;$$

or c'est précisément de cette même équation que dépend la détermination sous forme finie des surfaces à courbure constante.

Ces derniers Chapitres du Livre VII forment, comme on voit, dans leur ensemble une belle monographie des surfaces de courbure constante où se trouvent condensés, sous la forme la plus élégante et la plus compréhensive, les résultats acquis à la Science

par les géomètres antérieurs et par l'auteur lui-même. C'est là un digne pendant à la belle Théorie des surfaces minima sur laquelle se terminait le premier Volume.

Livre VIII. — *Déformation infiniment petite et représentation sphérique.*

16. L'auteur s'exprime en ces termes au début du Livre VIII : « *Il ressort avec évidence des développements contenus dans les Chapitres précédents que, jusqu'ici, le problème de la déformation des surfaces n'a pu être résolu d'une manière complète que dans un petit nombre de cas. Pour faire connaître tout ce qu'il y a d'essentiel dans les travaux des géomètres sur ce beau et difficile sujet, il nous reste à exposer toute une série de recherches relatives à la déformation infiniment petite, recherches qui conduisent, soit dans la théorie des surfaces, soit dans celle des congruences, à des propositions du plus haut intérêt.* »

Expliquons d'abord en quoi consiste la déformation infiniment petite.

Soit S une surface que l'on déforme infiniment peu, c'est-à-dire que l'on amène à acquérir la forme d'une surface S′ infiniment voisine de S et applicable sur S. Les coordonnées d'un point M de S étant x, y, z, celles du point correspondant M′ sur la surface S′ auront les expressions suivantes :

$$x + \varepsilon x_1, \qquad y + \varepsilon y_1, \qquad z + \varepsilon z_1,$$

où ε désigne une constante infiniment petite et x_1, y_1, z_1 des fonctions de x, y, z. En exprimant l'applicabilité l'une sur l'autre des surfaces S et S′ on est conduit à l'équation

$$(1) \qquad dx\,dx_1 + dy\,dy_1 + dz\,dz_1 = 0.$$

Mais cette équation exprime aussi que la surface S_1, lieu du point $M_1(x_1, y_1, z_1)$, correspond point par point à la surface S avec orthogonalité des éléments; d'autre part, en posant

$$X = x - x_1, \qquad Y = y - y_1, \qquad Z = z - z_1,$$
$$X_1 = x + x_1, \qquad Y_1 = y + y_1, \qquad Z_1 = z + z_1,$$

l'équation (1) s'écrit aussi

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2,$$

elle exprime encore l'applicabilité l'une sur l'autre des deux surfaces Σ et Σ_1 qui sont respectivement le lieu des points (X, Y, Z) et (X_1, Y_1, Z_1).

Ainsi se trouve établi un double lien entre la déformation infiniment petite d'une part, la correspondance ponctuelle avec orthogonalité des éléments linéaires correspondants en deuxième part et, en troisième part, avec la détermination de couples de surfaces applicables.

L'auteur montre, dans le Chapitre I, que ces trois problèmes équivalents entre eux sont aussi équivalents à un quatrième : *Trouver une surface* S_0 *telle que les lignes asymptotiques de* S *aient comme perspective conique sur* S_0 *un réseau conjugué.* Cette transformation du problème a l'avantage d'en rendre intuitives certaines solutions : tel est le cas où S est une surface du second degré.

Le cas particulier où S est une sphère conduit à un résultat élégant pour la définition des surfaces S_1 susceptibles de correspondre ponctuellement à S avec orthogonalité des éléments; il se trouve, en effet, que la surface S_1 la plus générale est alors la surface moyenne d'une congruence isotrope. On retrouve ainsi ces congruences si curieuses qui s'étaient déjà présentées dans la théorie des surfaces minima.

17. Le rôle que jouent les lignes asymptotiques dans la résolution de l'équation (1) amène naturellement une méthode qui consiste à supposer que, dans cette équation (1), x, y, z ont été exprimées en fonction des paramètres des lignes asymptotiques de la surface S. Les belles formules dues à M. Lelieuvre seront la clef de cette seconde méthode. Si θ_1, θ_2, θ_3 sont trois solutions d'une même équation à invariants égaux

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha\, \partial \beta} = \lambda \theta.$$

les quadratures suivantes

$$(3)\quad \begin{cases} x = \int \left(\theta_2 \dfrac{d\theta_1}{d\alpha} - \theta_1 \dfrac{d\theta_2}{d\alpha}\right) d\alpha - \int \left(\theta_2 \dfrac{d\theta_1}{d\beta} - \theta_1 \dfrac{d\theta_2}{d\beta}\right) d\beta, \\ y = \int \left(\theta_3 \dfrac{d\theta_1}{d\alpha} - \theta_1 \dfrac{d\theta_3}{d\alpha}\right) d\alpha - \int \left(\theta_3 \dfrac{d\theta_1}{d\beta} - \theta_1 \dfrac{d\theta_3}{d\beta}\right) d\beta, \\ z = \int \left(\theta_1 \dfrac{d\theta_2}{d\alpha} - \theta_2 \dfrac{d\theta_1}{d\alpha}\right) d\alpha - \int \left(\theta_1 \dfrac{d\theta_2}{d\beta} - \theta_2 \dfrac{d\theta_1}{d\beta}\right) d\beta \end{cases}$$

fournissent les coordonnées x, y, z d'un point d'une surface en fonction des paramètres des lignes asymptotiques. Les cosinus directeurs de la normale sont proportionnels à θ_1, θ_2, θ_3 et c, c', c'' désignant ces cosinus directeurs, on a

$$(4)\quad \theta_1 = c\sqrt{-RR'}, \qquad \theta_2 = c'\sqrt{-RR'}, \qquad \theta_3 = c''\sqrt{-RR'},$$

où R, R′ sont les rayons de courbure principaux.

Si l'on part alors de la représentation de la surface S par les formules (3) pour résoudre l'équation (1), on trouve que les coordonnées x_1, y_1, z_1 d'un point de la surface S_1 s'expriment par les quadratures

$$(5)\quad \begin{cases} x_1 = \int \left(\theta_1 \dfrac{d\omega}{d\alpha} - \omega \dfrac{d\theta_1}{d\alpha}\right) d\alpha - \int \left(\theta_1 \dfrac{d\omega}{d\beta} - \omega \dfrac{d\theta_1}{d\beta}\right) d\beta, \\ y_1 = \int \left(\theta_2 \dfrac{d\omega}{d\alpha} - \omega \dfrac{d\theta_2}{d\alpha}\right) d\alpha - \int \left(\theta_2 \dfrac{d\omega}{d\beta} - \omega \dfrac{d\theta_2}{d\beta}\right) d\beta, \\ z_1 = \int \left(\theta_3 \dfrac{d\omega}{d\alpha} - \omega \dfrac{d\theta_3}{d\alpha}\right) d\alpha - \int \left(\theta_3 \dfrac{d\omega}{d\beta} - \omega \dfrac{d\theta_3}{d\beta}\right) d\beta; \end{cases}$$

dans ces formules, ω désigne la solution générale de l'équation (2), en sorte que l'intégration de cette équation de Laplace à invariants égaux équivaut à la résolution générale de l'équation (1) et des divers problèmes de Géométrie qui s'y rattachent.

Les formules précédentes et les propositions géométriques qui en découlent prêtent à des développements étendus qu'augmenteront sûrement les recherches ultérieures des géomètres. Signalons, par exemple, les propriétés des réseaux plans qui sont la perspective des lignes asymptotiques d'une surface.

On ne manquera pas d'observer que les formules (3) mettent en jeu trois fonctions θ_1, θ_2, θ_3 qui sont proportionnelles aux cosinus directeurs de la surface. Elles fournissent la solution de ce

problème : Déterminer une surface dont la représentation sphérique, à la manière de Gauss, des lignes asymptotiques soit un réseau de courbes sphériques données.

Par là la représentation sphérique des lignes asymptotiques de la surface se trouve étroitement liée aux problèmes de Géométrie attachés à l'équation (1).

M. Darboux applique les formules (3) et (5) au cas des surfaces de courbure constante -1. Les formules (4) prouvent qu'alors θ_1, θ_2, θ_3 sont précisément les cosinus directeurs et l'équation (2) admet ainsi trois solutions dont la somme des carrés est constante. Entre autres résultats, signalons le suivant, particulièrement saillant : *Lorsqu'on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface de courbure constante* -1, *on sait aussi le résoudre pour toutes les surfaces de même courbure qu'on peut en déduire par l'application de la transformation de M. Bianchi.*

Les formules (5) témoignent que les lignes $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$ figurent sur la surface S_1 un réseau conjugué à invariants égaux. Cette remarque a une réciproque d'après laquelle, si l'on connaît sur une surface (S_1) un réseau conjugué à invariants égaux, on pourra déterminer par de simples quadratures une surface (S) correspondant à (S_1) avec orthogonalité des éléments et dont les asymptotiques ont pour image sur (S_1), précisément le réseau conjugué. Il en résulte immédiatement que : *A tout réseau conjugué à invariants égaux tracé sur une surface correspond une déformation infiniment petite parfaitement déterminée de cette surface.*

18. En conservant les notations précédentes, si l'on pose

$$a = \frac{\theta_1}{\omega}, \qquad b = \frac{\theta_2}{\omega}, \qquad c = \frac{\theta_3}{\omega},$$

on trouve que les quantités x, y, z, x_1, y_1, z_1 sont liées par les équations

$$(6) \quad dx = c\,dy_1 - b\,dz_1, \qquad dy = a\,dz_1 - c\,dx_1, \qquad dz = b\,dx_1 - a\,dy_1.$$

Posons alors

$$(7) \quad X = x - cy_1 - bz_1, \qquad Y = y - az_1 - cx_1, \qquad Z = z - bx_1 - ay_1;$$

le point (X, Y, Z) ainsi défini décrit une surface (Σ) tandis que le point (a, b, c) en décrit une autre (A), et l'on vérifie aisément, en tenant compte des relations (6), que les surfaces (A) et (Σ) se correspondent avec orthogonalité des éléments.

Les relations géométriques entre les surfaces (S), (S_1), (Σ), (A) sont des plus nombreuses : ainsi (S) et (Σ) sont les focales d'une congruence et les lignes asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces focales. Les congruences que l'on obtient ainsi sont les plus générales parmi celles qui présentent cette dernière propriété.

On peut observer que les surfaces (S), (S_1) qui se correspondent avec orthogonalité des éléments sont dans une relation qui est symétrique par rapport aux deux surfaces. En échangeant les rôles que les formules ci-dessus font jouer aux surfaces (S), (S_1), on arrivera à définir deux autres surfaces (A_1) et (Σ_1) analogues à (A) et (Σ).

On observera à cet effet que, comme contre-partie des relations (6), on a des relations de la forme

$$(8)\qquad dx_1 = c_1 dy - b_1 dz, \qquad dy_1 = a_1 dz - c_1 dx, \qquad dz_1 = b_1 dx - a_1 dy,$$

et l'on posera

$$(9)\qquad \begin{cases} X_1 = x - c_1 y + b_1 z, \qquad Y_1 = y - a_1 z + c_1 x, \\ Z_1 = z - b_1 x + a_1 y. \end{cases}$$

Le point (X_1, Y_1, Z_1) décrit (Σ_1) et le point (a_1, b_1, c_1) décrit (A_1).

Les surfaces (A_1) et (Σ_1) se correspondent avec orthogonalité des éléments comme (A) et (Σ). Les surfaces (A) et (A_1) sont polaires réciproques par rapport à une sphère de rayon $\sqrt{-1}$, ayant pour centre l'origine des coordonnées.

Observons maintenant que dans le système des six surfaces (S), (S_1), (A), (A_1), (Σ), (Σ_1), le couple (S), (S_1) n'est pas le seul couple de surfaces qui se correspondent avec orthogonalité des éléments.

Nous avons encore les couples (A), (Σ) et (A_1), (Σ_1). La méthode de déduction déjà appliquée au couple (S), (S_1) peut être appliquée aux deux autres et l'on obtient ainsi six nouvelles surfaces (S_2), (S_3), (A_2), (A_3), (Σ_2), (Σ_3) formant avec les six pre-

mières une très remarquable configuration de douze surfaces dont les relations sont réunies dans le Tableau suivant :

Couples de surfaces qui se correspondent point par point.

1° Avec orthogonalité des éléments.		2° Par plans tangents parallèles.		3° Par polaires réciproques.		4° Comme focales d'une même congruence rectiligne.	
(S)	(S_1)	(A)	(S_1)	(A)	(A_1)	(S)	(Σ)
(A)	(Σ)	(A_2)	(S)	(S_1)	(Σ_3)	(S_1)	(Σ_1)
(A_1)	(Σ_1)	(Σ)	(Σ_3)	(S)	(Σ_2)	(A)	(A_3)
(A_2)	(Σ_2)	(Σ_1)	(Σ_2)	(Σ_1)	(S_2)	(A_1)	(A_2)
(A_3)	(Σ_3)	(S_2)	(A_3)	(S_2)	(Σ)	(Σ_3)	(S_3)
(S_2)	(S_3)	(S_3)	(A_2)	(A_2)	(A_3)	(Σ_2)	(S_2)

Le système des douze surfaces précédentes forme une configuration complexe où abondent les faits et les propositions géométriques. Entre autres déductions qu'on en peut tirer, signalons d'abord celle-ci :

Si l'on sait résoudre le problème de la déformation infiniment petite pour une surface on sait résoudre le même problème pour toute surface qui s'en déduit par homographie ou par dualité.

Parmi les correspondances entre les diverses surfaces, celles qui existent entre les surfaces (S), (S_1), (S_2), (S_3) sont particulièrement remarquables. On passe du couple de surfaces (S), (S_1) décrites par les points $M(x, y, z)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ au couple de surfaces (S_2), (S_3) décrites par les points $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ par la curieuse transformation suivante

$$(10) \qquad \frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{y_3}{y_2} = \frac{z_3}{z_2} = \frac{-1}{xx_1 + yy_1 + zz_1},$$

qui fait correspondre au couple de points (M, M_1) le couple de points (M_2, M_3). La forme des relations (10) rappelle les formules de l'inversion. M. Darboux donne à cette transformation le nom d'*inversion composée*.

L'inversion composée possède la propriété fondamentale suivante : Elle transforme un couple de surfaces qui se correspon-

dent avec orthogonalité des éléments en un autre couple analogue.

L'application de ces résultats généraux à des cas particuliers, et notamment au cas des surfaces à courbure constante, fournit des propositions nombreuses pleines d'intérêt et d'élégance.

19. Le roulement l'une sur l'autre de deux surfaces est lié à la théorie des surfaces applicables par le théorème de Ribaucour relatif aux mouvements à deux paramètres que l'on obtient en faisant rouler l'une sur l'autre deux surfaces applicables. Les considérations développées dans les Chapitres précédents fournissent de nouveaux éléments pour l'étude de cette intéressante question.

D'après le théorème de Ribaucour, on sait que déformer une surface revient à lui imprimer un certain mouvement à deux paramètres dans lequel elle roulera sur une surface applicable. La solution de ce problème introduit trois paramètres qui, par un de ces retours curieux si fréquents dans cet Ouvrage, ne sont autres que ceux qu'amènerait précisément l'emploi des formules de Gauss.

Lorsque deux surfaces se correspondent point par point, il y a toujours un réseau conjugué sur l'une qui a pour image sur l'autre un réseau conjugué. Le cas où la correspondance ponctuelle entraîne l'application des deux surfaces ne fait pas exception et Ribaucour a signalé depuis longtemps le rôle de ces réseaux conjugués dans la déformation.

Si l'on désigne par u, v les paramètres de ces réseaux, il se trouve que les coordonnées (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) des deux points correspondants de deux surfaces applicables vérifient *une même équation* de Laplace de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} - \alpha \frac{\partial \theta}{\partial u} - \beta \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

l'expression $x^2 + y^2 + z^2 - x_1^2 - y_1^2 - z_1^2$ est une septième solution de cette équation. Cette propriété n'est certainement pas caractéristique des correspondances ponctuelles qui entraînent l'applicabilité, pas plus d'ailleurs que la propriété qui consiste dans l'égalité des courbures; mais, malgré le défaut de réciproque,

cette proposition trouve dans la théorie de la déformation un rôle utile à jouer [1].

Elle confine, en effet, à cette dépendance que l'on a déjà reconnue entre les systèmes cycliques et le problème de la déformation. L'étude de cette dépendance fait l'objet, du reste, d'un Chapitre spécial.

20. L'auteur reprend d'abord le problème de la détermination des surfaces qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure et établit, par un procédé qui se rattache directement à ses propres méthodes générales, ce théorème de Ribaucour :

Si deux surfaces Σ, Σ' *ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure, chacune peut être considérée comme normale aux cordes de contact d'une famille de sphères ayant leurs centres sur l'autre surface.*

De là résulte une nouvelle solution du problème proposé.

Si l'on considère alors deux surfaces Σ, Σ' se correspondant par parallélisme des plans tangents avec conservation des lignes de courbure (ce qui revient à dire qu'elles ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure) le plan qui contient les deux normales N, N′ (parallèles) en deux points correspondants enveloppe une surface Θ; maintenant que l'on déforme Θ, de manière que les plans tangents entraînent les deux normales N, N′, celles-ci resteront normales à deux surfaces Σ_1, Σ'_1 qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure, comme auparavant le couple des surfaces Σ et Σ'.

L'auteur montre que c'est dans les systèmes cycliques qu'il faut chercher la raison de cette dépendance inattendue entre le problème de la déformation et la question de la représentation sphérique des lignes de courbure. Nous ne pouvons malheureusement pas entrer ici dans le détail des nombreuses déductions géométriques qui sortent en foule de ces divers rapprochements et qui assurent, nous en avons la certitude, une ample moisson de découvertes à ceux qui suivront les voies si largement ouvertes par M. Darboux.

---

[1] Cette remarque paraît avoir échappé à M. P. Stæckel dans l'article : *Ueber Abbildungen* qu'il a inséré aux *Mathematische Annalen*, et où il a inexactement rapporté un théorème que j'ai moi-même donné sur cette question.

21. Signalons une nouvelle étude du problème de la représentation sphérique, l'application aux cas spéciaux si étudiés et toujours si nouveaux des surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques. L'auteur rappelle à leur sujet l'élégant théorème dû à M. Blutel, qui amène à conclure que l'on pourra toujours, par des constructions géométriques débarrassées de tout signe d'intégration, faire dériver toute surface à lignes de courbure sphériques des surfaces à lignes de courbure planes.

22. Dans les deux derniers Chapitres, l'auteur a condensé les belles et récentes recherches de M. Weingarten sur la déformation des surfaces. Dans son exposition, qui rattache les recherches de M. Weingarten aux principes généraux précédemment développés, M. Darboux fait usage d'une notion nouvelle, celle de *résultante* de plusieurs surfaces entre lesquelles on suppose exister une relation ponctuelle. Cette *résultante* est la surface lieu de l'extrémité du vecteur issu de l'origine, égal à la résultante de translation de tous les vecteurs issus de l'origine et aboutissant aux points correspondants des surfaces proposées. L'idée est simple et féconde, elle a été ultérieurement reprise par M. Thybaut dans son excellente thèse de Géométrie.

Le théorème fondamental, dans la méthode de M. Weingarten, est le suivant :

Soit p la distance de l'origine au plan tangent d'une surface Σ, $2q$ le carré du rayon vecteur issu de l'origine au point de contact, ρ', ρ'' les rayons de courbure principaux de Σ et $\varphi(p, q)$ une fonction de p, q : on suppose que Σ vérifie l'équation différentielle

$$(11) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} - (\rho' - \rho'')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\,\partial q} - \rho'\rho''\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0,$$

alors, si l'on considère la surface Θ, lieu du point (x, y, z), où

$$(12) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= \int X\,d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) - X\,d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right), \\ y &= \int Y\,d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) - Y\,d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right), \\ z &= \int Z\,d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right) - Z\,d\left(\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right), \end{aligned}\right.$$

X, Y, Z *étant les coordonnées du point de* Σ *et* C, C', C'' *les cosinus directeurs de la normale à* Σ *en ce point* (X, Y, Z), *la surface* Θ *admet comme* ds^2 *l'expression*

$$ds^2 = \left[d\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)\right]^2 - 2p\, d\left(\frac{\partial z}{\partial p}\right) d\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right) + 2q\left[d\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)\right]^2.$$

D'après cela, la recherche des surfaces dont le ds^2 a l'expression ci-dessus se ramène, par le moyen des quadratures (12), à la détermination des surfaces Σ qui vérifient l'équation (11).

En s'appuyant sur ce théorème, M. Weingarten et, avec lui, MM. Baroni et Goursat ont pu donner des cas nouveaux d'intégration du problème de la déformation des surfaces.

23. L'Ouvrage se termine par plusieurs Notes.

Dans la Note I, M. Picard a développé les principes de la méthode d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles, méthode qui s'est montrée si féconde entre ses mains et qui lui a fourni la clef de tant de démonstrations élégantes.

Dans la Note II, j'ai résumé les résultats essentiels de mon Mémoire sur les lignes géodésiques, inséré au *Recueil des Savants étrangers*. Le problème que je me suis proposé consiste à trouver tous les ds^2 dont le problème des géodésiques admet plusieurs intégrales quadratiques; de la solution de cette question j'ai déduit la solution complète de cet autre problème partiellement traité par M. Lie : Trouver les ds^2 dont les géodésiques admettent des transformations infinitésimales.

Dans la Note III, M. Cosserat, dont le nom revient fréquemment dans l'Ouvrage, a étudié une intéressante et délicate question de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Dans un Mémoire présenté en 1870 à l'Académie des Sciences, M. Moutard s'était proposé « l'étude minutieuse de la forme la plus élémentaire dont soit susceptible l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, à savoir : celle qui consiste en une relation unique entre les trois variables, deux fonctions arbitraires de quantités distinctes formées explicitement avec les trois variables,

et les dérivées en nombre limité de ces fonctions arbitraires, les arbitraires n'entrant d'ailleurs sous aucun signe d'intégration ». M. Moutard a énoncé le résultat suivant :

Celles des équations cherchées qui ne sont réductibles, par un changement de variables, ni aux équations linéaires de Laplace, ni à l'équation de Liouville, sont toutes, en exceptant deux cas particulièrement simples, réductibles à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(A e^z) - \frac{\partial}{\partial y}(B e^{-z}),$$

où A, B sont des fonctions des seules variables indépendantes, assujetties elles-mêmes à vérifier certaines conditions ; de plus, l'intégration de cette équation peut être ramenée à dépendre uniquement de celle d'une équation linéaire de la forme considérée par Laplace, à savoir :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \log A}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + AB z.$$

C'est au développement de cette proposition et à sa démonstration préalable qu'est consacrée la Note de M. Cosserat.

24. Viennent ensuite huit Notes de M. Darboux lui-même :

IV. *Sur la torsion des courbes gauches et sur les courbes à torsion constante.*

V. *Sur les formules d'Euler et sur le déplacement d'un solide invariable,* Note où apparaît l'utilité des *renversements,* c'est-à-dire des rotations de 180° autour des diverses droites de l'espace.

VI. *Sur une équation différentielle et sur les surfaces spirales.*

VII. *Sur la forme des lignes de courbure dans le voisinage d'un ombilic.* Cette Note présente un intérêt particulier par les exemples géométriques qu'elle contient de la discussion des solutions d'une équation différentielle dans le voisinage d'un point singulier.

VIII. *Sur les lignes asymptotiques et sur les lignes de courbure de la surface des ondes de Fresnel.*

L'auteur reprend dans cette Note une question dont il s'est plusieurs fois occupé tant dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* que dans les *Annales de l'École Normale*. On sait que Lie a démontré que les lignes asymptotiques de cette surface sont algébriques; elles s'obtiennent par l'intégration de l'équation d'Euler. M. Darboux rappelle les relations qui existent entre la surface de l'onde et le complexe quadratique de Chasles.

La question des lignes de courbure est beaucoup plus ardue. Ainsi l'on sait déterminer ces lignes quand la surface diffère peu d'une sphère, et ces lignes ne sont pas algébriques. Ce résultat a une certaine importance, car dans les applications, la surface de l'onde est sensiblement sphérique.

IX. *Sur la Géométrie cayleyenne et sur une propriété des surfaces à génératrice circulaire.*

X. *Sur les équations aux dérivées partielles.*

L'auteur résume dans cette Note les résultats personnels qu'il a autrefois obtenus sur cette difficile question et qui constituent un complément aux méthodes de Monge et d'Ampère, particulièrement précieux dans les cas où ces méthodes tombent en défaut.

XI. *Sur l'équation auxiliaire.*

Cette Note de quelques pages contient le germe d'une idée qui permettrait de reprendre, par une méthode toute différente de celles qui ont été suivies dans l'Ouvrage, le problème de la déformation infiniment petite. La même méthode peut, du reste, s'appliquer à tous les problèmes de Géométrie qui conduisent à des systèmes d'équations différentielles. Cette idée consiste en ceci : supposant connue une solution, chercher les solutions infiniment voisines. Si le problème se ramène à l'intégration d'une équation différentielle

$$f(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0,$$

on sera conduit à écrire l'équation auxiliaire relative à la solution $z + \delta z$ voisine de la solution z et pour laquelle p, q, r, s, t sont respectivement $p + \delta p$, ..., $t + \delta t$; cette équation auxiliaire

sera la suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\delta q + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}\delta t = 0.$$

C'est de la discussion de cette équation auxiliaire que dépend la recherche des solutions infiniment voisines d'une solution donnée.

Dès l'année 1883, l'auteur avait fait connaître le principe de cette nouvelle méthode; il l'applique dans cette Note à la recherche des surfaces infiniment voisines d'une surface donnée et qui forment avec elle une famille de Lamé; il l'applique ensuite au problème de la déformation et retrouve ainsi d'une manière nouvelle les propriétés les plus essentielles de la déformation infiniment petite.

25. Nous n'ajouterons rien à cette analyse déjà longue et cependant bien incomplète, tant est grande la variété et la richesse des matériaux amassés dans l'Ouvrage. Cette variété même suggère cependant une réflexion. L'appareil analytique employé, par un contraste frappant, est à peu près partout le même; l'équation de Laplace est, en effet, la forme analytique dominante.

Ce n'est donc pas dans l'Analyse qu'il faut chercher la source de cette si grande variété de faits géométriques; ils découlent plutôt d'inspirations puisées dans la considération attentive de la Géométrie elle-même. Et l'on reconnaît ainsi, une fois de plus, qu'en raison même de sa généralité, qui lui permet de donner le même vêtement aux faits les plus dissemblables, l'Analyse est par elle-même impuissante à créer cette diversité des formes qui est un des plus grands attraits de la Géométrie. Pour si élevée et si parfaite qu'elle soit, l'Analyse ne dispensera jamais ceux qui voudront s'appliquer à la Géométrie d'être des géomètres.

G. Kœnigs.

MÉLANGES.

REMARQUES SUR LES GROUPES DE TRANSFORMATIONS DES ÉQUATIONS LINÉAIRES;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans l'analyse que M. Vessiot a récemment faite, dans ce *Bulletin*, du Traité de M. Schlesinger (page 78 de ce Volume), se trouvent quelques remarques sur la théorie des groupes de transformation d'une équation linéaire, que je demande la permission de compléter. M. Vessiot indique très exactement la première forme que j'ai donnée aux deux théorèmes fondamentaux, le second énoncé contenant le mot *uniforme;* il aurait pu seulement ajouter que, pour les équations de la classe si étendue de M. Fuchs, je remarquais déjà que ce mot pouvait être remplacé par le mot *rationnel*. On sait que M. Vessiot a dans son excellente thèse approfondi ces questions; mais il abandonne l'extension du point de vue de Galois, telle que je l'avais proposée; il lui avait paru, comme à moi, impossible, en restant à ce point de vue, de combler la lacune qui subsistait dans le second théorème.

En rédigeant le troisième Volume de mon *Traité d'Analyse*, je repris l'étude du Travail de M. Vessiot, et des objections, relatives au point de vue *formel* où se plaçait l'auteur, se présentèrent à moi, et j'ai vu depuis qu'elles avaient été déjà faites par M. Klein dans ses Leçons. J'ai donc cherché, en restant à mon ancien point de vue, à lever les difficultés qui m'avaient autrefois arrêté, et je fus tout surpris de voir alors que la lacune pouvait être très facilement comblée, de sorte que, en ne faisant guère que calquer la marche de Galois, sauf les modifications commandées par la nature du sujet, et en n'empruntant rien à la théorie des groupes de M. Lie, on a une démonstration extrêmement simple et complètement rigoureuse des points fondamentaux de la nouvelle théorie : c'est celle que j'ai exposée dans le Tome III de mon *Traité* (p. 537) et que reproduit M. Schlesinger. Je dois dire que je persiste dans mon opinion sur les difficultés que j'ai signalées (*loc. cit.*, p. 544) relativement à la manière dont M. Vessiot in-

troduit la notion de groupe de transformations. Je n'entends pas d'ailleurs, par cette légère critique, diminuer en quoi que ce soit la valeur du beau travail de M. Vessiot, car, une fois admise la notion de groupe de transformations d'une équation linéaire, la théorie, telle qu'il la développe, se trouve présentée de la manière la plus pratique pour les applications.

Je me permettrai une dernière observation. Le point de vue auquel je me suis placé en 1883 dans la théorie des équations différentielles linéaires est tout à fait distinct de celui où s'était placé M. Lie dans des études antérieures sur l'intégration des équations différentielles, et mon illustre ami m'écrivait en 1885 : « Votre point de vue est tout à fait nouveau pour moi. » Il en est de même des généralisations si étendues et si intéressantes de la notion de groupes de transformations d'une équation différentielle linéaire faites par M. Drach dans plusieurs Notes et dans la remarquable Thèse qu'il soutiendra prochainement. On pourrait craindre qu'une confusion ne tendît aujourd'hui à s'établir entre deux catégories de questions en réalité très distinctes, mais l'étude des travaux originaux ne peut laisser aucun doute au lecteur attentif.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

RIEMANN. — Œuvres mathématiques, traduites par *L. Laugel*, avec une Préface de M. *Hermite* et un discours de M. *Félix Klein*. In-8°, xxxv-453 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1898.

L'édition française des *Œuvres de Riemann*, que nous devons à M. L. Laugel, recevra, nous en sommes assuré d'avance, le meilleur accueil auprès de nos lecteurs. Comme la deuxième édition allemande, elle se divise en trois Parties comprenant : la première, les Mémoires publiés par Riemann; la seconde, les Mémoires publiés après sa mort; la troisième Partie, les fragments posthumes que nous devons aux soins pieux des amis de l'illustre géomètre. Il nous suffira, pour compléter ce compte rendu et pour indiquer dans quelles conditions s'est faite la publication nouvelle, de reproduire ici la Préface dont M. Hermite a bien voulu la faire précéder.

« L'œuvre de Bernhard Riemann est la plus belle et la plus grande de l'Analyse à notre époque : elle a été consacrée par une admiration unanime, elle laissera dans la Science une trace impérissable. Les géomètres contemporains s'inspirent dans leurs travaux de ses conceptions, ils en révèlent chaque jour par leurs découvertes l'importance et la fécondité. L'illustre géomètre a ouvert dans l'Analyse comme une ère nouvelle qui porte l'empreinte de son génie. Elle s'ouvre avec un vif éclat par la dissertation inaugurale si célèbre qui porte pour titre : *Principes fondamentaux pour la Théorie générale des fonctions d'une grandeur variable complexe*. Riemann a été, dans cet ordre de recherches, le continuateur de Cauchy; il l'a dépassé, mais la reconnaissance des analystes associe étroitement à ses travaux ceux du premier élaborateur de la Théorie des fonctions, qui avait ouvert la voie et surmonté des obstacles longtemps infranchissables dont l'histoire de la Science a conservé la trace. Les principes de Riemann sont d'une originalité saisissante; ils donnent, comme instrument à l'Analyse, ces surfaces, auxquelles est attaché le nom de l'inventeur, qui sont à la fois une représentation et une

force nouvelles; ils mettent en pleine lumière, par les notions profondes de classes et de genres, la nature intime, restée jusqu'alors inconnue, des fonctions algébriques; ils conduisent à ce nombre extrêmement caché des modules ou des constantes qui appartiennent essentiellement à chaque classe; ils définissent, dans le sens le plus général, les intégrales de première, de seconde et de troisième espèce. Puis, une éclatante découverte : la solution, au moyen des fonctions Θ généralisées, du problème général de l'inversion de ces intégrales, problème résolu seulement dans des cas particuliers, et au prix des plus grands efforts, par Göpel et Rosenhain, par les intégrales hyperelliptiques de première classe, et par Weierstrass, pour les intégrales hyperelliptiques d'ordre quelconque. Jamais, dans aucune publication mathématique, le don de l'invention n'était apparu avec plus de puissance, jamais on n'avait admiré autant de belles conquêtes dans les plus difficiles questions de l'Analyse. Ces découvertes ont eu sur le mouvement de la Science une influence qui ne s'est pas fait attendre; par une heureuse fortune, qui a manqué à Cauchy, nos plus éminents géomètres contemporains se sont efforcés à l'envi de développer les principes de Riemann, d'en poursuivre les conséquences et d'appliquer ses méthodes. La notion de l'intégration le long d'une courbe avait été exposée, sous la forme la plus simple et la plus facile, avec de nombreuses et importantes applications qui en montraient la portée, dès 1825, dans un Mémoire de Cauchy ayant pour titre : *Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires;* mais elle reste dans les mains de l'illustre Auteur; elle n'est connue ni de Jacobi, ni d'Eisenstein, et l'on constate avec regret maintenant combien elle leur a fait défaut; il faut attendre vingt-cinq ans, jusqu'aux travaux de Briot et Bouquet, pour qu'elle prenne son essor et rayonne dans l'Analyse. La notion profonde des surfaces de Riemann, qui est d'un accès difficile, s'introduit sans retard et domine bientôt dans la Science pour y rester à jamais. Un instant, je me suis arrêté à la *Dissertation inaugurale* et à la *Théorie des fonctions abéliennes* qui suffiraient à immortaliser leur Auteur; mais sur combien d'autres sujets, pendant sa trop courte carrière, se porte le génie du grand géomètre. Dans le Travail *Sur la théorie des fonctions représentées par la série de Gauss,* il fait connaître,

pour la première fois, comment se comportent les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre, lorsque la variable décrit un contour fermé comprenant une discontinuité, et il parvient comme conséquence à la notion de groupe pour une telle équation. Le Mémoire *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée* traite, sous un point de vue tout différent et du plus haut intérêt, une question célèbre qui avait occupé Legendre et Dirichlet. L'idée, entièrement nouvelle, de l'extension à tout le plan d'une quantité qui n'a d'existence que dans une région limitée se trouve déjà dans le précédent travail; elle sert de fondement, elle joue le principal rôle dans cette recherche arithmétique sur les nombres premiers. Riemann l'applique à une série depuis longtemps considérée par Euler, qui est soumise à une condition déterminée de convergence. La série devient l'origine d'une fonction uniforme, elle donne naissance à une nouvelle transcendante se rapprochant à certains égards de la fonction gamma. C'est un nouveau Chapitre qui s'ajoute ainsi aux théories de l'Analyse et où M. Hadamard et M. von Mangoldt ont trouvé l'origine de leurs belles recherches. Le Mémoire *Sur la propagation d'ondes aériennes planes, ayant une amplitude de vibration finie,* concerne les questions délicates et difficiles auxquelles ont donné naissance les célèbres découvertes de von Helmholtz en Acoustique. Le grand géomètre était aussi un physicien, il connaissait les nouvelles méthodes expérimentales et les plus récents progrès de la Science; il dit cependant, avec cette modestie qui est le fond de son caractère, avoir surtout en vue une question de Calcul concernant les équations aux dérivées partielles. A cet égard, on doit signaler des résultats qui sont toujours de grande importance, une Méthode pour la recherche des intégrales des équations linéaires du second ordre, sous la condition qu'elles passent par une courbe donnée, en ayant des plans tangents donnés, puis aussi la notion de l'équation adjointe qui joue un rôle essentiel dans beaucoup de questions intéressantes.

» Je m'étendrais trop en voulant encore passer en revue les Mémoires *Sur l'évanouissement des fonctions* Θ, *Sur les surfaces d'aire minima pour un contour donné, Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique;* il

serait trop long de faire ressortir la grandeur et la beauté des découvertes, d'en montrer la portée, de parler des nombreux travaux auxquels elles ont donné lieu. Je ne ferai que mentionner en quelques mots l'admirable travail *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie.*

» L'Auteur dépasse infiniment la question du postulatum d'Euclide qui, après des siècles de vaines tentatives, avait trouvé une solution dans les recherches de Lobatscheffsky, de Bolyai, et qu'on a appris, par une publication du plus grand intérêt due à M. Stäckel, avoir été, pendant toute sa vie, l'objet des méditations de Gauss. Riemann aborde la considération de l'espace ou d'une multiplicité à un nombre quelconque de dimensions, il en établit le caractère essentiel consistant en ce que la position d'un point dépend de ce même nombre de variables, et il étudie les mesures dont cet espace est susceptible. C'est tout un monde inconnu intéressant à la fois le philosophe et le géomètre, que s'ouvre avec une extraordinaire puissance d'abstraction le merveilleux inventeur. Un domaine particulier s'y trouve qui se rapproche des réalités accessibles à notre existence, dans ce sens qu'on y peut déplacer une figure sans altérer ses dimensions et fonder des démonstrations sur la méthode de superposition. Et c'est là que vient s'offrir, pour le cas de deux dimensions, en même temps que la Géométrie de Lobatscheffsky et de Bolyai, où la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droits, celle de Riemann où elle lui est supérieure.

» Mettre à la disposition des lecteurs français le riche trésor sur lequel j'ai jeté un coup d'œil a été le but de cet Ouvrage. Il paraît avec l'autorisation de Mme Riemann et de l'éditeur allemand M. B.-G. Teubner. Il est offert à Mme Riemann comme un hommage à une mémoire immortelle et le témoignage de la plus respectueuse, de la plus profonde sympathie.

» L'impression s'est faite avec les soins consciencieux que la maison Gauthier-Villars consacre à ses publications mathématiques, et les épreuves ont été revues avec la plus grande obligeance par M. Goursat.

» D'illustres disciples du grand géomètre, M. Klein, MM. Weber et Dedekind, M. Minkowski ont encouragé et secondé par leur bienveillant concours le travail du traducteur, M. Laugel.

Qu'ils reçoivent l'assurance d'une bien sincère gratitude, et le vœu que les *Œuvres de Riemann* servent de plus en plus, en propageant la gloire du Maître, au progrès, à la marche en avant de la Science! »

H. BROCARD. — NOTES DE BIBLIOGRAPHIE DES COURBES GÉOMÉTRIQUES. In-8°, 296 pages autographiées. Bar-le-Duc, imprimerie et lithographie Comte-Jacquet, 1897.

« Ce n'est pas, dit l'auteur, un Ouvrage livré à la publicité; c'est tout simplement un cahier de notes, dont j'ai voulu avoir quelques copies, afin de pouvoir les communiquer aux amateurs du sujet, à qui je serai heureux d'en adresser l'hommage, en les priant de me faire connaître toutes les modifications qu'ils jugeront devoir y apporter. »

Ces *Notes* sont rédigées par ordre alphabétique, et M. Brocard les présente comme extraites d'un *Vocabulaire mathématique* en préparation. Du reste, le répertoire ne se borne pas exclusivement aux courbes géométriques, comme semblerait l'indiquer le titre; il s'étend à la nomenclature des Arts et à celle des Sciences physiques; d'un autre côté, il comprend également celle des lignes considérées non en elles-mêmes, mais en relation avec des figures (par exemple, dans la Géométrie du triangle, cercle d'Apollonius, cercle de Brocard, cercle d'Euler, etc.). On voit quelle peut être l'utilité d'un tel répertoire.

Quoique l'Auteur ne le présente que comme un avant-projet, son travail me semble déjà amené à une forme digne des honneurs de l'impression. Je ne doute pas, en tout état de cause, qu'il n'excite assez d'intérêt pour être effectivement imprimé après une refonte facilitée à M. Brocard par les communications qu'il réclame. Mais si j'avais un désir à exprimer, ce serait de le voir, non pas développer son répertoire dans le sens d'une monographie des courbes (ce qui peut être au contraire le vœu de nombre de ses correspondants), mais de l'étendre de façon à donner une partie plus considérable du Vocabulaire mathématique.

La monographie des courbes ayant reçu un nom spécial me

paraît en effet, pour présenter un ensemble satisfaisant, réclamer un ordre méthodique, non alphabétique. C'est au reste sous cette forme qu'en 1894 l'Académie des Sciences de Madrid a proposé (sans succès) ce sujet d'études. Le choix d'un principe méthodique de classement n'est point d'ailleurs sans présenter de sérieuses difficultés, soit qu'il s'agisse des courbes spécialement dénommées, soit qu'il s'agisse des formes de générations applicables à toute courbe (comme développée, podaire, etc.). L'œuvre doit, par là même, présenter un caractère nettement personnel et exiger des recherches approfondies, qui peuvent même conduire à modifier, compléter ou simplifier la nomenclature en usage. Elle peut donc, si elle est réussie, honorer grandement son auteur; mais il s'agit, en tout cas, d'un travail de très longue haleine et qui ne me paraît point correspondre à un besoin pratique urgent.

Personne au contraire, en présence du développement extraordinaire de la littérature mathématique, ne peut nier l'utilité d'un « Vocabulaire destiné à remettre promptement sur la voie un lecteur momentanément arrêté par un terme qui ne lui est pas familier ». C'est l'objet que s'est proposé M. Brocard pour ce Vocabulaire, mais il semble désespérer de pouvoir le réaliser complètement. Ne pourrait-il au moins étendre aux surfaces et aux figures solides le répertoire qu'il a rédigé? Ne pourrait-il y comprendre tous les termes mathématiques qu'il aura employés? Nous aurions ainsi un Vocabulaire géométrique à peu près complet, ce qui serait déjà beaucoup, en attendant un Vocabulaire analytique.

Une définition précise pour chaque terme, l'énoncé (sans démonstration) des propriétés essentielles, les références bibliographiques suffisantes pour orienter le chercheur, voilà tout ce qu'on peut demander à ce Vocabulaire. Ne pas vouloir être trop complet au premier essai et comprendre qu'il faudra toujours des suppléments serait, je crois, une condition essentielle pour aboutir.

J'ajouterai deux *desiderata* qui me sont personnels. Nombre de termes n'ont qu'un intérêt historique et sont tombés en désuétude, ou n'ont jamais été adoptés couramment. Il conviendrait de les distinguer en les marquant d'un astérisque. En second lieu, il serait intéressant d'avoir, pour chaque terme qui ne se transcrit pas simplement, le mot correspondant dans chacune des principales langues mathématiques. De la sorte, un Vocabulaire publié

en français, par exemple, pourrait être facilement utilisé par les travailleurs des autres pays. PAUL TANNERY.

LORENZ (L.). — ŒUVRES SCIENTIFIQUES, revues et annotées par *H. Valentiner*, t. I, 5e fascicule in-8°, 213-529 p. Copenhague, Lehmann et Stage; 1898.

Le fascicule que nous annonçons aujourd'hui termine le premier Volume des Œuvres scientifiques de L. Lorenz. Il contient quatre Mémoires. Les deux premiers sont consacrés à des recherches expérimentales et théoriques sur les indices de réfraction. Ils ont été publiés en 1869 et 1875 dans les *Videnskabernes Selskabs Skrifter* de Copenhague; ils sont accompagnés d'un résumé écrit par Lorenz lui-même et inséré dans le Tome XI des Annales de Wiedemann. Le volume se termine par un Mémoire sur la théorie de la dispersion et un travail très étendu sur la lumière réfléchie et réfractée par une sphère transparente. C'est un sujet dont Clebsch s'était occupé, sans l'élucider complètement, dans un Mémoire publié en 1863 au Tome LXI du *Journal de Crelle*. Il a une grande importance pour la théorie de l'arc-en-ciel. Tous ces travaux sont accompagnés de nombreuses Notes dues à M. Valentiner; elles éclaircissent ou complètent différents points du Mémoire original.

Ainsi entendue, la publication des Œuvres de Lorenz est de nature à contribuer aux progrès à la fois de la Physique mathématique et de la Physique expérimentale; car, dans tous les travaux dont nous venons d'indiquer l'objet, le développement du Calcul et de l'Analyse mathématique est toujours poussé jusqu'au point où les résultats obtenus peuvent être contrôlés par les expériences des physiciens. G. D.

CZUBER (E.). — Vorlesungen über differential- und integral-Rechnung. Erster Band : XIV-526 p. in-8°. Leipzig, Teubner, 1898.

Ces leçons sur le Calcul différentiel et intégral ont été rédigées en vue des élèves des hautes Écoles techniques, auxquels elles semblent très bien appropriées; d'autres, assurément, peuvent en profiter; les notions fondamentales y sont développées avec détail; elles sont, autant qu'il est possible, interprétées géométriquement. Cette interprétation géométrique est, à coup sûr, nécessaire pour tous ceux qui étudient les Mathématiques; elle suffit presque à ceux qui apprennent surtout les Mathématiques pour les appliquer. De nombreux exemples permettent au lecteur de se familiariser avec les méthodes. Le niveau du Livre est d'ailleurs assez élevé : on y trouvera, par exemple, les propositions fondamentales sur les séries procédant suivant les puissances entières d'une variable imaginaire et la définition des fonctions élémentaires d'une variable complexe.

Tout en interprétant géométriquement les notions et les propositions fondamentales, l'Auteur n'a pas craint d'introduire certaines notions d'ordre abstrait, nécessaires pour donner toute leur rigueur à certaines démonstrations : il ne craint pas, par exemple, d'établir qu'une fonction continue dans un intervalle est uniformément continue dans cet intervalle; mais il ne montre pas qu'une fonction continue atteint sa limite supérieure. Bien que cette proposition soit indispensable pour rendre entièrement rigoureuse la démonstration, aujourd'hui classique, du théorème de Rolle [1], que l'on doit à O. Bonnet, et qui suppose seulement l'existence de la dérivée, il n'y a nullement lieu, dans un Livre tel que l'a voulu M. Czuber, de regarder comme une omission l'absence d'une telle proposition. J'ai voulu seulement signaler, par cet exemple, ce qu'il y a de nécessairement arbitraire dans la mesure à garder lorsqu'on expose les sujets de cette nature.

La division de l'Ouvrage est conforme aux habitudes classiques : une première Partie se rapporte au Calcul différentiel proprement

[1] Cette observation a été faite, il y a une vingtaine d'années, par M. Darboux, dans son enseignement à l'École Normale.

dit : dérivées, différentielles des fonctions d'une ou de plusieurs variables, séries en général, séries de Taylor et de Maclaurin, fonctions d'une variable complexe, maxima et minima. Une seconde Partie contient les applications géométriques aux courbes et aux surfaces : tangentes, asymptotes, étude d'une courbe autour d'un de ses points, contact de deux courbes, longueur d'un arc, courbure, courbes enveloppes; courbes gauches, première et seconde courbure, formules de Frenet, enveloppes, surface polaire d'une courbe gauche, courbure des surfaces, lignes de courbure, lignes asymptotiques, lignes géodésiques.

J. T.

CAYLEY (A.). — Collected mathematical Papers. Supplementary Volume containing titles of papers and index. In-4°, VI-141 p. Cambridge, University Press, 1898.

Nous annoncions dernièrement la fin de la publication des *Œuvres de Cayley*. M. Forsyth a pensé que, pour faciliter les recherches dans les 13 Volumes compacts qui composent cet ensemble magistral, des Tables rendraient les plus grands services; et dans le Volume supplémentaire qui vient de paraître et que nous annonçons aujourd'hui, il a réuni d'abord la liste complète des 967 Mémoires de Cayley, puis un index des matières et des auteurs, composé par M. F. Howard Collins, à qui tous les géomètres sauront gré de l'utile travail qu'il a bien voulu s'imposer. Ainsi se trouve complétée, en moins de dix ans, une publication commencée par Cayley lui-même, et que M. Forsyth a tenu à cœur d'achever.

SCHRÖTER (F.). — Jacob Steiner's Vorlesungen ueber synthetische Geometrie. Zweiter Theil. Die Theorie der Kegelschnitte gestützt auf projective Eigenschaften. Auf Grund von Universitätvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiners. Dritte Auflage durckgesehen von *R. Sturm*. Un vol. in-8°, XVII-538 p.

On sait que c'est M. Schröter qui a publié en 1867 la première édition des Leçons de Steiner sur la Géométrie synthétique; une

seconde édition a paru en 1876; elle est aujourd'hui épuisée : M. Schröter est mort en 1892, après une vie consacrée tout entière à la Géométrie. M. Rudolph Sturm s'est chargé de publier la troisième édition; il était assurément tout à fait désigné pour cette tâche; c'est d'ailleurs de la façon la plus modeste qu'il parle de sa collaboration : quelques abréviations, quelques remaniements, quelques changements dans la terminologie, devenus indispensables, parce que la langue de la nouvelle Géométrie s'est peu à peu fixée, voilà, d'après lui, quelle est sa part.

Quoi qu'il en soit, en parcourant la troisième édition de cet excellent Livre, on se convainc bien vite que sa réimpression s'imposait, en effet; qu'il est de ceux qui ne doivent pas disparaître sitôt de la circulation, et que les deux éditions qu'il a eues n'ont pas épuisé les services qu'il peut rendre : le génie créateur qui l'a inspiré par son enseignement l'a sans doute empêché de vieillir, et cependant, une bonne partie des matières qu'il contient a passé dans l'enseignement élémentaire, directement sans doute en Allemagne, tandis que, en France, elles provenaient le plus souvent de la Géométrie supérieure ou du *Traité des sections coniques* de notre illustre Chasles. Si l'exposition que l'on doit à ce dernier ne laisse rien à désirer pour la richesse, l'élégance et la clarté, celle qu'on trouve dans les Leçons de Steiner a un caractère plus systématique. C'est ainsi, par exemple, que Steiner repousse, pour l'étude des coniques, l'emploi du cône à base circulaire, parce qu'il oblige à sortir du plan, et que la démonstration de la proposition réciproque, tout cône qui a pour directrice une conique peut être coupé suivant un cercle par un plan, ne se présente pas d'une façon naturelle : pour lui, la conique doit être regardée comme l'intersection de deux droites passant chacune par un point fixe et qui se correspondent homographiquement, ou comme l'enveloppe d'une droite qui joint deux points situés sur deux droites fixes et qui se correspondent homographiquement. Il faut établir alors l'identité des courbes ainsi définies et montrer comment elles peuvent être engendrées d'une infinité de façons par les deux modes qu'on vient de dire. La même tendance se retrouve continuellement, et l'effort pour constituer une science toute pure, qui n'emprunte rien aux autres sciences, est partout visible : il n'en faut contester ni le mérite, ni l'éclatant succès. Il

reste toutefois permis de se demander si l'extrême ingéniosité qu'il a fallu dépenser pour introduire, d'une façon toute géométrique et rigoureuse, les éléments imaginaires dans la Géométrie synthétique, où ils jouent un rôle si essentiel, n'est pas la preuve qu'il y a un peu d'artifice dans la pureté originelle de cette science; mais cette observation ne concerne pas les Leçons de Steiner.

Une fois la définition des coniques justifiée, leurs propriétés se développent dans une belle ordonnance. C'est tout d'abord les propriétés d'une seule conique, puis celles d'un faisceau (ponctuel ou tangentiel) de coniques, à propos desquelles il convient de signaler l'étude des points d'intersection et des tangentes communes, les problèmes sur la construction des coniques, et l'intéressante solution de la question suivante : étant données deux coniques C, C′, trouver une troisième conique F telle que la polaire réciproque de C ou de C′ par rapport à F soit C′ ou C; puis l'étude du système polaire, de cette correspondance entre les points et les droites d'un plan, et des involutions attachées à chaque point et à chaque droite, qui résultent de la théorie des pôles et des polaires, mais qui peut, comme le fait Steiner, en être détachée et être présentée *a priori,* au moyen de deux involutions portées par deux droites, et qui permet ainsi de définir la conique lieu des points qui se trouvent sur les droites correspondantes, et enveloppe des droites qui contiennent leurs points correspondants, lors même que cette conique est imaginaire; puis enfin l'étude d'un réseau de coniques et de la courbe du troisième degré (jacobienne) qui lui est attachée. J. T.

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES CYCLIQUES;

PAR M. G. TZITZÉICA.

Considérons une congruence telle que la sphère S décrite sur le segment focal FF′ comme diamètre soit orthogonale à une sphère fixe (O). Nous allons démontrer que la congruence est cyclique, et que les plans des cercles du système correspondant passent par le centre O de la sphère (O).

Pour cela, supposons que FF′ décrive une développable dont l'arête de rebroussement soit tangente en F à FF′. Alors, la sphère Σ décrite du point F comme centre et orthogonale à la sphère (O) enveloppe une certaine surface à lignes de courbure circulaires, qu'elle touche suivant un cercle C, dont le plan perpendiculaire à FF′ passe évidemment par le point O. Il est clair encore que le cercle C est l'intersection des sphères Σ et S.

En considérant de même les sphères Σ′ ayant le point F′ pour centre et orthogonales à (O), et en supposant que FF′ décrit la développable dont l'arête est tangente à FF′ en F′, on voit que le cercle de contact sera encore le cercle C. Comme le cercle C se trouve à chaque moment sur la sphère S décrite sur FF′ comme diamètre, les sphères Σ et Σ′ sont orthogonales.

On a donc deux familles de surfaces qui se coupent à angle droit suivant des lignes de courbure. On sait qu'alors ces lignes de courbure, qui dans notre cas sont les cercles C, sont normales à une troisième famille de surfaces. Les cercles C forment donc un système cyclique.

Le système cyclique ainsi obtenu est le système général, composé de cercles orthogonaux à une sphère fixe et à une surface arbitraire, étudié par Ribaucour (DARBOUX, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, t. I, p. 56).

Le théorème que nous venons de démontrer prouve que les normales des surfaces qui sont telles que la sphère décrite sur le segment compris entre les centres de courbure principaux soit orthogonale à une sphère fixe ou passe par un point fixe (G. DAR-

BOUX, *Leçons de Géométrie*, t. IV, p. 322), forment une congruence cyclique, et, par conséquent, que ces surfaces ont, d'après un théorème connu, même représentation sphérique qu'une surface à courbure totale constante.

FONDATION BENEKE.

La Faculté de Philosophie de l'Université George-Auguste, de Göttingue, publie l'avis suivant :

Fondation Beneke.

Le 11 mars 1898, anniversaire du jour de la naissance du Fondateur, Charles-Gustave Beneke, conseiller au Consistoire, il a été publié que, pour le concours de 1897, aucun Mémoire n'a été présenté.

En même temps, la Faculté de Philosophie a proposé, pour l'année 1901, le nouveau sujet suivant :

« Le principe de continuité, ou encore, plus spécialement, la représentation par des fonctions indéfiniment différentiables, ont été longtemps considérés comme universellement applicables à l'étude mathématique des phénomènes naturels. Ce postulatum a été introduit comme allant de soi par les inventeurs du Calcul différentiel et intégral; mais les progrès des recherches mathématiques ont démontré de plus en plus qu'il impliquait une grande quantité d'hypothèses tacites auxquelles, dans l'état d'inexactitude toujours existante de nos perceptions sensibles, on n'est pas forcé de se tenir. Cette conception est d'ailleurs en contradiction avec l'hypothèse de la constitution moléculaire de la matière.

» La Faculté désire qu'un travail, prenant pour base l'état actuel de la Science, expose d'une manière généralement intelligible les questions relatives à ce sujet et soumette à un examen approfondi la légitimité et l'opportunité des théories habituelles. Ce Mémoire

pourra être conçu plus spécialement au point de vue mathématique, philosophique ou psychologique; on désire également des études historiques, mais sans les exiger.

» Les manuscrits doivent être rédigés dans une des langues modernes et nous être envoyés avant le 31 août 1900, pourvus d'une devise sur la page de titre, avec une lettre scellée, portant à l'extérieur la devise du travail, à l'intérieur les noms, profession et domicile de l'auteur. Le nom de l'auteur ne doit pas être indiqué d'une autre façon. Sur la page de titre doit être indiquée en outre l'adresse à laquelle le travail doit être renvoyé dans le cas où il ne serait pas jugé digne de prix.

» Le premier prix s'élève à 3400 marks, le second prix à 680 marks.

» L'attribution des prix aura lieu le 11 mars 1901, en séance publique de la Faculté de Philosophie de Göttingue.

» Les travaux couronnés restent la propriété exclusive de leurs auteurs.

» Les autres sujets, pour lesquels les manuscrits doivent être envoyés avant le 31 août 1898 et 31 août 1899, ont été indiqués précédemment [1]. »

Göttingue, le 11 mars 1898.

La Faculté de Philosophie.
Le Doyen,

G. Cohn.

SUR LA TRANSFORMATION DE M. LIE ET LES SURFACES ENVELOPPES DE SPHÈRES;

Par M. Alphonse DEMOULIN,
Répétiteur à l'Université de Gand.

1. Les deux théorèmes suivants sont bien connus :

Sur toute surface réglée, quatre asymptotiques curvilignes rencontrent une génératrice rectiligne variable en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

---

[1] *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften. Geschäftliche Mittheilungen* 1896, S. 69; 1897, Heft I, S. 26.

Sur toute surface enveloppe d'une infinité simple de sphères, quatre lignes de courbure non circulaires rencontrent une ligne de courbure circulaire variable en quatre points dont le rapport anharmonique est constant.

On a observé depuis longtemps que la transformation de M. Lie, qui change les droites en sphères, fait correspondre à toute surface réglée une surface enveloppe de sphères, et aux génératrices rectilignes de la première les lignes de courbure circulaires de la seconde. Nous nous proposons de compléter cette remarque en montrant que la même transformation permet de déduire l'une de l'autre les deux propositions rappelées plus haut.

2. La transformation de M. Lie établit entre les éléments (m, t) (m désignant un point quelconque et t un plan quelconque passant par ce point) d'un espace (e) et les éléments (M, T) d'un espace (E) une correspondance telle qu'aux éléments tangents d'une droite d de l'espace (e) correspondent les éléments tangents d'une sphère S de l'espace (E).

Les coordonnées (x, y, z) et (X, Y, Z) des points m et M sont liées par les deux relations [1]

$$(1)\qquad \begin{cases} (X - iY)y - Z - z = 0, \\ X + iY + yZ - x = 0. \end{cases}$$

Ces équations font correspondre à tout point $m(x, y, z)$ une droite isotrope Δ, et à tout point $M(X, Y, Z)$ une droite δ appartenant à un certain complexe linéaire C.

La sphère S, qui correspond à la droite d, est le lieu des droites Δ relatives aux différents points de cette droite; elle est également le lieu des droites Δ' relatives aux différents points de la droite d', conjuguée de d par rapport au complexe C. Enfin, sur la sphère S, tout point M, correspondant à un élément (m, t) de la droite d, est à l'intersection des droites Δ et Δ' relatives au point m et au point m', intersection du plan t et de la droite d'.

3. A ces différentes propriétés de la transformation de M. Lie, nous ajouterons la suivante, qui est peut-être nouvelle :

---

[1] *Voir* G. Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces* (IV Partie, p. 171 et suivantes).

Soient (m_1, t_1), (m_2, t_2), (m_3, t_3), (m_4, t_4) *quatre éléments tangents d'une droite* d *tels que* $(m_1, m_2, m_3, m_4) = (t_1, t_2, t_3, t_4)$. *A ces quatre éléments, il correspond, sur la sphère* S, *quatre points* M_1, M_2, M_3, M_4 *situés sur un cercle et tels que*

$$(M_1, M_2, M_3, M_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4).$$

Soient m'_i le point d'intersection du plan t_i et de la droite d', et Δ_i, Δ'_i les droites isotropes qui correspondent aux points m_i, m'_i. Ces droites se coupent au point M_i, lequel, on l'a vu, correspond à l'élément (m_i, t_i).

Les équations (1) étant linéaires par rapport aux coordonnées (x, y, z), on a

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4),$$

et de même

$$(\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \Delta'_4) = (m'_1, m'_2, m'_3, m'_4).$$

Or, par hypothèse,

$$(m_1, m_2, m_3, m_4) = (t_1, t_2, t_3, t_4) = (m'_1, m'_2, m'_3, m'_4).$$

Par suite

$$(2) \qquad (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \Delta'_4).$$

Pour achever la démonstration, nous invoquerons une propriété connue des surfaces du second ordre :

Toute conique tracée sur une quadrique rencontre quatre génératrices rectilignes appartenant à un même système en quatre points dont le rapport anharmonique est constant et égal au rapport anharmonique des quatre génératrices.

De là résulte ce corollaire :

Soient, sur une quadrique, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 *quatre génératrices appartenant à un même système et* Δ'_1, Δ'_2, Δ'_3, Δ'_4 *quatre génératrices appartenant au système opposé. Si l'on a*

$$(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4) = (\Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3, \Delta'_4),$$

les points d'intersection des génératrices (Δ_1, Δ'_1), (Δ_2, Δ'_2), (Δ_3, Δ'_3), (Δ_4, Δ'_4) *sont sur une conique de la surface et leur rapport anharmonique est égal au rapport anharmonique précédent.*

Cette dernière propriété, rapprochée de la relation (2), nous permet de conclure le théorème énoncé, et celui-ci met pleinement en évidence le rapport annoncé entre les deux propositions rappelées au début.

SUR LES QUESTIONS DE MATHÉMATIQUES PURES QUE SOULÈVE L'ÉTUDE DE LA NOMOGRAPHIE;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

1. Le corps de doctrine qui, sous le nom de *Nomographie*, a pour objet l'étude de la représentation plane, au moyen d'éléments (lignes et points) cotés, des équations à un nombre quelconque de variables, puise surtout sa raison d'être dans les applications très nombreuses dont il est susceptible aux branches les plus variées. L'adaptation des divers modes de représentation aux types d'équations les plus fréquents dans la pratique, tel est, avant tout, son but. Pourtant, quand on le considère dans sa partie théorique, il soulève des problèmes qui, au point de vue purement mathématique, ne sont pas absolument dépourvus d'intérêt.

2. Sous ce rapport, on y rencontre trois ordres principaux de questions. Le premier vise la détermination des différents modes de représentation plane applicables à des équations d'un nombre donné de variables.

Ces divers modes de représentation dérivent d'une double notion :

1° Celle des éléments (lignes ou points) d'un plan à un nombre quelconque de cotes;

2° Celle de la variabilité de position les uns par rapport aux autres de plusieurs systèmes plans superposés, position définie pour chacun d'eux par un triple contact.

Un Mémoire paru récemment [1] donne une solution absolu-

[1] *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVI, p. 16.

ment générale et complète de la question, avec application à la représentation des équations à trois et à quatre variables au moyen de deux plans superposés.

Une notation fort simple permet, par application du principe mis en évidence par cette solution, de donner, au moyen d'un très petit nombre de signes, le schéma complet de chaque mode de représentation.

La détermination du nombre de ces modes de représentation, applicables à des équations contenant un nombre donné n de variables, constitue un difficile problème de partition dont la solution complète a été donnée, dans le cas de deux plans superposés, par le Major P.-A. Mac-Mahon [1]. La méthode suivie par le savant algébriste anglais peut d'ailleurs s'étendre à un nombre quelconque de plans.

3. Lorsque l'on considère un mode de représentation applicable à des équations contenant un certain nombre de variables, il est très facile de construire, au moyen de fonctions arbitraires, le type correspondant de ces équations.

S'il s'agit, par exemple, du type des équations à trois variables représentables par l'alignement de trois points à une cote, on a immédiatement

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Si deux des trois systèmes de points à une cote sont distribués sur deux droites parallèles, on a le type

$$(2)\qquad f_1(\alpha_1)f_3(\alpha_3) + \varphi_2(\alpha_2)\varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

S'ils sont distribués sur trois droites parallèles, on a enfin

$$(3)\qquad f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3) = 0.$$

Quand il s'agira d'équations à un plus grand nombre de variables, et d'autres modes de représentation, la forme des équations correspondantes pourra être plus compliquée, mais il sera toujours facile de l'obtenir.

---

(1) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXVI, p. 57.

L'étude de détail, qui fait le principal objet de la Nomographie, permet de reconnaître, pour les équations de forme usuelle, les types auxquels on peut les rattacher et, par suite, les modes de représentation qui leur sont applicables.

Mais, théoriquement au moins — et c'est en cela que consiste le second ordre de questions visé plus haut —, le problème peut se poser de déterminer les équations aux dérivées partielles qui doivent être satisfaites pour qu'une équation quelconque donnée puisse être mise sous la forme correspondant à un mode déterminé de représentation. Ces équations aux dérivées partielles résultent de l'élimination des fonctions arbitraires du type proposé. Théoriquement, le Calcul différentiel offre le moyen d'effectuer une telle élimination, mais la mise en œuvre de ce moyen comporte généralement des calculs d'une complication rebutante et dont on ne peut guère venir à bout que grâce à des artifices spéciaux.

De telles solutions ont été obtenues respectivement pour le type (2) ci-dessus par M. Massau [1] et par M. Lecornu [2], pour le type (3) par le comte Paul de Saint-Robert [3].

La question reste encore à résoudre pour le type (1) qui comporte, comme on voit, l'élimination de six fonctions arbitraires.

4. Enfin, un troisième ordre de problèmes dérive de la considération suivante : on peut, dans un type donné d'équation, comportant un certain mode de représentation, particulariser la nature des fonctions arbitraires qui y interviennent; supposer, par exemple, que ce sont des polynomes algébriques de degré déterminé, mais dont les coefficients restent quelconques, polynomes que nous appellerons *composants* du type considéré. Si l'on développe alors le premier membre de l'équation, on obtient un certain polynome et la question se pose dès lors de chercher, une équation algébrique de même forme étant donnée, à obtenir les

---

(1) *Mémoire sur l'Intégration graphique,* Liv. III, Chap. III, n° 178.

(2) *Comptes rendus,* t. CII, p. 815; 1886. Le type (2) est envisagé à ces deux endroits comme celui des équations auxquelles est applicable le principe de l'anamorphose de Lalanne.

(3) *Memorie della R. Acc. di Torino,* t. XXV, p. 53 (1871). Le type (3) est envisagé dans cette Note comme celui des équations représentables au moyen de règles à calcul.

polynomes composants et à reconnaître sous quelles conditions tous leurs coefficients sont réels, ce qui, en l'espèce, est évidemment indispensable. Cette recherche conduit à des problèmes d'Algèbre qui ne laissent pas d'être délicats. Elle se trouve poussée à fond en ce qui concerne les équations si importantes du type (1) ci-dessus [dont les types (2) et (3) ne sont que des cas particuliers], lorsque tous les polynomes composants sont du premier degré, dans un Mémoire inséré l'an passé aux *Acta mathematica* [1]. En se reportant à l'endroit cité, on verra combien, même en ce cas relativement simple, la discussion du problème exige de soins.

Il s'en faut de beaucoup que ce qui précède comprenne toute la part qui revient aux Mathématiques pures dans le domaine de la Nomographie. Mais ce sont là les questions d'un intérêt primordial auxquelles elles doivent surtout s'attacher, le but de la Nomographie pouvant être entièrement défini par les deux énoncés que voici :

1° Reconnaître et classer tous les modes possibles de représentation plane des équations;

2° Une équation étant donnée, voir quels sont ceux de ces modes qui lui sont applicables, de façon à choisir parmi eux celui qui offre, en l'espèce, le plus d'avantages.

La mise en œuvre, dans chaque cas particulier, des principes ainsi découverts exige encore l'intervention de notions mathématiques qui offrent aussi un intérêt intrinsèque, mais nous ne pouvons, dans cette courte Note, entrer dans aucun détail à ce sujet.

---

(1) T. XXI, p. 301.

12 Pages

SCHELL (W.). — ALLGEMEINE THEORIE DER CURVEN DOPPELTER KRUMMUNG IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG ZUR EINFUHRUNG IN DAS STUDIUM DER CURVENTHEORIE. Zweite erweiterte Auflage. In-8°, VIII-163 p. Leipzig, Teubner; 1898.

Il nous suffira de signaler cette deuxième édition d'un Ouvrage dans lequel M. W. Schell, professeur à l'École Technique de Carlsruhe, et bien connu de nos lecteurs par son *Traité de Mécanique* (¹), expose, sans faire appel aux méthodes analytiques et par une voie purement synthétique, les principales propriétés infinitésimales des courbes à double courbure.

Après avoir signalé les propositions qui se rattachent à l'introduction de la tangente, du plan osculateur, de la normale principale, l'auteur étudie l'enveloppe des plans normaux, les développées, la sphère osculatrice, la surface rectifiante, la surface des normales principales dans une courbe absolument arbitraire. Il applique ensuite les résultats obtenus à l'étude des courbes dont la courbure est constante, et plus généralement à l'étude des courbes de M. Bertrand, etc. L'Ouvrage se termine par deux Chapitres, dont l'un traite des surfaces développables passant par la courbe, et qui sont telles que par leur développement sur le plan la courbe se transforme en un cercle. L'autre traite des développoïdes de Lancret, c'est-à-dire des courbes dont les tangentes rencontrent une courbe donnée sous un angle constant. Cette théorie aurait gagné en intérêt et en simplicité à être rapprochée de celle des développées des surfaces enveloppes de sphères; mais l'auteur avait annoncé l'intention de limiter son étude aux courbes gauches. Cette nouvelle édition de son Ouvrage sera lue avec intérêt par les étudiants qui désirent ne pas se livrer aveuglément au Calcul et s'initier à la connaissance des méthodes synthétiques.

(¹) *Theorie der Bewegung und der Kräfte*. Leipzig, Teubner; 1879.

WEBER (H.). — Lehrbuch der Algebra. Un vol. in-8°, xv-703 p. Braunschweig, Vieweg, 1898.

C'est un heureux résultat, pour un *Traité d'Algèbre*, que d'arriver en quatre ans à une seconde édition. La faveur qu'a rencontrée le Livre de M. Weber n'étonnera pas ceux qui ont lu cet important exposé de questions trop peu étudiées en France : il est permis de regretter que l'on ignore à peu près, dans notre pays, cette théorie des *corps algébriques*, où les mathématiciens allemands ont trouvé la matière de si nombreuses découvertes, et de souhaiter que la lecture de l'Ouvrage de M. Weber contribue à faire cesser cette ignorance.

Les sujets auxquels est consacré le premier Volume : déterminants, propriétés des équations algébriques, et même théorie de Galois, sont plus familiers aux lecteurs français et, d'autre part, les changements qu'y apporte la seconde édition sont moins importants que ceux qui nous sont annoncés pour le Tome second.

Néanmoins, en même temps que plusieurs Chapitres ont été revus au point de vue de la rigueur ou de la clarté, un certain nombre d'additions intéressantes ont été opérées, particulièrement dans la théorie de l'élimination, où l'on remarquera une manière nouvelle et intéressante de présenter l'élimination de deux inconnues entre trois équations.

J. TANNERY et J. MOLK. — Éléments de la théorie des fonctions elliptiques. Tome III : *Calcul intégral* (Ire Partie). — *Théorèmes généraux. Inversion.* 1 vol. in-8°, viii-268 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.

Les deux premiers Volumes de l'Ouvrage de MM. Tannery et Molk étaient consacrés au *Calcul différentiel*, c'est-à-dire que les résultats obtenus étaient, d'une façon presque exclusive, déduits de la définition de la fonction ζu, au moyen d'identités analytiques.

Dans ce nouveau Volume, les auteurs suivent une tout autre voie : ils appliquent à la théorie des fonctions doublement pério-

diques les propositions fondamentales de Cauchy sur les intégrales prises entre des limites imaginaires et retrouvent tout d'abord les théorèmes généraux de Liouville et la proposition capitale de M. Hermite relative à la décomposition des fonctions doublement périodiques en éléments simples.

La première Partie du Volume, intitulée : *Théorèmes généraux*, est consacrée aux applications des propositions que nous venons de rappeler, en particulier aux développements en séries entières et en séries trigonométriques. Elle se termine par un Chapitre dans lequel les auteurs traitent magistralement le problème général de l'intégration d'une fonction doublement périodique le long d'un chemin arbitrairement fixé.

La seconde Partie est consacrée à l'*Inversion*. Ce problème difficile est résolu par MM. Tannery et Molk d'une façon rigoureuse autant que simple dans tous les cas possibles, et les formules sont appropriées aux calculs numériques.

On peut dire sans crainte que cette partie de l'Ouvrage est faite pour satisfaire absolument les esprits avides de précision, qui ne se contentent pas d'apercevoir une solution, mais qui veulent aller au fond des choses et arriver au calcul effectif des inconnues. La part personnelle des auteurs y est considérable, et si, comme il semble, ils se sont attachés d'une façon plus particulière à donner du problème de l'inversion une solution claire et générale, leurs efforts ont été complètement couronnés de succès. Comme précédemment, nous allons analyser successivement d'une façon succincte les différents Chapitres de l'Ouvrage.

La première Partie : *Théorèmes généraux*, comprend six Chapitres.

Chapitre I. — *Applications du théorème de Cauchy sur les intégrales d'une fonction d'une variable imaginaire.*

1. On obtient une égalité fondamentale en appliquant le théorème de Cauchy au parallélogramme des périodes, dont les sommets successifs sont u_0, $u_0 + 2\omega_1$, $u_0 - 2\omega_1 + 2\omega_3$, $u_0 + 2\omega_3$; la partie réelle de $\frac{\omega_3}{\omega_1 i}$ est supposée positive, afin que le parallélogramme soit ainsi parcouru dans le sens direct.

En particulier, si l'on applique cette formule à la fonction $\zeta(u)$, on retrouve l'égalité

$$\eta_1\omega_2 - \eta_3\omega_1 = \frac{\pi i}{2}.$$

Une fonction doublement périodique ordinaire est une fonction univoque qui n'a d'autres singularités que des pôles. Pour une telle fonction $f(u)$, la somme des résidus à l'intérieur du parallélogramme des périodes (et dorénavant nous sous-entendrons ce fait que l'on reste à l'intérieur de ce parallélogramme) est nulle; le nombre des zéros est égal à celui des pôles (deux au moins); la somme des zéros diminuée de la somme des pôles est congrue à zéro (modd. $2\omega_1$, $2\omega_3$); l'équation $f(u) - C = 0$, C étant une constante, a autant de racines que $f(u)$ a de pôles, et la somme de ces racines est constante.

Ce sont là les théorèmes de Liouville.

2. L'application de la formule fondamentale à la fonction $f(u)\zeta(x-u)$, x étant quelconque, conduit à la formule de M. Hermite, ou de décomposition en éléments simples,

$$f(u) = C + \sum_{i=1}^{\nu}[A^{(i)}\zeta(u-a_i) + A_1^{(i)}\zeta'(u-a_i) + \ldots + A_{\alpha_i-1}^{(i)}\zeta^{\alpha_i-1}(u-a_i)],$$

les a_i étant les ν pôles distincts de $f(u)$, d'ordres de multiplicité α_i, et les $A^{(i)}$ étant tels qu'aux environs de a_i on ait

$$f(a_i+h) = A^{(i)}\frac{1}{h} + A_1^{(i)}\left(\frac{1}{h}\right)' + A_2^{(i)}\left(\frac{1}{h}\right)'' + \ldots + A_{\alpha_i-1}^{(i)}\left(\frac{1}{h}\right)^{\alpha_i-1} + \mathfrak{P}(h).$$

Réciproquement, cette formule définit une fonction doublement périodique si la somme des résidus $\Sigma A^{(i)}$ est nulle.

Cette décomposition est unique; elle permet l'intégration de $f(u)$ puisque $\zeta(u-a_i)$ est la dérivée de $\log\sigma(u-a_i)$.

3. Une fonction doublement périodique de seconde espèce est une fonction univoque, sans autres singularités que des pôles, telle que

$$\bar{f}(u+2\omega_1) = \rho_1\bar{f}(u), \qquad \bar{f}(u+2\omega_3) = \rho_3\bar{f}(u).$$

En multipliant la fonction par une exponentielle convenable,

on peut toujours la rendre *réduite*, c'est-à-dire telle que $\mu_1 = 1$.

La dérivée logarithmique de $\mathcal{F}(u)$ est doublement périodique de première espèce; donc, pour $\mathcal{F}(u)$, le nombre des zéros est égal à celui des pôles.

L'exponentielle $e^{Cu+C'}$ est la seule fonction transcendante entière doublement périodique de seconde espèce.

Si l'on a

$$C = \frac{1}{i\pi}(\eta_1 \log \mu_3 - \eta_3 \log \mu_1), \qquad u_0 = \frac{1}{i\pi}(\omega_3 \log \mu_1 - \omega_1 \log \mu_3),$$

on obtient pour $\mathcal{F}(u)$ une décomposition en éléments simples, identique à celle du numéro précédent, l'élément simple $\zeta(u)$ étant remplacé toutefois par

$$\mathcal{A}(u) = \frac{\sigma(u - u_0)}{\sigma u \, \sigma u_0} e^{Cu}.$$

Ceci suppose $\sigma u_0 \neq 0$; mais si l'on avait $\sigma u_0 = 0$, $\mathcal{F}(u)$ serait le produit d'une fonction de première espèce par une exponentielle.

Si les pôles et les zéros de $\mathcal{F}(u)$ sont les a et les b, on a

$$\sum a - \sum b = \frac{1}{i\pi}(\omega_3 \log \mu_1 - \omega_1 \log \mu_3) \qquad (\text{modd. } 2\omega_1, 2\omega_3).$$

Si $\mathcal{A}(u, u_0)$ désigne ce que devient $\mathcal{A}(u)$ pour $C = -\zeta(u_0)$, on a une fonction particulière jouissant de propriétés intéressantes indiquées par MM. Tannery et Molk.

4. Une fonction doublement périodique de troisième espèce est une fonction univoque, sans autres singularités que des pôles, telle que

$$\Psi(u + 2\omega_1) = e^{M_1 u + N_1}\Psi(u), \qquad \Psi(u + 2\omega_3) = e^{M_3 u + N_3}\Psi(u);$$

on a

$$M_1\omega_3 - M_3\omega_1 = h\pi i,$$

h étant entier.

Si $M_1 = N_1 = 0$, la fonction est réduite : on peut toujours réduire $\Psi(u)$ en la multipliant par une exponentielle de la forme e^{Au^2+Bu+C}. Le nombre h est l'excès du nombre des zéros sur le nombre des pôles de $\Psi(u)$; si les a et les b désignent les pôles

et les zéros de $\Psi(u)$, on a

$$\sum a - \sum b = h\omega_1 - \frac{\omega_1 N_2}{\pi i} \qquad (\text{modd. } 2\omega_1, 2\omega_3).$$

On trouve ces théorèmes en appliquant la formule fondamentale de Cauchy aux fonctions $\frac{\Psi'(u)}{\Psi(u)}$ et $u\frac{\Psi'(u)}{\Psi(u)}$.

La fonction transcendante entière de troisième espèce la plus générale est de la forme

$$e^{Au+Bu}\Phi(u+C),$$

où $\Phi(u+C)$ est la fonction Φ de M. Hermite pour h zéros.

Si l'on pose

$$F(u, w) = \frac{i\pi y}{\omega_1}\sum_n q^{n^2 h}\frac{x^{nh}}{xq^{2n}-y},$$

où $x = e^{\frac{i\pi u}{\omega_1}}$, $y = e^{\frac{i\pi w}{\omega_1}}$, on définit une fonction de u propre à servir d'élément simple pour la décomposition des fonctions de troisième espèce, ainsi que l'a montré M. Appell.

Si $h > 0$, et si la fonction $\Psi(u)$ est réduite aux multiplicateurs 1 et $e^{\frac{h\pi}{\omega_1}(u-\omega_1)}$, on a, comme antérieurement,

$$\Psi(u) = \Phi(u) + \sum_{i=1}^{i=\nu}\left[A_0^i F + A_1^i\frac{\partial F}{\partial w} + \ldots + A_{\alpha_i-1}^i\frac{\partial^{\alpha-1}F}{\partial w^{\alpha_i-1}}\right]_{w=\alpha_i},$$

$\Phi(u)$ étant une fonction Φ de M. Hermite à h zéros.

Si $h < 0$, on a, pour une fonction $\Psi(u)$ réduite aux mêmes multiplicateurs, la formule

$$\Psi(u) = -\sum_{i=1}^{i}[B_0^i F(a_i, u) + B_1^i F'(a_i, u) + \ldots + B_{\alpha_i-1}^{(i)} F^{(\alpha_i-1)}(a_i, u)],$$

les $B^{(i)}$ étant, comme les $A^{(i)}$ de la formule précédente, des constantes convenables et $F^{(p)}(a_i, u)$ désignant la valeur de $\frac{\partial^p F(u, w)}{\partial^p u}$ quand on y fait $u = a_i$, $w = u$.

Le cas de $h = 0$ est inutile à considérer, et des formules précédentes on peut tirer la forme générale des fonctions de troisième espèce.

5. En mettant à la fois les zéros et les pôles en évidence, l'expression générale d'une fonction de première ou de seconde espèce est

$$e^{Cu+C'}\frac{\sigma(u-b_1)\sigma(u-b_2)\ldots\sigma(u-b_p)}{\sigma(u-a_1)\sigma(u-a_2)\ldots\sigma(u-a_q)}.$$

Si la fonction est de première espèce, et si $\Sigma a = \Sigma b_1$, on a $C = 0$.

Une fonction de troisième espèce sera de la forme

$$\Psi(u) = e^{Au^2+Bu+C}\frac{\sigma(u-b_1)\ldots\sigma(u-b_p)}{\sigma(u-a_1)\ldots\sigma(u-a_q)},$$

ou encore

$$\Psi(u) = e^{Au^2+Bu}\frac{\Phi_{(p)}(u+D)}{\Phi_{(q)}(u-C)},$$

$\Phi_{(h)}(u)$ désignant la fonction de M. Hermite à h zéros. Pour les fonctions de première espèce, on a

$$A = B = 0, \qquad C = D.$$

Chapitre II. — *Applications de la formule de décomposition en éléments simples.*

1. Les conséquences de la formule de décomposition en éléments simples sont nombreuses. En particulier, elle conduit directement aux relations connues

$$\frac{\sigma(u-a)\sigma(u-a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 a} = \wp a - \wp u,$$

$$\wp'^2 u = 4\wp^3 u - g_2\wp u - g_3.$$

De même, les formules relatives à la division par n de l'une des périodes se présentent comme d'elles-mêmes, et l'on en déduit les formules de multiplication pour les fonctions σ, ζ, $\wp$; ces dernières formules peuvent être obtenues tout aussi facilement par une voie directe.

2. Les fonctions ξ, sn, cn, dn, traitées de la même manière, conduisent de la façon la plus simple aux formules déjà connues et à des formules nouvelles intéressantes.

3. Dans ce paragraphe, les auteurs indiquent comment on développe suivant les puissances de u les fonctions $\wp u$, ζu, σu, $\sigma_\alpha u$, plus généralement $f(u, u_0) = e^{u\zeta u_0} \frac{\sigma(u - u_0)}{\sigma u_0}$, $\lambda(u, u_0)$; comment on trouve l'expression de $\wp^n u$ en fonction linéaire de $\wp u$ et de ses dérivées; les expressions de $\wp^{(n)} u$ en fonction de $\wp u$ et $\wp' u$; comment enfin on exprime $\wp^{(n)}(u - a)$ en fonction de $\wp u$, $\wp a$, $\wp' u$, $\wp' a$, et comment on en déduit les valeurs des intégrales

$$S_n = \int \frac{du}{(\wp u - \wp a)^n}.$$

4. Des développements précédents, on déduit les développements en séries entières des fonctions ξ, sn, cn, dn; les expressions linéaires des dérivées de ces fonctions au moyen de leurs puissances, et inversement les expressions linéaires des puissances de ces fonctions au moyen de leurs dérivées, et, par suite, les intégrales de ces puissances.

5. Ici, MM. Tannery et Molk montrent comment M. Hermite a pu calculer le développement en série entière de la fonction cn et, par suite, de dn et de sn, en se servant de la transformation de Landen.

6. Dans ce dernier paragraphe, la méthode de décomposition en éléments simples est appliquée aux fonctions de Jacobi. Les périodes sont $2K$ et $2iK'$, et il est convenable d'introduire comme élément simple la fonction $Z(u)$, facile à développer en série. En même temps, on introduit les notations E, E', de Legendre.

Chapitre III. — *Suite des théorèmes généraux.*

MM. Tannery et Molk démontrent d'abord que toute fonction doublement périodique du second ordre vérifie une équation de l'une des deux formes

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = M(y - A)(y - B)(y - C)(y - D),$$

ou

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = M(y - A)(y - B)(y - C),$$

suivant que ses pôles sont distincts ou confondus.

Si maintenant $\varphi(u)$ est une fonction du second ordre, toute fonction doublement périodique $\Phi(u)$, aux mêmes périodes, s'exprime rationnellement au moyen de $\varphi(u)$ et de $\varphi'(u)$.

En particulier, on a

$$\Phi(u) = \frac{A + B\,p'u}{D},$$

A, B, D étant des polynomes en pu.

Entre deux fonctions doublement périodiques, admettant les mêmes périodes, existe une relation algébrique.

Si deux fonctions doublement périodiques, à périodes non identiques, sont liées par une relation algébrique, les quatre périodes se réduisent à deux, c'est-à-dire qu'elles sont des fonctions linéaires à coefficients entiers de deux périodes.

Si deux fonctions doublement périodiques ont les mêmes périodes, une troisième fonction de même nature s'exprime rationnellement au moyen des deux premières (en général).

Toute fonction doublement périodique a un théorème algébrique d'addition, c'est-à-dire que $F(u + v)$ est une fonction algébrique de $F(u)$ et $F(v)$.

Toute fonction doublement périodique a un théorème algébrique d'addition univoque, c'est-à-dire que $F(u + v)$ est une fonction rationnelle de $F(u)$, $F(v)$, $F'(u)$, $F'(v)$.

Tels sont les théorèmes fondamentaux établis dans ce Chapitre sans faire appel à la théorie des fonctions analytiques.

Chapitre IV. — *Addition et multiplication.*

1. Après avoir rappelé les formules d'addition relatives à pu et déjà établies, les auteurs développent les conséquences de l'identité

$$\begin{vmatrix} 1 & pu & p'u \\ 1 & pa & p'a \\ 1 & pb & p'b \end{vmatrix} = -\frac{2\sigma(a-b)\sigma(u-a)\sigma(u-b)\sigma(u-a-b)}{\sigma^3 a\,\sigma^3 b\,\sigma^3 u},$$

cas particulier de l'identité plus générale

$$\begin{vmatrix} 1 & \wp u_0 & \wp' u_0 & \dots & \wp^{n-1} u_0 \\ 1 & \wp u_1 & \wp' u_1 & \dots & \wp^{n-1} u_1 \\ \cdot & \dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ 1 & \wp u_n & \wp' u_n & \dots & \wp^{n-1} u_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n 1!\,2!\dots n!\,\frac{\sigma(u_0 - u_1 - \dots - u_n)\,\Pi\,\sigma(u_\alpha - u_\beta)}{\sigma^{n+1} u_0\,\sigma^{n+1} u_1 \dots \sigma^{n+1} u_n} \qquad (\alpha > \beta).$$

2. Pour $u_0 = u$, $u_1 = u - h$, ..., $u_n = u - nh$, et h tendant vers zéro, l'identité précédente devient

$$\Psi_n(u) = \frac{\sigma(nu)}{\sigma^{n^2} u} = \frac{(-1)^{n-1}}{[1!\,2!\dots(n-1)!]^2} \begin{vmatrix} \wp' u & \wp'' u & \dots & \wp^{n-1} u \\ \wp'' u & \wp''' u & \dots & \wp^{n} u \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \wp^{(n-1)} u & \wp^{n} u & \dots & \wp^{2n-3} u \end{vmatrix}.$$

Après avoir mis en évidence les propriétés des fonctions $\Psi_n(u)$, et les moyens de les calculer, MM. Tannery et Molk déduisent de la formule précédente la formule de multiplication pour $\wp u$, soit

$$\wp(nu) - \wp u = -\frac{\Psi_{n+1}(u)\,\Psi_{n-1}(u)}{\Psi_n^2(u)}.$$

3. Les généralités sur les théorèmes d'addition relatifs aux fonctions ξ, sn, cn, dn, terminent le Chapitre.

Chapitre V. — *Développements en séries trigonométriques.*

1. Après avoir défini une fonction $\mathrm{ls}(v)$, qui est formée avec les valeurs de $\log \sin v$, de façon à devenir une fonction holomorphe dans le plan coupé par les segments qui vont de 0 à $-\infty$ et de 1 à $+\infty$ suivant l'axe des quantités réelles, MM. Tannery et Molk établissent les développements trigonométriques des fonctions $\log \mathfrak{S}_\alpha(v)$, $\log \sigma u$, $\log \sigma_\alpha u$, $\frac{\mathfrak{S}'_\alpha(v)}{\mathfrak{S}_\alpha(v)}$, ζu, $\zeta_\alpha u$, $\wp u$, $\wp(u + \omega_\alpha)$, etc. Les conditions de convergence de ces séries sont établies avec le plus grand soin, et la signification des symboles ambigus qui peuvent y entrer est fixée de la façon la plus précise.

2. Dans ce paragraphe sont établis à l'aide du calcul d'une

intégrale définie, trois développements trigonométriques différents pour chacune des seize fonctions $\frac{\vartheta_\alpha(v+w)}{\vartheta_\beta(v)}$; parmi ces développements, il en existe de très rapidement convergents, qui conviennent, par suite, aux calculs numériques. On en déduit des développements pour les fonctions $\frac{\vartheta'_\alpha(v)}{\vartheta_\alpha(v)}$, $\frac{\vartheta_\gamma(v)}{\vartheta_\beta(v)}$ $(\gamma \neq 1)$, $\frac{1}{\vartheta_1(v)}$, $\frac{1}{\vartheta_1^2(v)}$, $\mathrm{sn}(u)$, ...

3. Les développements précédemment obtenus en fournissent d'autres en grand nombre pour les constantes successivement introduites dans la théorie des fonctions elliptiques; ces nouvelles formules trouvent leur place dans ce paragraphe.

Chapitre VI. — *Intégrales des fonctions doublement périodiques.*

1. Il suffit de savoir intégrer la fonction $\zeta(u-a)$, d'après la formule de décomposition en éléments simples : en effet, les parties d'une intégrale qui sont fournies par les termes tels que $\zeta^{(n)}(u-a)$ ne dépendent que des limites et non du chemin d'intégration.

Comme on a

$$\zeta u = \frac{\eta_1 \omega}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)},$$

où $u = 2v\omega_1$, il suffit de savoir intégrer la fonction $\frac{\vartheta'_1(v)}{\vartheta_1(v)}$.

Dans ce premier paragraphe, MM. Tannery et Molk montrent comment on calcule les intégrales des fonctions que nous venons d'indiquer, prises le long d'un segment rectiligne joignant deux points congrus (modd. $2\omega_1$, $2\omega_3$).

2. Quand le chemin d'intégration est quelconque, ne passant par aucun pôle, bien entendu, il est facile de calculer l'intégrale à un multiple près de $2i\pi$: c'est ce multiple qu'il faut déterminer.

Dans certains cas simples, la solution est immédiate. Dans le cas général, pour calculer $\int_C \zeta u\, du$, on ramène cette intégrale à

une intégrale analogue prise le long d'un chemin C′ situé tout entier dans une région B_0 où l'on puisse définir $\log \sigma u$ comme une fonction holomorphe ainsi qu'on l'a fait précédemment : cette réduction peut se faire de diverses façons. On peut ensuite quand il s'agit de $\int \frac{\Im_1(v)}{\Im_1(v)} dv$, calculer $\Im_1(v)$ numériquement à l'aide d'une série très convergente, et obtenir ainsi $\log \Im_1(v)$; quant au multiple de $2i\pi$ qui l'accompagne, il est déterminé par le calcul approximatif fort rapide de la valeur de $\log \Im_1(v)$ fournie par une série obtenue antérieurement.

3. Dans le cas normal, c'est-à-dire si $\frac{\tau}{i}$ est réel et positif, on peut pour calculer les intégrales $\int \frac{\Im_1(v)}{\Im_1(v)} dv$ employer une nouvelle méthode, qui a l'avantage de fournir d'utiles renseignements sur la fonction $\Im_1(v)$.

D'abord, il suffit de supposer le chemin d'intégration contenu dans un rectangle R dont les sommets ont pour affixes $\frac{\pm 1 \pm \tau}{2}$; si le point $\Im_1(v)$ est l'image de v, l'aire de ce rectangle a pour image une aire à contour simple R′. En faisant dans R′ une coupure convenable, on définit sans ambiguïté l'argument de $\Im_1(v)$; en faisant dans R la coupure correspondante, on définit $\log \Im_1(v)$ comme une fonction univoque; il est alors facile de calculer l'intégrale proposée, en ayant soin de tenir compte de la coupure.

Plusieurs exemples, souvent utiles dans la pratique, font bien comprendre la méthode.

La seconde Partie : *Inversion,* comprend deux Chapitres.

Chapitre VII. — *On donne k^2 ou g_2, g_3; trouver τ ou ω_1, ω_3.*

On a toujours supposé donnés jusqu'à présent les nombres ω_1 et ω_3; c'est avec eux et leur rapport qu'ont été construites toutes les fonctions précédemment définies et étudiées.

Mais dans les problèmes qui dépendent des fonctions elliptiques, ce ne sont pas ces nombres qui sont immédiatement donnés; la solution de ces problèmes se ramène à l'intégration de l'équation

différentielle

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 4y^3 - \gamma_2 y - \gamma_3,$$

γ_2 et γ_3 étant des nombres donnés, tels que $\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2$ ne soit pas nul.

On aura une solution de cette équation si l'on connaît deux nombres ω_1 et ω_3, à rapport imaginaire, tels que les fonctions g_2 et g_3 de ces nombres aient les valeurs données γ_2 et γ_3. On peut aussi bien considérer l'équation

$$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (1 - y^2)(1 - \varkappa y^2),$$

$\varkappa$ étant un nombre donné différent de 0 et de 1; il faut alors trouver un nombre imaginaire τ dans lequel le coefficient de i soit positif, et tel que la fonction $k^2(\tau)$ soit égale à $\varkappa$. Il s'agit donc de déterminer toutes les solutions des équations

$$g_2(\omega_1, \omega_3) = \gamma_2, \qquad g_3(\omega_1, \omega_3) = \gamma_3,$$

ou bien

$$k^2(\tau) = \varkappa,$$

dans les conditions précédentes.

MM. Tannery et Molk montrent d'abord que la dernière équation a une solution si $\varkappa$ est un nombre réel, positif et plus petit que un; ils en déduisent, en s'appuyant sur ce que deux fonctions analytiques d'une même variable ne peuvent coïncider sur une ligne sans être partout identiques, que la même équation a une solution, si $\varkappa$ est un nombre qui n'est ni négatif, ni positif et plus grand que un.

Cette solution est définie avec toute la précision nécessaire.

Connaissant cette solution τ_1, il est facile d'obtenir toutes les solutions de l'équation; elles sont de la forme

$$\tau = \frac{c - d\tau_1}{a - b\tau_1},$$

a et d étant des entiers impairs, c et d pairs. On obtient ensuite toutes les fonctions analytiques de la variable $\varkappa$ qui, mises à la place de τ, changent identiquement $k^2(\tau)$ en $\varkappa$.

Les premières équations se ramènent aisément à la dernière.

2. Dans ce paragraphe, les auteurs étudient de plus près les fonctions

$$X(\varkappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - \varkappa \sin^2 z}}, \qquad X'(\varkappa) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dz}{\sqrt{1 - (1 - \varkappa) \sin^2 z}},$$

où la variable d'intégration est réelle, et où les radicaux ont leurs parties réelles positives; ces fonctions, qui sont essentielles dans la résolution de l'équation $k^2(\tau) = \varkappa$, sont holomorphes dans le plan convenablement coupé.

Elles vérifient l'équation du second ordre

$$\varkappa(\varkappa - 1)\frac{d^2 y}{dz^2} - (2\varkappa - 1)\frac{dy}{dz} - \frac{1}{4} y = 0;$$

les auteurs étudient les solutions de cette équation, puis les fonctions analytiques de $\varkappa$ que l'on obtient en continuant les séries entières qui, aux environs d'un point du plan coupé, coïncident avec les développements de $X(\varkappa)$ et $X'(\varkappa)$.

3. Ce paragraphe est consacré au calcul effectif de τ, ω_1, ω_3. Des séries convenables permettent de calculer τ pour $|\varkappa| < 1$; les autres cas se ramènent à celui-là, en vertu des propriétés des fonctions $X(\varkappa)$ et $X'(\varkappa)$.

Mais il est préférable de calculer q; car alors on a, par une série très convergente en général,

$$X = \frac{\pi}{2}(1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots)^2,$$

puis

$$\tau = \frac{X'}{X} \cdot \log q,$$

où le logarithme doit recevoir sa valeur principale; l'argument de q doit être lui-même choisi entre $-\pi$ et π.

Pour $|\varkappa| < 1$, il est facile de trouver des séries entières fournissant q et les puissances positives de q; ces séries sont intéressantes, et l'on peut déterminer la limite de l'erreur commise quand on s'arrête à un terme de rang quelconque. On peut aussi obtenir des formules générales.

MM. Tannery et Molk se sont attachés à montrer comment, dans tous les cas possibles, on peut s'arranger de façon à calculer avec

des séries rapidement convergentes et à obtenir pour q une petite valeur absolue : des tableaux mettent en évidence les transformations qu'il faut faire dans les différents cas. Ils traitent, en particulier, le cas très important en pratique où γ_2 et γ_3 sont réels, et indiquent des procédés de calcul spéciaux pour ce cas.

Chapitre VIII. — *Inversion des fonctions doublement périodiques du second ordre.*

1. L'équation $z = \operatorname{sn} u$ définit u comme une fonction de z qui peut être représentée explicitement par une intégrale définie bien connue. Les auteurs consacrent quelques pages à l'étude directe de cette intégrale définie, origine de la théorie des fonctions elliptiques.

Cette propriété d'inversion se généralise pour toute fonction doublement périodique du second ordre.

2. Dans ce dernier paragraphe, MM. Tannery et Molk résolvent les questions suivantes avec leur précision habituelle :

1° Calculer à l'aide d'une série convergente l'intégrale $\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$ prise le long d'un chemin déterminé;

2° z et z' vérifiant la relation $z'^2 = (1-z^2)(1-k^2z^2)$, trouver une valeur de u telle que $\operatorname{sn} u = z$, $\operatorname{sn}' u = z'$.

Après avoir obtenu des séries répondant à ces questions dans le cas de $|k| < 1$, et qui ne convergent rapidement que si la quantité $|k|$ est très petite, ils en déduisent, au moyen d'une double transformation de Landen, de nouvelles séries très bien appropriées au calcul numérique, et qui, de plus, conduisent facilement à la détermination d'une solution des équations $pu = P$, $p'u = P'$, P et P' vérifiant la relation $P'^2 = 4P^3 - g_2P - g_3$. Ce Chapitre et le précédent contiennent la démonstration de la plupart des formules données par M. Schwarz dans les n°s 40-50 de ses *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques.*

H. Andoyer.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Dirichlet (G.-L.). — *Dirichlet's Werke, herausgeg. auf Veranlassg. der königl. preuss. Akademie d. Wissenschaften von L. Kronecker u. L. Fuchs.* 2 (Schluss-) Bd. Gr. in-8°, x-422 p. Berlin, G. Reimer. 18 m.

Dyck (W.). — *Ueber die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen u. der angewandten Mathematik.* Festrede. Gr. in-4°, 38 p. München, Franz. 1 m. 20 pf.

Hall (W.-S.). — *Elements of the Differential and Integral Calculus.* In-8°. New-York. Relié. 12 sh.

Haentzschel (E.). — *Ueber die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Eine historisch-kritische Studie.* Gr. in-8°, 8 p. avec 1 fig. Leipzig, Dürr. 40 pf.

Klein (F.). — *Ausgewählte Kapitel aus der Zahlentheorie.* 1. u. 2. Vorlesung. In-4°. Leipzig, Teubner. 14 m. 50 pf.

1 : v-394 p. autogr. avec fig. 2 : v-554 p. autogr.

Richard (J.). — *Leçons sur les méthodes de la Géométrie moderne.* In-8°, 242 p. avec fig. Paris, Société d'éditions scientifiques. 6 fr.

Bravais (A.). — *Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raume vertheilten Punkten* (1848). Uebersetzt u. herausgeg. von C. u. E. Blasius. In-8°, 142 p. avec 2 pl. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m.

(Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. 90. Bdchn.)

Burali-Forti (C.). — *Introduction à la Géométrie différentielle, suivant la méthode de H. Grassmann.* In-8°. xi-166 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Burnside (W.). — *Theory of Groups' of Finite Order.* In-8°. Cambridge Univ. Press. 15 sh.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CANTOR (MORITZ). — VORLESUNGEN UEBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. Dritter (Schluss-) Band, vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. Dritte Abtheilung. Die Zeit von 1727 bis 1758. In-8°. 436 p. Leipzig, Teubner. 1898.

Le premier fascicule du troisième et dernier Volume des *Vorlesungen* avait paru en 1894, le second en 1896; l'illustre historien de la Mathématique a enfin achevé la tâche qu'il avait assumée il y a déjà vingt ans. Le succès mérité de son œuvre l'obligera d'ailleurs à réserver le reste de sa carrière pour soigner une nouvelle édition (dont le premier Volume est déjà paru); il laisse donc à d'autres l'entreprise de continuer son histoire après la date où il l'a close, au moment de l'entrée en scène de Lagrange.

Il est inutile de dire que le dernier fascicule est à la hauteur de l'œuvre tout entière et que, loin de trahir le moindre affaiblissement de la pensée, il nous montre M. Cantor, à soixante-huit ans, en pleine maturité de talent. S'il n'avait plus cette fois à raconter des disputes célèbres, comme celles de Newton et de Leibniz, ou des frères Bernoulli, il a laissé à ses futurs continuateurs un véritable modèle, par la façon dont il a su analyser, avec précision et exactitude, l'œuvre d'Euler, pour lequel il ne cache pas au reste sa prédilection, tout en relevant avec soin les singulières incertitudes de doctrine en ce qui concerne l'emploi des séries.

Voici la liste des dix-huit Chapitres que contient le fascicule :

101. Histoire de la Mathématique. Éditions classiques. Dictionnaires.

102. Calcul, particulièrement en Allemagne (M. Cantor regrette, à bon droit, le défaut, pour les autres pays de l'Europe, d'Ouvrages qu'il aurait pu utiliser pour cette question).

103. Livres élémentaires de Géométrie. Théorie des parallèles. Saccheri.

104. Recherches particulières en Géométrie élémentaire.

105. Algèbre de 1727 à 1745.

106. Algèbre à partir de 1746.

107. Théorie des nombres.

108. Théorie des combinaisons. Calcul des probabilités.

109. Les séries (jusqu'en 1736).

110. Les séries (à partir de 1737 jusqu'en 1748).

111. L'*Introductio* (*in analysin infinitorum*) d'Euler, Volume I.

112. Les séries (de 1749 à 1754). Fondements du Calcul différentiel.

113. Le *Calcul différentiel* d'Euler.

114. Géométrie analytique jusqu'en 1740. Clairaut. Braikenridge. De Gua.

115. Géométrie analytique de 1740 à 1748. Maclaurin. L'*Introductio* d'Euler. Volume II.

116. Géométrie analytique de 1748 à 1756. Cramer.

117. Problèmes de maxima et minima. La *Methodus inveniendi* d'Euler.

118. Intégrales définies. Équations différentielles.

M. Cantor est donc resté fidèle au plan qu'il avait adopté et accusé de plus en plus à partir du commencement de son second Volume : couper l'Histoire par périodes bien définies, pouvant donner lieu à une conception d'ensemble; dans chacune de ces périodes, suivre un ordre déterminé de matières, en reprenant dans chaque Chapitre l'ordre chronologique. Ainsi, pour le second Volume, les limites des périodes sont 1200, 1300, 1400, 1450, 1500, 1550, 1600, 1668; pour le troisième, ces limites sont 1668, 1700, 1727, 1758. On voit que l'intervalle, d'abord de cent ans, est tombé bientôt à cinquante, puis à trente en moyenne. Il est évident que pour continuer l'histoire de la Mathématique avec le même détail (et il est indispensable, à mon sens), il faudrait réduire de plus en plus les périodes, et alors elles perdent leur utilité, de représenter une génération définie, qui a été dominée par certains hommes, et obéit à certains courants intellectuels. A l'extrême limite, on arriverait à de simples annales méthodiques.

Déjà, dans le dernier fascicule, l'inconvénient est sensible. Euler semble le remplir, et cependant nous n'avons là que la moitié de sa carrière, puisqu'en 1758 il avait encore vingt-cinq ans à vivre. De plus, son œuvre est morcelée, puisqu'il a touché

à toutes les branches de la Science, et si, dans chacune de ses branches, M. Cantor s'est attaché avec succès à faire ressortir l'évolution intellectuelle, il lui a fallu sacrifier l'histoire propre de l'esprit d'Euler, puisque, pour ses divers travaux, l'ordre des matières l'emporte sur l'ordre chronologique.

Dans sa préface, M. Cantor ne s'est nullement dissimulé cet inconvénient, et il se demande si, pour continuer son Histoire, il ne serait pas préférable de l'écrire par plus longues périodes pour les branches distinctes de la Science. Peut-être y a-t-il une autre question à poser et un autre desideratum à exprimer.

Sans aucun doute, il y a grand intérêt à entreprendre dès maintenant de continuer l'histoire de la Mathématique pour cent ans au moins après la date à laquelle s'est arrêté M. Cantor. Si l'on veut la poursuivre jusqu'à nos jours, l'ordre par branches de la Science s'imposera forcément. Si l'on se limite à trente ou quarante ans en arrière, on pourra bien encore continuer par périodes, et le succès, pour l'avenir, de l'un des deux systèmes sur l'autre dépendra surtout de la valeur de ceux qui tenteront de les appliquer. Mais si M. Cantor a amplement prouvé que l'histoire de la Mathématique abstraite se suffit à elle-même, du moment où l'on étudierait séparément chacune de ses branches, il vaudrait la peine d'introduire aussi dans le programme l'histoire des Mathématiques appliquées.

Le plan de Montucla, qui embrassait même l'Astronomie, était décidément trop vaste pour être repris, dans notre siècle, par un homme seul. Mais M. Cantor lui-même laisse une tâche qui sera peut-être mieux accomplie, si plusieurs se la partagent. Ce serait là un motif pour prévoir, sinon pour désirer le système de l'Histoire par branches spéciales. Dans ce cas, comment ne pas réclamer que la part soit faite à la Mécanique et à la Physique mathématique, pour ne pas parler d'autres sujets? L'analyste n'a-t-il pas autant d'intérêt à être renseigné exactement sur les idées, même abandonnées, émises dans des domaines étrangers, mais où il peut toujours faire une excursion, que sur les origines des procédés de calcul avec lesquels il est familier.

D'autre part, au-dessus de l'histoire de la Mathématique pure ou appliquée, il y a celle de la Science qui ne peut être constituée tant que les histoires particulières ne sont pas suffisantes, mais à

laquelle il faut tendre néanmoins, car seule elle peut représenter sous ses divers aspects le développement de l'esprit humain. Si la spécialisation s'impose, par suite de l'accroissement de la littérature scientifique, il n'est que plus nécessaire de ne pas isoler la Mathématique pure des questions qui lui ont donné naissance et qui n'ont pas cessé de provoquer son essor. Et précisément, lorsque, en achevant la lecture du dernier fascicule de M. Cantor, je me suis demandé s'il donnait une impression bien nette de la science mathématique de cette époque du XVIIIe siècle, il m'a semblé qu'il y manquait une caractéristique saillante; c'est que les problèmes que proposent les Académies des Sciences sont le plus souvent d'ordre pratique ou au moins concernent une application; c'est qu'Euler, Dalembert, Clairaut, Daniel Bernoulli emploient à des questions de ce genre la majeure partie de leur temps, c'est qu'ils constituent la Mécanique rationnelle, la Mécanique céleste, l'Hydrodynamique, qu'ils s'essaient à appliquer les Mathématiques à la Physique, que c'est de là que naissent les problèmes de théorie pure qui renouvellent le champ des études; qu'enfin c'est dans ce travail d'application que consiste le principal progrès mathématique de l'époque.

Dans l'Ouvrage de M. Cantor, cette lacune est voulue; aussi n'est-ce point une critique que je lui adresse; mais, jusqu'au dix-huitième siècle, cette lacune n'était pas réellement sensible. Les *Principia* de Newton appartiennent encore, pour partie au moins, à l'histoire de la Mathématique pure; ensuite le lien se brise. Un jour ou l'autre, il faudra le rattacher. Pour notre siècle, un éminent penseur vient d'essayer de le faire ([1]), mais pour le dix-huitième la tâche reste entière et elle mérite de ne pas être négligée.

PAUL TANNERY.

([1]) JOHN THEODOR MERZ, *A history of european thought in the nineteenth century*. Vol. I. Introduction : *Scientific thought*. Part I. Édimbourg et Londres, William Blackwood and Sons, 1896.

BACHMANN (P.). — ZAHLENTHEORIE. Versuch einer Gesammtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen. Vierter Theil : *Die Arithmetik der quadratischen Formen*. Erste Abtheilung. Un vol. in-8° : XVI-688 p. Leipzig, Teubner, 1898.

M. Bachmann poursuit la belle exposition d'ensemble des diverses parties de la théorie des nombres qu'il a entreprise. Le *Bulletin* a déjà rendu compte de deux Parties de l'Ouvrage de M. Bachmann consacrées, l'une aux éléments de la théorie, l'autre aux recherches analytiques qui ont leur origine dans les travaux de Lejeune-Dirichlet. C'est une réédition du Livre classique de l'auteur sur la division du cercle et les théories arithmétiques connexes qui formera la troisième Partie de son Ouvrage, dont la quatrième contiendra la théorie arithmétique des formes quadratiques. Le premier fascicule de cette quatrième Partie vient de paraître. Il est à peine utile de dire que ce Livre sera bien accueilli et qu'on y trouvera, comme dans les volumes précédents, une parfaite clarté dans l'exposition, une grande richesse d'information, et cette habituelle élégance dans les démonstrations que le lecteur, familier avec les modèles admirables qu'ont laissés Gauss et Lejeune-Dirichlet, est disposé à exiger de tous ceux qui écrivent sur la théorie des nombres.

M. Bachmann expose tout d'abord la théorie des formes quadratiques ternaires : sans être l'esclave de la méthode historique, il estime que l'exposition doit suivre, dans ses grandes lignes, le développement de la Science, et que l'intelligence d'une théorie particulière et, en quelque sorte, concrète, doit faciliter singulièrement l'intelligence de la théorie générale.

Il établit d'abord quelques propositions algébriques : formes adjointes, identités fondamentales, propriétés des substitutions linéaires, transformation d'une forme quadratique en elle-même : sur ce dernier point, il utilise surtout les recherches de M. G. Cantor; passant ensuite aux propriétés arithmétiques, il se bornera d'ordinaire au cas où le discriminant est impair. Il distingue tout d'abord l'ordre, l'espèce, la classe. L'ordre (Ω, Δ) d'une forme quadratique

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 + 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx'$$

dépend de deux entiers Ω, Δ liés au discriminant D par la relation $D = \Omega^2 \Delta$, et dont le premier Ω est le plus grand commun diviseur des coefficients de la forme adjointe. L'espèce, au sens d'Eisenstein et de S. Smith, se définit par certains caractères quadratiques, la classe par l'équivalence des formes qui la constituent. Ces notions acquises, l'auteur traite de la représentation d'un nombre par une forme, puis de la transformation d'une forme en elle-même, par une substitution entière. La définition de l'espèce conduit immédiatement à une limite supérieure du nombre d'espèces contenues dans un genre; mais la détermination des espèces qui existent réellement n'est pas sans difficulté.

Après s'être occupé de cette question, M. Bachmann introduit la notion de *masse*, due à Eisenstein : la mesure d'une forme positive (ou de la classe de cette forme) est l'inverse du nombre θ des substitutions entières qui changent cette forme en elle-même; de cette notion, on passe à celle de la mesure d'une espèce, ou d'un ordre; c'est la somme des mesures des formes distinctes contenues dans cette espèce ou cet ordre. Après s'être occupé de la forme $x^2 + x'^2 + x''^2$ et démontré les propositions classiques sur les décompositions en trois carrés, en quatre carrés, en nombres polygonaux, l'auteur consacre un important chapitre à la détermination (pour des formes positives) de la masse d'une espèce ou d'un ordre par les méthodes d'Eisenstein et de Smith.

Jusqu'ici, sauf pour les généralités, c'est des formes positives qu'il a été question. M. Bachmann passe maintenant à l'étude de l'équation

$$ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 = 0$$

et expose les recherches de Legendre, de Gauss, de MM. Dedekind et Cantor à ce sujet, recherches dont il fait ressortir en passant l'intérêt historique (démonstration de la loi de réciprocité par Legendre) : le théorème de Gauss sur la duplication des classes, établi antérieurement sur de tout autres principes, peut aussi, comme l'a montré M. Arndt, être regardé comme une conséquence de la résolution de cette équation.

Le reste de la première Partie est consacré à l'exposition ou à l'analyse des recherches d'Arnold Mayer sur la difficile question du nombre de classes d'une espèce donnée.

La seconde Partie est consacrée aux formes quadratiques à un nombre quelconque de variables. L'étude de ces formes doit être précédée de l'étude des formes linéaires : on rencontrera d'abord quelques propositions fondamentales sur les déterminants et sur la composition des formes bilinéaires d'après M. Frobenius, puis un important Chapitre consacré aux *diviseurs élémentaires* d'un système de nombres

$$\begin{array}{llll} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n}, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \ldots, & a_{mn}; \end{array}$$

en désignant par d_α le plus grand commun diviseur de tous les déterminants de degré α tirés du Tableau précédent, les nombres

$$l_\alpha = \frac{d_\alpha}{d_{\alpha-1}}$$

sont ces diviseurs élémentaires; ils doivent être regardés comme nuls dès que α dépasse le *rang* du tableau, c'est-à-dire le degré maximum d'un déterminant non nul. Les recherches de Kronecker, de Smith, de MM. Frobenius, Hensel, etc. ont montré le rôle essentiel que joue cette notion dans la théorie des équations, des congruences du premier degré, et des formes bilinéaires; par exemple, la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes bilinéaires à coefficients entiers soient équivalentes consiste en ce que les systèmes de leurs coefficients aient le même rang et les mêmes diviseurs élémentaires.

M. Bachmann développe ensuite les propositions algébriques fondamentales relatives aux formes quadratiques; l'auteur traite des substitutions linéaires, de l'équation aux inégalités séculaires, des formes adjointes et de leurs généralisations (Smith, M. Darboux), de la transformation d'une forme quadratique en elle-même (Cayley, MM. Hermite, Rosanes, Frobenius), de la loi de l'inertie, etc. Puis viennent la définition de l'ordre, de l'espèce, de la classe. La division en espèces des formes qui appartiennent à un même ordre est d'abord fondée sur les caractères quadratiques, puis, dans un tout autre sens, sur la théorie des congruences quadratiques, d'après M. Poincaré et M. Minkowski : dans ce

dernier sens, l'espèce est formée des classes de formes qui ont même nombre de variables, même indice d'inertie et qui sont congruentes pour n'importe quel module. L'auteur traite ensuite de la représentation des nombres et des formes à $n - 1$ variables par les formes à n variables, et ce problème lui permet d'établir les conditions pour l'existence réelle des espèces. Considérant enfin les formes positives, il détermine le nombre de représentations d'un nombre par quatre ou cinq carrés, et développe la belle expression que l'on doit à M. Minkowski de la mesure d'une espèce : il termine en traitant du nombre de représentations d'un nombre au moyen de six carrés ou plus. J. T.

FÉLIX KLEIN. — SUR L'ÉTAT DE LA PUBLICATION DES ŒUVRES DE GAUSS [*Göttinger Nachrichten* (1), 1898, Heft 1]. Traduit avec l'autorisation de l'auteur par *L. Laugel*.

La publication des *Œuvres complètes de Gauss*, et en particulier celle de son Œuvre posthume, fait partie des engagements pris depuis assez longtemps par notre Société. Au début, l'entreprise procéda assez rapidement, et il y a déjà plus de vingt ans qu'Ernest Schering, à qui avait été confiée cette publication, put faire paraître les six premiers Volumes; ceux-ci ont depuis longtemps pénétré partout où l'on s'intéresse aux Mathématiques, et ont toujours à tous semblé parfaits et par le fond et par la forme. Depuis lors, des circonstances fâcheuses vinrent interrompre la publication, en sorte qu'aujourd'hui que Schering n'est plus elle n'est pas plus avancée qu'alors. C'est d'autant plus regrettable qu'avec Schering s'est rompu le fil de la tradition personnelle qui nous rattachait à Gauss, et qu'il n'existe plus aucun mathématicien pour s'occuper aussi exclusivement, et cela dans chacune de ses diverses parties, de l'Œuvre posthume de Gauss, comme le fit Schering. La seule chose qui puisse remédier à cette rupture dans la continuité, c'est que Mme Schering n'a pas craint

(1) Présenté à la Société royale de Göttingue le 30 avril 1898, le 121e anniversaire de la naissance de Gauss.

de mettre sans aucune restriction les nombreuses notes et travaux préliminaires de son mari à notre disposition, et je pense remplir le vœu de la Société royale de Göttingue en lui offrant ici publiquement tous nos remercîments.

Il est d'ailleurs clair qu'après un tel laps de temps le travail doit être terminé d'après le nouveau plan suivant :

Nous n'avons pas confié le travail à un seul savant; au contraire, nous avons cherché à obtenir, pour chacun des divers domaines dans lesquels a travaillé Gauss, le concours de savants particulièrement compétents sur ces sujets. Je puis ici observer que ce plan réussit de la manière la plus satisfaisante, et que le travail commencé dans chaque domaine procède, grâce au zèle et à la compétence de chacun des collaborateurs, assez rapidement pour que nous espérions, autant que cela se peut dans les nouvelles circonstances, voir terminer ces travaux pour une date possible à prévoir.

Voici les noms de nos collaborateurs, joints à quelques remarques relatives aux domaines qui font l'objet de leurs travaux respectifs.

Je dois nommer d'abord notre nouveau professeur d'Astronomie théorique, M. Brendel : c'est à lui que revient tout naturellement la publication des morceaux astronomiques qui restent encore, et, par conséquent, aussi l'édition finale attendue depuis longtemps de la *Theoria motus*... de Gauss, ainsi que la publication de recherches très étendues *sur le calcul des perturbations,* faisant partie de l'Œuvre posthume et connues jusqu'ici seulement d'une manière incomplète. Malheureusement, il n'est pas très probable que les matériaux dont on dispose permettent de répondre d'une manière finale aux questions en suspens qui furent soulevées quand on eut connaissance de la correspondance entre Gauss et Bessel. Néanmoins, on peut toujours espérer que nous arriverons à voir clairement comment Gauss calcula numériquement les perturbations des petites planètes, de *Pallas* entre autres, qui est particulièrement intéressante à cause de l'inclinaison et de l'excentricité de son orbite.

En outre, M. le professeur Brendel sera rédacteur en chef et centralisera les affaires; il sera donc aussi chargé de la garde des matériaux de l'Œuvre posthume, des rapports réguliers entre les

collaborateurs, enfin de la revision générale relative à l'impression, etc. Je dois ici remercier particulièrement l'Administration de l'Université d'avoir bien voulu mettre à notre disposition une salle au rez-de-chaussée de sa Chancellerie.

De plus, nous avons acquis les services de cinq autres collaborateurs. Je les citerai dans l'ordre des domaines scientifiques auxquels ils consacreront leur travail, ordre adopté pour les six Volumes déjà parus.

M. R. Fricke, professeur à l'Ecole Polytechnique de Brunswick, a pris pour sa part la *Théorie des nombres* et l'*Analyse*. Sur ces sujets il a jusqu'ici paru déjà trois Volumes; aussi ne s'agit-il plus que de compléments peu étendus. Pour en citer un, en particulier : il se trouve encore, dans les papiers de Gauss, des recherches assez avancées sur les résidus cubiques, et encore des détails particulièrement intéressants sur la théorie des fonctions elliptiques de Gauss. L'an dernier, j'avais à l'occasion attiré l'attention sur ce fait étonnant que Riemann, d'après un cahier de l'un de ses cours que nous venions de recevoir, connaissait déjà en 1857 la figure complète formée d'arcs de cercle, et relative aux fonctions modulaires elliptiques [voir *Nachrichten der math.-phys. Classe*, 1897, p. 190 (*Soc. royale de Göttingue*)] (¹). Or, nous voyons ici dans les papiers de Gauss que celui-ci, plusieurs dizaines d'années plus tôt, était déjà en possession des mêmes résultats. On aurait déjà pu reconnaître une première indication de ceux-ci dans une figure qui se trouve à la page 477 du tome III des *Œuvres de Gauss*, et qui convenablement interprétée nous montre un premier couple de triangles de la division modulaire. Mais cette figure indique seulement le commencement des recherches en question; en effet, Gauss a connu aussi l'arrangement, la disposition des autres couples de triangles.

Ensuite viennent les recherches de Géométrie pour lesquelles nous avons obtenu le concours de M. P. Stäckel, professeur à l'Université de Kiel. L'intérêt des mathématiciens de notre temps se

---

(¹) *Comparez* DEDEKIND, *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen* (*Journal de Crelle*, t. 83, p. 262-292; 1877). C'est M. Dedekind qui, le premier, a reconnu le véritable sens de la figure de la page 477, sens qui avait échappé à Schering. (L. L.).

porte ici en première ligne sur les profondes spéculations de Gauss sur les fondements de la Géométrie, enveloppés de mystère pendant tant d'années.

Un premier éclaircissement a été déjà apporté à ces questions par la publication des passages ayant trait à ce sujet dans la correspondance de Gauss et de W. Bolyai, qui nous a été communiquée l'an dernier par M. le professeur Stäckel [*Nachrichten math. phys. Classe*, p. 1 et suiv. (*Soc. royale de Gottingue*, 1897)] (¹).

Un examen approfondi des manuscrits de Gauss n'a peut-être révélé sur ces questions rien de particulièrement étonnant, mais a néanmoins fourni une série de précieux points d'appui au moyen desquels on peut déterminer le développement des idées de Gauss beaucoup plus exactement qu'auparavant.

On trouve aussi, dans l'œuvre posthume de Gauss, de précieux renseignements sur l'origine des concepts fondamentaux exposés dans les *Disquisitiones circa superficies curvas*. Mais, au contraire, quelques détails relatifs à la Géométrie de la sphère sont absolument nouveaux. Gauss a déjà, comme le fit plus tard Riemann, interprété une variable complexe

$$z = x + iy$$

sur la sphère et a reconnu que les rotations de la sphère autour de son centre sont représentables par des substitutions linéaires d'une construction simple et bien déterminée, de cette quantité z. Et, ce qui peut sembler encore plus étonnant, dès l'année 1819, il a représenté les *mutations de l'espace* (c'est là sa propre expression), c'est-à-dire les rotations de l'espace autour de l'origine, jointes à une transformation de similitude quelconque, relative à cette origine, par les mêmes quatre paramètres qui ont été employés plus tard dans la *Théorie des quaternions*. Il nomme l'ensemble de ces quatre paramètres l'*échelle des mutations* (*mutationsscala*) et il donne les formules explicites pour la composition de deux échelles, c'est-à-dire pour la multiplication

(¹) Comparez aussi l'article plus étendu de MM. Stäckel et Engel (*Math. Ann.*, t. XLIX, p. 149-206). *Voir* aussi la traduction française de cet article (*Bulletin* de M. Darboux, 2e série, t. XXI; août 1897, et Librairie Gauthier-Villars, 1897).

de deux quaternions; il fait ici usage de la notation symbolique

$$(abcd).(\alpha\beta\gamma\delta) = (ABCD)$$

et il remarque expressément qu'il s'agit ici d'une opération qui n'est pas commutative.

Une des applications de la Géométrie, la Géodésie, est, chez Gauss, inséparable des recherches théoriques. Il n'est aucune entreprise à laquelle Gauss ait consacré pendant de nombreuses années un travail plus assidu qu'à celle de la *Triangulation du royaume de Hanovre*.

Ce ne sont pas les résultats numériques de ces opérations (où Gauss fit souvent usage de moyens pratiques peu satisfaisants), ce sont plutôt les méthodes et les points de vue généraux qu'il développa à cette occasion, qui sont devenus fondamentaux pour la Géodésie et son progrès ultérieur. Comme MM. Börsch et Krüger, professeurs à l'Institut central géodésique de Potsdam, nous ont promis leur concours pour les parties de l'œuvre posthume qui ont trait à ces questions, nous pouvons espérer beaucoup de choses très intéressantes. Un détail entre autres : on sait que ce fut d'après les conseils de Gauss que, dans la triangulation du grand-duché de Mecklembourg, l'on employa une projection particulière, adaptée à l'étendue du pays de l'ouest à l'est, à savoir une projection conforme conique.

Or on a trouvé au complet, dans les papiers de Gauss, toutes les formules qui se rapportent à cette question. L'on remarque aussi des indications bien déterminées relatives à la double projection conforme qui, depuis vingt-cinq ans, est employée dans les cartes officielles du royaume de Prusse.

Restent encore les recherches de Gauss en Physique mathématique. C'est M. E. Wiechert, professeur à l'Université de Göttingue, qui en prend soin; vous savez qu'il vient d'être nommé directeur de l'observatoire magnétique de Gauss. Les travaux de Gauss, dans ce domaine du magnétisme terrestre, ont fait déjà, en 1887, le sujet d'une *Festschrift* de Schering. Le contenu de ce Mémoire sera reproduit aussi sous une forme plus ou moins pareille dans les *Œuvres de Gauss*.

Ces travaux, comme l'on sait, ont, sous l'influence de Humboldt, eu pour résultat la création d'une *Union magnétique*, embras-

sant le globe terrestre. C'était là le premier pas dans une voie que notre Société a suivie, il y a quelques années, en s'associant au *Cartel des Académies* (1).

Ici, comme partout, l'activité de Gauss, bien qu'elle remonte à plus d'un demi-siècle en arrière, n'appartient pas à une période écoulée de la Science; au contraire, elle est évidemment liée aux problèmes du temps présent.

Encore quelques mots relatifs à la forme extérieure sous laquelle nous espérons mener à terme l'édition des *Œuvres de Gauss*. Nous pouvons compter encore sur trois volumes et sur un volume supplémentaire. En se reportant au numérotage des six Tomes déjà publiés, on aura l'arrangement suivant :

Le Tome VII sera exclusivement consacré à l'*Astronomie* et, pour tout dire en peu de mots, renfermera tous les travaux astronomiques qui n'ont pu trouver place dans le Tome VI.

Le Tome VIII renfermera les suppléments scientifiques aux Tomes précédents et, en particulier, dans cet ordre, ceux qui se rapportent à la Théorie des nombres, l'Analyse, la Géométrie et la Géodésie et, enfin, à la Physique mathématique.

Le Tome IX sera destiné aux *documents biographiques*. Ici prendront place aussi les communications d'ordre général extraites de la Correspondance scientifique si étendue de Gauss. En même temps, l'on donnera ici une description détaillée et exacte des papiers de Gauss qui, nous l'annonçons expressément dès aujourd'hui, une fois mis en ordre, seront déposés à la bibliothèque de l'Université où ils pourront être consultés par le public.

Enfin, le *Volume supplémentaire* renfermera un index raisonné. Si rien ne vient à l'encontre de nos plans, nous espérons avoir terminé tout le travail environ dans trois ans. En attendant, nous pouvons espérer que la vente des six Volumes déjà parus prendra un nouvel essor, car, maintenant, elle est confiée à une maison capable de l'activer (2).

---

(1) Les Académies de Göttingue, Leipsick, Munich et Vienne ont conclu un traité ayant pour but de subventionner en commun des entreprises scientifiques, telles que l'*Encyclopédie mathématique,* rédigée par MM. Burckhardt et Meyer (de Clausthal), qui va paraître dans le courant de cette année. (L. L.)

(2) Il a été dernièrement conclu un traité en ce sens avec la librairie Teubner. Ainsi les six premiers Volumes de notre édition des *Œuvres de Gauss* ne sont

Je ne puis terminer ce compte rendu sans adresser une prière à tous ceux que cela concerne.

Quelque riche et précieuse que soit notre collection de manuscrits laissés par Gauss, elle ne renferme pas néanmoins *tout* ce qui remonte à Gauss ou tout ce qui est intéressant comme document au point de vue scientifique. Ainsi, grâce aux efforts de M. le professeur Stäckel, nous avons pu dernièrement obtenir certaines nouvelles pièces importantes ou en recevoir communication : par exemple, les originaux des lettres de Gauss à Schumacher (qui, dans l'édition connue, n'ont pas été imprimées tout entières), puis les lettres de Gerling à Gauss (qui se trouvent en possession de la famille Gerling, tandis que les lettres de Gauss à Gerling font depuis longtemps partie de nos Archives). Nous devons encore remercier tout particulièrement M. Stäckel du don d'une lettre importante de Gauss à Taurinus et, de même, Son Excellence M. Struve, de Carlsruhe, du don de plusieurs lettres de Gauss à son père. Mais il existe sans aucun doute une foule de documents précieux dont nous n'avons pas connaissance.

Nous prions instamment tous, Sociétés comme individus, qui seraient en possession de quoi que ce soit remontant à Gauss lui-même, ou en possession de documents importants se rapportant à son activité scientifique, de nous en faire part et de vouloir bien nous en faciliter l'accès (¹).

MAURICE LÉVY. — LEÇONS SUR LA THÉORIE DES MARÉES, professées au Collège de France. — Première Partie : *Théories élémentaires. Formules pratiques de prévision des marées*. In-4°, XII-298 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.

L'Ouvrage dont M. Maurice Lévy présente aujourd'hui au public la première Partie a été rédigé à la suite de Leçons faites

plus, comme auparavant, mis en vente par l'administration de l'Université de Göttingue; au contraire, l'on devra s'adresser exclusivement à la Librairie Teubner. (F. K.)

(¹) Je saisis cette occasion pour exprimer le même vœu relativement à l'œuvre posthume de Riemann déposée à la bibliothèque de l'Université. En l'année 1897,

au Collège de France par l'éminent professeur, sur la Théorie des Marées, pendant l'année scolaire 1893-1894.

La Théorie des Marées a été quelque peu délaissée en France depuis les travaux de Laplace, tandis que les savants et les observateurs anglais ne cessent d'y consacrer leurs efforts : Tisserand lui-même ne l'a pas comprise dans sa *Mécanique céleste*. Rappeler l'attention sur ce sujet, qui a reçu de notre pays ses fondements essentiels, tel est le but poursuivi par M. Maurice Lévy.

Dans cette première Partie, l'auteur s'appuie essentiellement sur la théorie *statique* des marées ; cette théorie très simple permet, sans qu'il soit nécessaire de recourir à la Théorie dynamique de Laplace, beaucoup plus difficile, et dont l'exposition est réservée pour une seconde Partie, d'arriver aux applications pratiques, c'est-à-dire aux formules de prédiction des marées données par l'illustre auteur de la *Mécanique céleste,* formules utilisées encore aujourd'hui, peut-être avec quelques modifications, pour la rédaction de l'*Annuaire des Marées des côtes de France.*

En outre, au point de vue dynamique, M. Maurice Lévy expose la théorie de la propagation des marées dans des détroits ou canaux tracés suivant les grands ou petits cercles de la surface du globe, ou en communication avec des mers à marées connues, tout en subissant eux-mêmes les effets de l'attraction des corps célestes ; il expose aussi la théorie des marées fluviales et, comme complément, celle de l'onde solitaire qui fournit, au moins en partie, l'explication du mascaret.

Tel est le programme que s'est proposé M. Maurice Lévy et qu'il a développé magistralement dans ce Volume, d'une façon

---

nous avons acquis différents précieux documents relatifs à Riemann, ainsi que j'en ai rendu compte, en plus de détail, p. 189-190 des *Nachrichten* de notre Section physico-mathématique. Nous y avons ajouté depuis une série de manuscrits provenant des papiers laissés par Schering, en particulier la copie rédigée par Schering en 1855-56 des premiers Cours professés alors par Riemann sur les fonctions abéliennes et les fonctions P. Cette copie, comme Schering l'a raconté souvent, fut employée par Riemann lui-même pour la rédaction définitive de ses Mémoires sur ces questions. Nous désirerions beaucoup arriver à réunir, dans notre bibliothèque, des copies ou des rédactions de tous les cours professés par Riemann.

Nous prions donc très instamment tous ceux qui possèdent de tels documents de vouloir bien nous en donner communication. (F. K.)

claire et précise, mettant bien en évidence la portée des hypothèses faites pour réduire les problèmes à des termes simples, et ne craignant pas d'insister sur les côtés pratiques de la théorie.

Une analyse succincte des Chapitres de l'Ouvrage mettra en lumière la richesse des matières qui y sont traitées, et fera mieux comprendre l'importance de la part qui revient à M. M. Lévy dans les perfectionnements apportés depuis Laplace à la Théorie des Marées.

La première Section est intitulée : *Théorie statique et prédiction des Marées*. Elle comprend six Chapitres :

Chapitre I. — *Théorie statique des Marées.*

La *surface moyenne* des mers est la surface, immobile pour nous, qu'affecterait la mer si elle était en équilibre sous la seule action de la gravité.

La hauteur *statique* de la marée, positive ou négative, en un point donné et à un instant donné, est comptée à partir de la surface moyenne; pour l'obtenir, on admet avec Newton, D. Bernoulli, Euler, Maclaurin, etc., que l'Océan tend à chaque instant à se mettre en équilibre sous les actions réunies de la gravité et de l'attraction des corps célestes; ou, ce qui revient au même, que sa surface tend à se placer, à chaque instant, normalement à la résultante de ces actions, de sorte qu'elle affecte la forme d'une surface de niveau relativement à la somme des potentiels de la gravité et des astres.

En négligeant le potentiel de la couche aqueuse de hauteur h comprise entre la surface moyenne et la surface vraie des mers, ce qui revient à négliger la densité de l'eau devant la densité moyenne de la Terre, on arrive facilement à la formule

$$h = \frac{V - \overline{V}}{g},$$

pour déterminer l'élévation de la mer due à un potentiel perturbateur quelconque V; dans cette formule, g désigne la gravité au point considéré, et $\overline{V}$ est la valeur moyenne de la fonction V considérée pour tous les points de la surface moyenne de l'Océan.

Si alors on discute la hauteur de la marée lunaire dans une

mer recouvrant toute la Terre, on voit d'abord que cette marée varie en raison inverse du cube de la distance de l'astre; elle contient, en outre, trois termes qui correspondent respectivement à la marée semi-diurne, la plus importante sur nos côtes; à la marée diurne, importante sur les côtes du Tonkin en particulier; au flot à longue période, c'est-à-dire semi-mensuel pour la Lune.

Les lois bien connues des marées sont légèrement modifiées si l'on tient compte de la véritable configuration des mers : on est alors amené à introduire des constantes spécifiques de la distribution des eaux et des continents à la surface de la Terre, considérées pour la première fois par Lord Kelvin, et calculées par MM. Darwin et Turner dans les deux différentes hypothèses principales que l'on peut faire sur l'existence d'un continent antarctique. Inversement, on montre que des observations convenables du flot à longue période permettaient de résoudre, dans une certaine mesure, les questions relatives à l'existence d'un tel continent.

Les marées, telles que nous les observons sur nos côtes, sont dues aux actions combinées de la Lune et du Soleil; mais le phénomène se passe comme s'il était dû à des astres fictifs qui suivraient les astres vrais d'environ trente-six heures; parmi les explications possibles pour ce fait, M. Maurice Lévy signale celle qui consiste à considérer l'immense bassin des mers du Sud comme le berceau de toutes les marées, celles-ci se propageant ensuite dans l'Atlantique comme dans un large fleuve, et le retard grandissant du Sud au Nord, conformément aux observations.

Chapitre II. — *La prédiction des marées, d'après Laplace.*

Le développement en série trigonométrique du potentiel d'un astre, quand on tient compte du mouvement de cet astre, montre que son action peut être remplacée par l'ensemble des actions d'astres fictifs qui décriraient dans le plan de l'équateur, avec des vitesses uniformes, des orbites circulaires. Si l'on admet, avec Laplace, que l'état d'un système de corps, dans lequel les conditions primitives du mouvement ont disparu par les résistances passives qu'il éprouve, est périodique comme les forces qui l'animent, principe dont M. M. Lévy montre la véritable signifi-

cation, on est amené d'abord à considérer les ondes principales qui correspondent aux différents termes du développement du potentiel et qui sont périodiques comme ces termes. En tenant compte de la disposition des côtes, un tel terme donne naissance à une onde de même période, mais avec un coefficient de hauteur et une phase qui sont à déterminer pour chaque port; ces deux quantités ne dépendent que de la vitesse de l'astre fictif qui correspond au terme considéré du potentiel et, comme cette vitesse est petite, Laplace admet que ce sont des fonctions linéaires de cette vitesse. On est ainsi conduit, pour la hauteur de la mer, à une formule contenant huit constantes dépendant uniquement du port où l'on étudie la marée. La formule de Laplace peut, d'ailleurs, facilement se généraliser, quand on suppose que les coefficients de hauteur et les phases cessent d'être linéaires par rapport aux vitesses des astres fictifs correspondants.

Les constantes de la formule de Laplace peuvent être déterminées par les observations; Laplace lui-même a fait cette détermination pour le port de Brest par une méthode que rappelle M. M. Lévy.

En terminant ce Chapitre, l'auteur indique comment la formule de Laplace a été modifiée par M. Chazallon et montre l'usage de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour la prédiction de l'heure des marées.

Chapitre III. — *Développement harmonique de la hauteur de la mer dans un port.*

Laplace a trouvé sous forme finie la hauteur de la mer dans un port en négligeant les inégalités du mouvement de la Lune; mais, au Livre XIII de la *Mécanique céleste,* il a montré comment on pouvait effectuer le développement du potentiel en tenant compte des principales de ces inégalités et en déduire les expressions correspondantes des ondes. Ce travail a été repris, sous le nom d'*Analyse harmonique des ondes,* par MM. Darwin et Adams.

On est ainsi conduit, en développant le potentiel de la Lune en série trigonométrique d'arguments linéaires par rapport au temps, à la considération de l'onde principale et d'ondes elliptiques du premier ou du second ordre, c'est-à-dire dont les coefficients ren-

ferment l'excentricité de l'orbite de la Lune à la première ou à la seconde puissance; les ondes elliptiques semi-diurnes ou diurnes sont elles-mêmes majeures ou mineures; on a, de plus, à considérer les ondes évectionnelles et variationnelles qui correspondent à l'évection et à la variation, et les ondes sidérales.

Dans le cas du Soleil, on peut se contenter, outre l'onde principale, de l'onde elliptique majeure semi-diurne.

Enfin, il faut encore tenir compte de certaines ondes d'ordre supérieur et d'ondes composées.

Les coefficients théoriques de ces ondes, d'après la Théorie statique des marées d'une mer qui recouvrirait toute la Terre, sont donnés à la fin du Chapitre, ainsi que les vitesses angulaires de leurs arguments.

Chapitre IV. — *Réduction sous forme harmonique des observations des marées dans un port.*

A chaque onde théorique correspond, dans un port donné, une onde de même période, mais avec un coefficient de hauteur et un coefficient de phase dépendant du port; pour plus de généralité, on peut supposer que chaque onde donne lieu à deux constantes locales distinctes. La détermination de l'ensemble de ces constantes à l'aide des observations est un des problèmes les plus importants auxquels M. Maurice Lévy consacre ce Chapitre et le suivant.

Ici, il montre comment on arrive à représenter l'ordonnée de la courbe fournie pendant un an environ par le marégraphe sous forme harmonique, avec les vitesses des arguments qui entrent dans les expressions générales des ondes et des coefficients numériques convenables. Les précautions pratiques à prendre pour arriver sans trop de peine à des résultats dignes de confiance sont minutieusement expliquées, de sorte que l'on aperçoit bien comment on peut faire réellement le calcul.

En terminant l'auteur indique comment on peut arriver aux mêmes résultats en utilisant non plus les courbes du marégraphe, mais la connaissance des heures et des hauteurs des pleines et basses mers.

Chapitre V. — *Détermination des constantes d'un port et formules de prévision des marées.*

Dans ce Chapitre, l'auteur montre comment on peut déterminer les deux coefficients de hauteur et de phase relatifs à chaque onde pour un port donné, de telle façon que les formules obtenues s'appliquent non plus seulement à l'année qui correspond aux observations, mais à une époque quelconque.

Chapitre VI. — *Nouvelles formules et Tables de prédiction des marées de Darwin.*

Les formules harmoniques qui résultent des Chapitres précédents permettent de prédire à chaque instant la hauteur de la mer, et aussi les hauteurs des pleines et basses mers; mais elles sont mal appropriées aux calculs numériques et, en particulier, à ces dernières déterminations. Aussi Darwin est-il revenu à une formule non harmonique, du même genre que celle de Laplace, mais avec un plus grand nombre de constantes. Elle n'est pas simple, mais son application est rendue très facile par l'usage de Tables convenables. Dans cette formule, la position de chaque astre est définie par sa parallaxe et sa longitude mesurée dans son orbite, et de plus le phénomène des marées est rapporté directement au passage de la Lune au méridien, et non plus, comme dans celle de Laplace, à la position d'astres fictifs suivant les astres véritables à trente-six heures d'intervalle.

M. M. Lévy établit cette formule et en montre l'usage pour la détermination des heures des pleines et des basses mers.

Il signale le cas particulier de l'onde évanescente et montre, par des exemples relatifs au port d'Aden, étudié par Darwin, comment on doit diriger effectivement les calculs, en supposant que l'on ait à sa disposition les Tables auxiliaires nécessaires.

La seconde Section est intitulée : *Théorie dynamique des marées dans les détroits et les fleuves,* et comprend quatre Chapitres.

Chapitre VII. — *Marées dans un canal de faible largeur.*

Ici, M. M. Lévy étudie après Airy et M. Hatt, mais d'une façon plus générale, le mouvement de l'eau dans un canal assez étroit pour qu'il suffise de connaître ce qui se passe dans une section verticale et longitudinale moyenne entre les rives ; la ligne de fond du canal est supposée de très faible courbure et de très faible inclinaison; enfin on admet qu'il suffit d'étudier le déplacement d'un point de la surface. Dans ces conditions, on forme aisément les deux équations du mouvement, l'une d'elles étant l'équation dite *de continuité;* ce sont deux équations aux dérivées partielles, la profondeur d'eau et l'abscisse d'une section étant à chaque instant fonctions du temps et de l'abscisse initiale.

On tient compte de la gravité, de l'attraction des astres et du frottement. L'influence du mouvement de la Terre est négligeable en vertu des hypothèses faites.

Les équations obtenues prennent des formes différentes plus ou moins simples suivant les hypothèses que l'on peut faire sur la section du canal et sur sa pente.

Si, en particulier, on suppose un canal horizontal tracé suivant un grand ou un petit cercle de la Terre, on est amené à chercher pour les équations une solution périodique, comme la force agissante, d'après le principe de Laplace.

Le calcul se fait sans difficulté quand on se borne à une première approximation; chaque terme du potentiel donne naissance à une onde périodique, et le frottement n'a d'autre influence que d'en modifier la phase d'une quantité constante.

Si l'astre agissant se meut dans l'équateur, son action peut se réduire à deux ondes semi-diurnes dont l'une passe par toutes les phases dans le canal entier, à chaque instant, tandis que l'autre passe par toutes les phases sur chaque moitié du canal.

Si l'astre a une déclinaison, et si le canal est tracé suivant un grand cercle, on est conduit à une onde diurne semblable à la seconde des ondes précédentes ; si le canal est méridien, ces deux ondes sont stationnaires : c'est un clapotis.

Enfin, M. M. Lévy montre comment on tiendra compte du mouvement propre de l'astre, et quelle est l'influence du frottement dans ce cas.

Chapitre VIII. — *Canaux à marées communiquant avec des continents ou des mers. Méthode générale et exemple.*

L'hypothèse des canaux circulaires fermés conduit à employer des solutions très particulières des équations formées au Chapitre précédent. On obtient des solutions plus générales, dépendant d'autant de constantes arbitraires qu'on le veut, en ajoutant aux solutions précédentes des solutions des équations linéaires que l'on considère dans une première approximation, après suppression des seconds membres. Ces solutions contiennent des exponentielles et des termes trigonométriques, comme d'habitude.

Les constantes correspondantes sont déterminées d'après les différentes hypothèses faites sur la nature du canal.

Les principaux cas sont ceux d'un canal circulaire fermé, d'un canal indéfiniment prolongé dans les deux sens, d'un canal limité par deux continents, d'un canal limité par un continent et indéfiniment prolongé dans un sens; d'un canal indéfini dans un sens et communiquant à son origine avec une mer sans marée, ou avec une mer dont les oscillations sont synchrones à celles du canal; d'un canal communiquant avec deux mers sans marée, ou avec deux mers de même niveau ayant des marées synchrones au canal; d'un canal communiquant avec une ou deux mers dont les oscillations sont données sous la forme harmonique, etc.

Si l'on veut tenir compte des conditions initiales supposées quelconques, M. M. Lévy montre que les termes à ajouter sont multipliés par le coefficient $e^{-\frac{f}{2}t}$, f étant le coefficient de frottement; les oscillations qui en résultent s'éteignent donc plus ou moins rapidement suivant la grandeur de f, ce qui justifie le principe de Laplace.

L'auteur développe les calculs dans le cas d'un canal qui n'a pas de marée propre et qui communique d'une part avec un lac et de l'autre avec une mer à marée; l'étude des ondes qui se propagent dans le canal et des courants qui en résultent présente un grand intérêt pratique, mis en évidence par l'application qui est faite à la partie du canal de Suez qui va de la mer Rouge aux lacs Amers : on trouve ainsi que les formules de première approxima-

tion précédemment développées donnent des résultats conformes à l'observation en tout ce qui touche à la hauteur et à la propagation de la marée dans le canal, mais s'en écartent complètement en ce qui touche la grandeur absolue des courants. Il faut donc recourir à une seconde approximation.

La fin du Chapitre est consacrée à l'étude des canaux de largeurs variables ; les résultats sont simples et analogues aux précédents si l'on suppose que la largeur varie suivant une loi exponentielle.

Chapitre IX. — *Marées fluviales.*

Le premier cas étudié est celui d'un fleuve de largeur constante, abstraction faite du frottement de la vague-marée ; la première approximation est aisée et donne, dans l'hypothèse d'une marée sinusoïdale, des résultats en contradiction avec l'expérience sur les trois points suivants mis en évidence par les observations :

1° La mer met plus de temps à se retirer qu'à monter ;

2° La hauteur de la marée va diminuant à mesure qu'on s'éloigne de l'embouchure ;

3° Les plus grands courants ne coïncident pas exactement avec les hauteurs extrêmes de l'eau.

Il faut donc procéder à une seconde approximation et tenir compte du frottement.

En négligeant cependant encore celui-ci, on détruit le premier désaccord et l'on trouve cette conséquence importante : en deuxième comme en première approximation, le courant est en chaque point une fonction de la seule hauteur de la marée en ce point, ce qui permet en particulier de calculer le volume d'eau d'une marée.

D'ailleurs cette loi est rigoureuse, comme le montre la solution de M. de Saint-Venant ; toutefois cette solution ne remplit pas la condition nécessaire que la hauteur de la marée s'éteigne à l'infini.

Si enfin on tient compte du frottement, le problème devient beaucoup plus difficile ; M. M. Lévy le résout en première approximation et montre comment on pourrait effectuer la seconde.

La fin du Chapitre est consacrée à l'étude des fleuves de largeur très lentement variable, et à pente constante; le problème se ramène au précédent.

Chapitre X. — *L'onde solitaire.*

Après avoir rappelé les équations générales de l'Hydrodynamique dans le cas des mouvements plans, l'auteur étudie d'abord les solutions de première approximation qui donnent lieu à des mouvements périodiques se propageant avec une vitesse uniforme, ou à des mouvements périodiques stationnaires, c'est-à-dire encore à la houle ou au clapotis; il justifie ainsi les hypothèses admises précédemment sur les déplacements des molécules liquides.

Si sur un canal horizontal dont la surface est parfaitement calme, on produit subitement une intumescence, celle-ci se régularise rapidement et se propage avec une vitesse à peu près constante pendant un temps fort long : c'est l'onde solitaire. La théorie de cette onde a été donnée par M. Boussinesq; M. M. Lévy la reprend d'une façon nouvelle et montre que les trajectoires des particules fluides sont ici paraboliques, et non plus elliptiques comme dans la houle; la durée du parcours d'une trajectoire est théoriquement infinie, mais pratiquement assez courte à cause du frottement.

La même théorie s'applique aux intumescences de formes viariables, mais de faibles hauteurs et de faibles courbures. Le volume et l'énergie totale d'une intumescence sont constants; il en est de même de la nouvelle grandeur introduite par M. Boussinesq et appelée *moment d'instabilité;* cette grandeur donne lieu au beau théorème suivant :

De toutes les intumescences d'énergie donnée, c'est l'onde solitaire qui a le plus petit moment d'instabilité.

H. Andoyer.

MÉLANGES.

THÉORIE DES CONNEXES DANS L'ESPACE;

PAR M. D. SINTSOF.

Cet Ouvrage, publié en russe dans les *Mémoires scientifiques de l'Université de Kasan* (1894-1895), est consacré à l'une des configurations qui ont été introduites par Al. Clebsch dans son Mémoire bien connu *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Götting., Abh. XVII, 1872), à celle dont l'élément est la combinaison (point, plan). Jusqu'à présent, des cas particuliers seulement en étaient considérés : connexe bilinéaire, étudié par MM. Battaglini, Lazzeri, P. Muth, Pittarelli, Predella, etc., ainsi que par les auteurs qui ont traité de la collinéation dans l'espace : je citerai MM. Hirst, Richelot, St. Smith, etc.; et le connexe du second ordre et de la première classe, considéré par M. R. Krause (*Math. Ann.*, XIV). Je me suis donc proposé d'en essayer une exposition systématique, prenant comme exemple celle que M. Lindemann a donnée dans son édition des *Leçons de Géométrie* de Clebsch (t. III de la traduction française de M. Benoist), de la théorie du connexe dans le plan.

Dans l'Introduction (p. 3-13) je mets en évidence ce qui a été fait pour la configuration considérée par Clebsch lui-même et je donne ensuite un aperçu sur les travaux traitant des connexes en général.

Chapitre I (p. 14-75) : *Propriétés générales des connexes.* D'abord (§ 1-3) je donne la description et les propriétés énumératives simples des configurations composées de ∞^5 (connexe), ∞^4 (coïncidence), ∞^3 (bicoïncidence), ∞^2 (couple de surfaces), ∞^1 (couple : courbe gauche, surface développable) éléments, ainsi que le nombre d'éléments communs à six connexes, etc.; je considère ensuite les éléments singuliers, connexe tangent et connexe conjugué (§ 4-6). Ici, je veux entrer en quelques détails.

A chaque point x de l'espace appartient, dans le connexe

$$(1) \qquad f(x_1, \ldots, x_5; u_1, \ldots, u_5) = 0.$$

une surface U_x, dont les plans tangents seuls forment des éléments du (1) avec le point x, et à chaque plan u appartient une autre surface X_u, dont les points seuls forment des éléments du (1) avec le plan u. Les surfaces U_x et X_u sont dites *les surfaces du connexe;* elles sont de n classe et du m ordre respectivement, si le connexe (1) est de n classe et du $m^{\text{ième}}$ ordre (c'est-à-dire si son équation est de n degré par rapport aux u et du $m^{\text{ième}}$ degré par rapport aux x).

Il peut arriver cependant que certains points (*points principaux* du connexe) satisfassent identiquement à l'équation (1) du connexe, quelles que soient les valeurs des u_i; c'est-à-dire que la surface U_x n'existe pas, son équation étant $0 = 0$. Tel, par exemple, est le point

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 0$$

pour le connexe

$$(\alpha) \qquad \sum_{i=1}^{i=4} (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3)u_i = 0;$$

de tels points peuvent même former des lignes continues; par exemple, les arêtes du tétraèdre des coordonnées dans le cas du connexe

$$(\beta) \qquad a_1x_2x_3x_4u_1 + a_2x_3x_4x_1u_2 + a_3x_4x_1x_2u_3 + a_4x_1x_2x_3u_4 = 0.$$

Réciproquement, le *plan principal* du connexe est celui dont les coordonnées satisfont identiquement à l'équation (1), quels que soient les x_i, et pour lequel la surface du connexe X_u n'existe pas, son équation étant $0 = 0$. *Par un point principal du connexe passent toutes ses surfaces* X_u *et toutes les surfaces* U_x *sont tangentes au point principal.*

Dans le connexe bilinéaire

$$(a) \qquad f = \Sigma a_{ik}x_iu_k + a_\lambda u_\lambda = 0$$

à chaque point x appartient un autre point y

$$\rho y_k = \sum_i a_{ik}x_i + \frac{df}{du_k}$$

comme centre d'un faisceau des plans formant l'élément de (a)

avec x; et à chaque plan u, un autre v

$$\sigma v_i = \sum_k a_{ik} u_k = \frac{df}{dx_i};$$

le connexe bilinéaire détermine donc une collinéation dans l'espace.

Pour faciliter l'étude du connexe général (1), nous pouvons considérer un connexe bilinéaire particulier, que je nomme *connexe tangent au* (1) dans son élément (x, u) : c'est le connexe

$$(2) \qquad \sum_{ik} \frac{d^2 f}{dx_i\, du_k} X_i U_k - mn\, a_x^{m-1} u_\alpha^{n-1} a_X U_\alpha = 0.$$

Ce connexe fait correspondre à chaque point X de l'espace un autre point Y

$$\rho Y_k = \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i\, du_k} X_i,$$

et, en particulier, au point x lui-même le point y

$$(3) \qquad \rho y_k = m \frac{df}{du_k},$$

c'est-à-dire *le point de contact du plan u à la surface* U_x. De même, au plan U correspond un autre plan V

$$\sigma V_i = \sum_k \frac{d^2 f}{dx_i\, du_k} U_k$$

et, en particulier, au plan u le plan v

$$(4) \qquad \sigma v_i = n \frac{df}{dx_i};$$

le plan tangent à la surface X_u *au point* x.

A chaque élément (x, u) correspond ainsi à l'aide de (2) un autre élément (y, v) et un seul, en général, sauf pour des éléments particuliers que l'on appelle pour cela *éléments singuliers*. En effet, le point Y devient indéterminé si l'on a

$$(A) \qquad \sum_k \frac{d^2 f}{dx_i\, du_k} U_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ce qui donne une équation de condition

$$(5) \qquad \left| \frac{d^2 f}{dx_i\, du_k} \right| = 0.$$

Cette condition remplie, les (A) déterminent les coordonnées du point X, pour lequel Y est indéterminé. Ce point est le point x lui-même, si l'on a

$$(6)\qquad 0 = \sum_i \frac{d^2 f}{dx_i\, du_i} x_i - m \frac{df}{du_k} = 0.$$

Réciproquement, le plan Y correspondant au plan U est indéterminé, si l'on a

$$\sum_k \frac{d^2 f}{dx_i\, du_k} U_k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ce qui donne la même équation de condition (5); pour que ce soit le plan u, dont le plan correspondant soit indéterminé, doivent être remplies les équations

$$(7)\qquad \sum_k \frac{d^2 f}{dx_i\, du_k} u_k - n \frac{df}{dx_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Les éléments singuliers sont donc de deux genres : singularités ponctuelles et singularités tangentielles. *Les premières* [définies par les équations (7)] sont, en général, les éléments dont les points *sont des points singuliers des surfaces* X_u *correspondantes; les dernières, ceux dont les plans sont les plans tangents singuliers des surfaces* U_x *correspondantes.* On pourrait donc prendre directement ce fait comme définition des éléments singuliers du connexe. Une objection cependant s'y oppose : c'est l'existence des points et plans principaux. En effet, alors les surfaces du connexe X_u ou U_x n'existent plus, quoique les équations (6) ou (7) ne soient pas moins satisfaites. Or, nous pouvons regarder chaque point de l'espace comme un point singulier de la surface identique $0 = 0$ et alors conserver la définition mentionnée (c'est ce que j'ai fait dans mon Ouvrage), ou bien, et cela paraît meilleur, au point de vue géométrique, dire que les éléments singuliers du connexe sont d'abord ceux dont le point ou le plan est un point ou plan singulier de la surface correspondante, et ensuite ceux dont le point est le point d'intersection de toutes les surfaces X_u du connexe, ou le plan est le plan tangent commun de toutes les surfaces U_x du connexe.

En prenant successivement tous les éléments (x, u) du connexe (1), les éléments (y, v) correspondants forment un nouveau

connexe, dit *le connexe conjugué* (¹), lequel est donc défini analytiquement par les équations (1), (3), (4).

C'est à ce connexe covariant que M. F. Lindemann rattache la définition des éléments singuliers, disant que ce sont *les éléments, à chacun desquels dans le connexe conjugué correspondent non plus un seul élément, mais plusieurs*. Cette définition est identique, au fond, à celle que j'ai donnée plus haut.

Les propriétés principales du connexe conjugué, analogues à celles données par M. C. Stephanos pour le connexe plan, sont les suivantes :

1° *Le conjugué du connexe conjugué d'un connexe est le connexe primitif lui-même.* De cette proposition, presque évidente à cause de la symétrie des rôles des surfaces X_u et V_y qui ont le plan tangent commun v dans le point de contact x, et des surfaces U_x et Y_v, qui ont aussi le plan tangent commun u dans le point de contact y, je donne deux démonstrations analytiques, dont l'une est parfaitement analogue à celle de M. Lindemann.

2° *Le lieu géométrique X_y des points x, dont les surfaces du connexe U_x passent par le point y, est identique avec la surface U_y, qui correspond au point y dans le connexe conjugué, et avec l'enveloppe des surfaces X_u, correspondant aux plans u, qui passent par le point y.*

L'enveloppe U_v des plans u dont les surfaces X_u du connexe touchent le plan v, est identique à la surface Y_v, correspondant au plan v dans le connexe conjugué, et à l'enveloppe des surfaces U_x, correspondant aux points x, situés dans le plan v.

3° *La surface X_u qui appartient au plan u passant par le point y touche la surface X_y en m^3 points x, dont les surfaces correspondantes U_x ont dans le point y le plan tangent u.*

La surface U_x, qui appartient au point x, situé dans le plan v, touche la surface U_v, en n^3 plans tels que les surfaces X_u du connexe correspondantes à ces plans touchent le plan v au point x.

4° *La surface U_x appartenant au point x de la surface X_y a pour plan tangent au point y le plan u, dont la surface du connexe X_u touche la surface X_y au point x.*

La surface X_u appartenant au plan u, tangent à la surface U_v, touche le plan v au point x, dont la surface U_x du connexe a, avec U_v, un plan tangent commun u.

(¹) Il y a des connexes qui sont leurs propres conjugués : par exemple, le connexe identique $u_x = 0$, le connexe (β) déjà cité, etc.

Je trouve aussi l'ordre m' et la classe n' du connexe conjugué d'un connexe (m, n) dont l'équation est supposée générale

$$m' = n[m^2n^2 - 6m(m-1)n(n-1) - 3(m-1)^2(n-1)^2],$$
$$n' = m[m^2n^2 - 6m(m-1)n(n-1) - 3(m-1)^2(n-1)^2].$$

Dans le paragraphe 7 (*Sur la transformation univoque et le genre d'un connexe*) je retrouve les mêmes nombres par une autre méthode, ce qui en donne une vérification.

Le Chapitre II (p. 76-150) traite de la coïncidence principale, c'est-à-dire de l'ensemble des éléments du connexe, dont le point et le plan sont dans la situation réunie. Après les remarques générales sur les coïncidences (définition de leurs éléments principaux et singuliers), je passe (§ 9) à la coïncidence principale (§ 10) d'un connexe, qui est définie par l'ensemble de deux équations

$$f(x, u) = 0, \qquad u_x = 0.$$

La notion généralisée de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre, qui est due à M. Sophus Lie et qui forme la base de sa théorie de l'intégration, a son origine dans la considération de l'élément de l'espace composé d'un point et d'un plan, qui sont dans la position réunie. Ayant le caractère essentiellement projectif, les théories de M. Sophus Lie gagnent, à ce qu'il paraît, en évidence géométrique par l'emploi des coordonnées homogènes, et c'est là l'importance principale de la théorie des connexes. Ce fait a été déjà signalé par M. Darboux à la fin de son Mémoire *Sur les solutions singulières des équations aux dérivées partielles du premier ordre*. Donner une exposition systématique, tel était mon but, d'autant plus que les théories de M. Sophus Lie n'étaient pas jusqu'alors exposées en russe. Dans le paragraphe 12 je signale l'identité des considérations de M. Fouret sur les implexes avec celles de la théorie de la coïncidence principale; je montre que ses théorèmes (*Comptes rendus*, t. LXXXII, p. 1497-1500; t. LXXXIV, p. 436-439) ne sont que des cas particuliers des théorèmes généraux sur l'intersection des connexes, qui sont donnés dans le Chapitre I, paragraphe 1. Dans le paragraphe 13 je passe aux surfaces des singularités de la coïncidence et aux solutions singulières des équations aux dérivées

partielles du premier ordre; j'expose ici les beaux résultats de M. Darboux (Mémoire déjà cité). Comme mon exposition ne diffère que par l'introduction des coordonnées homogènes et la terminologie de la théorie des connexes, je n'ai pas besoin de m'y arrêter. La notion du genre de la coïncidence principale et quelques remarques sur les transformations de contact font l'objet des deux derniers paragraphes de ce Chapitre.

Les Chapitres III et IV sont consacrés aux applications. Le Chapitre III traite le cas des connexes $(m, 1)$ et $(1, n)$: leurs points et plans critiques (les points à la fois singuliers et principaux de la coïncidence principale) (§ 16), le lieu géométrique des points correspondant aux points d'une droite (§ 17) et d'un plan (§ 18); certaines surfaces covariantes du connexe : *Singularitäten, Determinanten* et *Kernfläche,* établies par M. R. Krause pour le cas particulier du connexe $(2, 1)$, y sont considérées pour le cas plus général du connexe $(m, 1)$. Le reste du Chapitre (p. 166-191) contient une étude de la coïncidence principale des connexes $(m, 1)$ et de ses surfaces intégrales. La méthode de M. Darboux pour former l'intégrale complète ou le facteur intégrant à l'aide des intégrales particulières y est exposée pour le cas considéré. Cela conduit à l'étude des points critiques; je montre que la considération du connexe tangent mène naturellement à leur classification, donnée par M. Poincaré dans ses Mémoires sur les propriétés des courbes définies par les équations différentielles et poussée plus loin par M. Autonne.

Le Chapitre IV s'occupe du connexe $(1, 1)$ dont l'étude approfondie semble nécessaire pour l'étude du connexe général. La formation du système fondamental des formes invariantes [problème résolu par M. Mertens (*Monatsh. für Math. und Physik.*, t. I)], et l'interprétation géométrique de ces formes font l'objet des paragraphes 21 et 23. Le paragraphe 22 donne une digression sur les analogies pour l'espace du problème de Muth (*Math. Ann.*, Band XL, p. 89-98) et au paragraphe 23 je considère les collinéations dégénérées et singulières. Je veux signaler seulement une fonction métrique, que j'introduis page 217 et qui me paraît avoir certaine utilité dans la théorie des connexes : c'est le *moment de deux éléments* (x, u), (y, v), c'est-à-dire le moment de deux droites, celle qui joint les points x, y et celle qui est commune

aux plans u, v. Analytiquement cette fonction a pour expression

$$\Sigma(u_i v_k - u_k v_i)(x_i y_k - x_k y_i) = u_x v_y - u_y v_x.$$

Enfin, dans les cinq dernières pages je montre que les considérations précédentes peuvent être généralisées pour l'espace de n dimensions; nous aurons une configuration tout à fait analogue, si nous prenons pour élément la combinaison d'un point et d'un hyperplan.

J'ai tâché de mettre en évidence les rapports de la théorie des connexes avec d'autres branches de la Géométrie et de l'Analyse pour en justifier l'étude, et à cause de cela dans beaucoup de points j'ai dû seulement indiquer la question sans l'approfondir; je me propose d'y revenir dans des publications ultérieures où je vais considérer en même temps une configuration plus générale ayant pour élément la combinaison (point, droite, plan).

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

KLEIN. — Conférences sur les Mathématiques, faites au Congrès de Mathématiques tenu à l'occasion de l'Exposition de Chicago, recueillies par le prof. *Ziwett*, traduite par M. *Laugel*. Un vol. gr. in-8°; 125 p. Paris, Hermann, 1898.

Il serait fort commode que tous les bons livres, ceux qui méritent d'être lus, fussent traduits dans toutes les langues des peuples civilisés : les livres scientifiques, en particulier, ne perdent rien à être traduits; assurément, il y a des savants qui écrivent fort bien, mais les qualités du bon style scientifique, l'art de la composition et la clarté de l'expression sont de celles qui peuvent passer dans une traduction. Plus on traduira de bons livres, mieux cela vaudra; c'est entendu. Mais il serait inhumain de demander aux éditeurs de faire des sacrifices exagérés, de publier la traduction de livres qui, par leur nature même, n'auront jamais qu'un nombre très limité de lecteurs, surtout lorsque la plupart de ces lecteurs désignés risquent d'avoir déjà entre les mains l'édition originale. Plutôt que d'attendre ces sacrifices des éditeurs, il vaut mieux sans doute apprendre les langues étrangères, et tous ceux qui veulent, sur un point quelconque, se tenir un peu au courant du mouvement scientifique ont reconnu cette nécessité; mais, trop souvent, ils ne savent, de ces langues étrangères, que ce qui leur est strictement indispensable; ils ne savent bien que la langue spéciale de la science qu'ils étudient; savoir cela, lorsqu'il s'agit de Mathématiques, est relativement facile. La plupart des mathématiciens se tirent d'affaire lorsqu'ils ont à lire un Mémoire étranger qui les intéresse vraiment. Leur embarras commence quand il s'agit d'un livre qui, tout en traitant de Mathématiques, n'est pas didactique, mais contient des aperçus, des vues générales, des développements philosophiques : les mots qu'ils rencontrent ne sont plus les mots qui leur sont familiers; ils ne sont plus soutenus par l'enchaînement des raisonnements, aidés par ces symboles algébriques qui, heureusement, sont les mêmes dans toutes les langues. Si le livre est l'œuvre d'un maître, d'un de ceux qui sèment les idées et dont ils voudraient pénétrer

jusqu'au bout la pensée profonde, c'est alors qu'ils se prennent à souhaiter une traduction. Je ne veux pas cacher, pour ma part, le plaisir que j'ai eu à relire, dans la traduction de M. Laugel, les Conférences de M. Klein. Le *Bulletin* a déjà parlé de ces Conférences, et je n'y reviendrai pas; mais c'est bien là un de ces livres qu'il importait de traduire; il faut savoir gré à M. Laugel de l'avoir fait, et à M. Hermann d'avoir publié cette traduction. M. Laugel a ajouté quelques renseignements bibliographiques qui seront certainement utiles, quelque modestie que M. Laugel ait mis à en parler. M. Hermann a tenu à bien faire les choses, et c'est presqu'une édition de luxe qu'il offre au public. On ne lui doit donc que des remercîments, et il y aurait mauvaise grâce à lui reprocher la distraction qu'il a eue en gratifiant M. Klein d'un titre auquel celui-ci se trouve ne pas avoir encore droit, autrement que par son mérite scientifique. J. T.

NÉDÉLEC. — Le calcul vectoriel et ses applications en Géométrie et en Mécanique. Premier volume; x-246 p. in-8°. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1897.

Nous empruntons à l'auteur les lignes suivantes, où il résume l'objet de son Livre.

« L'Ouvrage que nous présentons au lecteur comprend trois Parties distinctes :

La première Partie est relative aux principes élémentaires ou aux règles du calcul vectoriel.

La deuxième Partie comprend la théorie des fonctions vectorielles ou l'étude des fonctions de points, et celle des vecteurs de points.

Enfin la troisième Partie concerne les applications du calcul vectoriel à la Géométrie, à la Cinématique et à la Physique moléculaire.

Après avoir exposé dans le premier Chapitre l'origine et la nature du calcul vectoriel, nous donnons dans le second Chapitre des notions générales sur les vecteurs; et les définitions que nous présentons résultent des théorèmes sur le calcul des vecteurs. Nous définissons d'une manière générale l'addition vectorielle et l'addition versorielle, et nous pensons pouvoir faire disparaître

bien des obscurités dans le calcul des quaternions et permettre à des esprits plus aptes aux découvertes mathématiques de développer avec plus de sûreté les règles de calcul des quantités périodiques. Nous ajoutons quelques notions, d'ailleurs bien connues, sur l'exponentielle linéaire qui n'est autre chose que le type d'une quantité circulaire ou quaternion.

Nous abordons dans le troisième Chapitre les règles algébriques du calcul de l'unité imaginaire et nous démontrons d'une manière purement arithmétique les propriétés des vecteurs quadrants, établies par Hamilton d'une manière intuitive.

Nous complétons les formules par quelques notions sur les composantes obliques, qui trouvent leur application dans le calcul d'une fonction linéaire, considérée d'une manière générale.

Dans le Chapitre IV nous montrons l'analogie de l'équation versorielle binome avec l'équation binome ordinaire et, sans doute ces analogies pourront être définies avec plus de détail.

Nous reprenons ensuite le produit des vecteurs accompagnés de leurs modules, parce que la forme additive ou vectorielle des quaternions donne au calcul algébrique une tout autre forme.

Nous reprenons la sommation générale des vecteurs et enfin nous croyons devoir, avant d'aborder les propriétés générales des fonctions vectorielles, donner la théorie des équations vectorielles du premier degré. »

BURALI-FORTI (C.). — INTRODUCTION A LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE SUIVANT LA MÉTHODE DE H. GRASSMANN. Un vol. in-8°, XI-165 p. Paris, Gauthier-Villars, 1897.

« Aujourd'hui, dit M. Burali-Forti, la méthode de Grassmann n'a pas besoin d'être recommandée; elle n'a besoin que d'être connue et appliquée... » Le Livre qu'il publie servira très certainement à répandre sinon la méthode du fondateur de l'*Ausdehnungslehre,* au moins l'usage des procédés auxquels elle conduit, et cela importe beaucoup, tant à cause des avantages incontestables que présentent ces procédés que parce que ceux qui s'en seront rendus maîtres seront d'autant mieux préparés à remonter à leur

origine abstraite. Ce Livre est court, ce qui est rassurant pour le lecteur; et quoique le style soit très condensé, il est vraiment clair pour qui veut se donner la peine de réfléchir. M. Burali-Forti part d'éléments relativement concrets, *les formes géométriques,* dont la considération est due à M. Peano, et montre comment on peut raisonner et calculer avec ces *formes,* d'après les règles de Grassmann; l'exposition se suit d'autant plus aisément qu'on peut s'aider constamment de l'intuition géométrique et cette facilité compense ce qu'il y a de forcément arbitraire dans la définition, non pas tant des formes géométriques elles-mêmes que de certaines opérations, comme l'*opération index* et surtout la multiplication *régressive*.

Voici comment l'auteur définit les formes géométriques de M. Peano :

« Nous appellerons *formes du premier, deuxième et troisième ordre,* des entités telles que

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_n A_n,$$
$$x_1 A_1 B_1 + x_2 A_2 B_2 + \ldots + x_n A_n B_n,$$
$$x_1 A_1 B_1 C_1 + x_2 A_2 B_2 C_2 + \ldots + x_n A_n B_n C_n,$$

où les $x_1, \ldots$ sont des nombres réels et $A_1, \ldots, B_1, \ldots, C_1, \ldots$ représentent des points. »

Expliquons ce que l'auteur entend ici par le mot *entité*. Considérons, par exemple, une forme du premier ordre et regardons-la comme un ensemble de points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, à chacun desquels est associé un nombre $x_1, x_2, \ldots, x_n$; les signes $+$ n'ajoutent rien à l'idée qu'on vient d'exprimer; ils traduisent, si l'on veut, le mot *ensemble;* de même une forme du second ordre sera un ensemble de couples de points A_1 et B_1, A_2 et B_2, ..., un nombre étant associé à chaque couple, et les deux points dans chaque couple ayant un ordre déterminé, etc. La forme est entièrement donnée si l'on donne les points qui y figurent, leur ordre dans chaque couple ou dans chaque terne, s'il s'agit d'une forme du second ou du troisième ordre, et les coefficients numériques correspondants; mais cette définition doit être immédiatement complétée par celle de la définition de l'égalité de deux formes.

Convenons de désigner par le symbole ABCD le nombre qui

mesure le volume du tétraèdre dont les sommets sont les points A, B, C, D, nombre positif ou négatif suivant la disposition du tétraèdre, et remarquons en passant qu'une expression telle que

$$x_1 A_1 B_1 C_1 D_1 + x_2 A_2 B_2 C_2 D_2 + \ldots + x_n A_n B_n C_n D_n,$$

où x_1, x_2, ..., x_n sont des nombres et A_1, B_1, C_1, D_1, ..., A_n, B_n, C_n, D_n sont des points, expression que l'on peut regarder comme une forme du quatrième ordre, n'est autre chose qu'un nombre, $x_1 A_1 B_1 C_1 D_1$ désignant le produit du nombre x_1 par le nombre $A_1 B_1 C_1 D_1$ et le signe + ayant le sens de l'addition algébrique.

Les égalités symboliques

$$\begin{aligned} x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n &= x'_1 A'_1 + \ldots + x'_m A'_m, \\ x_1 A_1 B_1 + \ldots + x_n A_n B_n &= x'_1 A'_1 B'_1 + \ldots + x'_m A'_m B'_m, \\ x_1 A_1 B_1 C_1 + \ldots + x_n A_n B_n C_n &= x'_1 A'_1 B'_1 C'_1 + \ldots + x'_m A'_m B'_m C'_m, \end{aligned}$$

relatives à des formes du premier, du second ou du troisième ordre, signifient, par définition, que, quels que soient les points P, Q, R, on a les égalités *numériques*

$$\begin{aligned} x_1 A_1 PQR + \ldots + x_n A_n PQR &= x'_1 A'_1 PQR + \ldots + x'_m A'_m PQR, \\ x_1 A_1 B_1 PQ + \ldots + x_n A_n B_n PQ &= x'_1 A'_1 B'_1 PQ + \ldots + x'_m A'_m B'_m PQ, \\ x_1 A_1 B_1 C_1 P + \ldots + x_n A_n B_n C_n P &= x'_1 A'_1 B'_1 C'_1 P + \ldots + x'_m A'_m B'_m C'_m P. \end{aligned}$$

Par exemple, il est aisé de voir, dans le cas des formes du premier ordre et lorsque $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ n'est pas nul, que la forme $x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n$ est égale à la forme $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) A$, en désignant par A le centre de gravité des points A_1, A_2, ..., A_n considérés comme ayant des masses x_1, x_2, ..., x_n. Dans tous les cas, il est clair qu'il y a une infinité de formes égales à une forme donnée. En même temps que l'on définit l'une de ces formes, on les définit toutes. En disant qu'une forme est une *entité,* M. Burali-Forti entend qu'elle doit être regardée comme un élément géométrique abstrait commun à toutes les formes égales. Or, ce qu'il y a de commun à toutes les formes égales, c'est de satisfaire à la définition de l'égalité de deux formes, en sorte qu'on n'ajoute rien à cette définition en parlant d'un élément abstrait commun à toutes les formes égales; mais, par cette façon de parler, qu'il emploie à plusieurs reprises, l'au-

teur se trouve insister heureusement sur la nécessité de ne pas séparer, de la définition d'une forme, la définition de l'égalité de deux formes; en réalité, la définition des formes géométriques doit encore être complétée par la définition de la somme de deux formes, du produit d'une forme par un nombre, du produit progressif de deux formes; les deux premières définitions sont immédiates; elles résultent, pour les formes du premier ordre, des égalités

$$\begin{aligned}
&(x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n) + (y_1 B_1 + \ldots + y_m B_m) \\
&= x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n + y_1 B_1 + \ldots + y_m B_m \\
&h(x_1 A_1 + \ldots + x_n A_n) = h x_1 A_1 + \ldots + h x_n A_n,
\end{aligned}$$

où $A_1, \ldots, B_m$ sont des points et $x_1, \ldots, y_m, h$ des nombres. Le produit progressif des deux formes

$$x_1 A_1 + x_2 A_2, \quad y_1 B_1 C_1 + y_2 B_2 C_2 + y_3 B_3 C_3,$$

qui sont l'une du premier, l'autre du second ordre, est défini par la formule

$$\begin{aligned}
&(x_1 A_1 + x_2 A_2)(y_1 B_1 C_1 + y_2 B_2 C_2 + y_3 B_3 C_3) \\
&= x_1 y_1 A_1 B_1 C_1 + x_1 y_2 A_1 B_2 C_2 + x_1 y_3 A_1 B_3 C_3 \\
&+ x_2 y_1 A_2 B_1 C_1 + x_2 y_2 A_2 B_2 C_2 + x_2 y_3 A_2 B_3 C_3.
\end{aligned}$$

C'est une forme du troisième ordre; le produit progressif de deux formes d'ordres r, s se définira de même et sera une forme d'ordre $r + s$; toutefois $r + s$ ne doit pas dépasser 4 : rappelons qu'une forme du quatrième ordre est un nombre; enfin, cette définition est elle-même complétée par la règle relative à l'interversion des facteurs et qu'exprime l'égalité

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (-1)^{rs}\mathfrak{B}\mathfrak{A},$$

où $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont deux formes d'ordres r, s. Ajoutons enfin que si A, B, C, D sont des points, les symboles A, AB, ABC, — A, — AB, — ABC peuvent être regardés comme des formes à coefficients 1 ou — 1; AB, ABC, ABCD peuvent, de diverses façons, être regardés comme des produits. La multiplication progressive est d'ailleurs associative et distributive.

Ces diverses définitions complètent la définition des formes géométriques qui sont maintenant des objets de *calcul*. Les lec-

teurs du Livre de M. Burali-Forti ne manqueront pas de s'intéresser vivement à la façon vraiment simple et élégante dont il traite de ce calcul. Signalons quelques propositions et définitions fondamentales.

Les égalités $AB = 0$, $ABC = 0$, $ABCD = 0$ expriment que les deux points A, B sont confondus, que les trois points A, B, C sont en ligne droite, que les quatre points A, B, C, D sont dans un plan. L'égalité $AB = xA'B'$, où x est un nombre, exprime que les points A′, B′ sont sur une droite qui passe par les points A, B; que le rapport des longueurs des droites qui vont de A à B et de A′ à B′ est égal à la valeur absolue de x; enfin que le sens de A vers B est ou non le même que le sens de A′ vers B′ suivant que x est positif ou négatif. La forme AB définit un segment; deux segments sont égaux s'ils sont équipollents et situés sur une même droite. L'égalité $ABC = xA'B'C'$ signifie que les points A, B, C, A′, B′, C′ sont dans un même plan; que les aires des triangles ABC, A′B′C′ sont entre elles dans un rapport égal à x, et qu'ils ont ou non la même disposition suivant que x est positif ou négatif. Deux *triangles* ABC, A′B′C′ sont égaux s'ils sont dans le même plan, s'ils ont même aire et même disposition. Un vecteur est la différence de deux points, c'est une forme telle que $B - A$; deux vecteurs sont égaux s'ils sont équipollents. La somme d'un vecteur et d'un point est un nouveau point qui se déduit du premier par une translation définie par le vecteur. Le produit d'un vecteur par un point est un segment. La somme de deux vecteurs est un vecteur qui s'obtient par la règle de l'addition géométrique. Les vecteurs I et J sont parallèles si l'on a une égalité telle que $I = xJ$, ou $IJ = 0$. Les vecteurs I, J, K sont parallèles à un même plan si l'on a une égalité telle que $K = xI + yJ$ ou encore $IJK = 0$. Si le produit IJK n'est pas nul, tout vecteur peut être mis sous la forme $U = xI + yJ + zK$, x, y, z désignant des nombres. Le produit de quatre vecteurs est nul. Si I, J sont des vecteurs et O un point, OIJ est un triangle dont O est un sommet, les deux autres sommets étant les extrémités des vecteurs I, J auxquels on attribue l'origine O. Un bivecteur est le produit de deux vecteurs. Si I, J, K, U sont des vecteurs, les deux bivecteurs IJ, KU sont égaux si, en désignant par O un point, les triangles OIJ, OKU sont égaux, au sens qui a été précisé plus haut : à chaque bivecteur IJ sont

attachés une direction de plan parallèle aux deux vecteurs, un sens de rotation dans ce plan, et un nombre (le double de l'aire du triangle OIJ). Un bivecteur peut se réduire à la somme de deux segments parallèles, de même longueur et de sens contraire : c'est un couple, au sens ordinaire de la Mécanique. Deux bivecteurs u, v sont parallèles si l'on a une égalité telle que $u = xv$, où x est un nombre. Les bivecteurs s'ajoutent comme les couples. Un trivecteur est le produit de trois vecteurs. Si I, J, sont trois vecteurs et O un point, la forme OIJK est un tétraèdre, dont le volume ne dépend pas du point O; à chaque trivecteur correspondent ainsi un nombre et un sens, le volume et le sens du tétraèdre. Chaque trivecteur peut se déduire d'un trivecteur non nul en le multipliant par un nombre.

Un bivecteur non nul u et un vecteur non nul U sont perpendiculaires si la direction du vecteur est perpendiculaire à la direction de plan définie par le bivecteur. u étant un bivecteur non nul, le symbole $|\, u$ désigne un vecteur U perpendiculaire au bivecteur u, tel que le nombre qui en mesure la longueur soit le nombre attaché au bivecteur, tel enfin que le trivecteur $u\mathrm{U} = u(|\, u)$ ait le sens direct; le vecteur U est l'*index* du bivecteur u; réciproquement le bivecteur u est l'index de U et l'on écrit indifféremment

$$\mathrm{U} = |\, u, \qquad u = |\, \mathrm{U},$$

puis, par définition,

$$0 = |\, 0.$$

On en déduit les égalités

$$|\, u = u, \qquad |\, xu = x\,|\, u, \qquad u\,|\, v = v\,|\, u,$$
$$|\,(u + v) = |\, u + |\, v, \qquad (u + v)\,|\, w = u\,|\, w + v\,|\, w,$$

où u, v, w sont des bivecteurs ou des vecteurs.

Le produit U | V où U, V sont des vecteurs non nuls est le produit interne de U par V.

Si A, B, C, D, E sont des formes du premier ordre, on a l'identité fondamentale

$$\mathrm{BCDE.A} + \mathrm{CDEA.B} + \mathrm{DEAB.C} + \mathrm{EABC.D} + \mathrm{ABCD.E} = 0,$$

où il n'est pas inutile de rappeler que les facteurs BCDE, CDEA, ..., ABCD sont des nombres.

Si A, B, P, Q, R sont des formes du premier ordre, le produit *régressif* de AB par PQR est une forme du premier ordre, égale à

$$APQR.B - BPQR.A + ABQR.P + ABRP.Q - ABPQ.R.$$

Si A, B, C, P, Q, R sont des formes du premier ordre, le produit régressif de ABC par PQR est la forme du second ordre

$$APQR.BC + BPQR.CA + CPQR.AB.$$

La multiplication régressive, qui conduit, étant données deux formes r, s ($r + s > 1$), à une forme d'ordre $r + s - 1$, est distributive comme la multiplication progressive.

Telles sont, rapidement résumées, les propositions et définitions fondamentales que mettra en œuvre M. Burali-Forti. Il conviendrait d'y joindre encore les éléments projectifs (points, droites, plans, à distance finie ou infinie) qui permettent de définir les formes des divers ordres. La notion, bien naturelle, de la dérivée d'une forme géométrique variable permettra ensuite les applications à la Géométrie infinitésimale : ces applications se poursuivent très élégamment dans le domaine de la Géométrie des courbes planes ou gauches et des surfaces réglées, jusques et y compris l'établissement des formules de Frenet, qui prennent une forme extrêmement simple. A ces formules se rattache naturellement l'étude des surfaces réglées relatives à une courbe gauche (surface polaire, surface rectifiante, surface des normales principales, des binormales, etc.), des développantes et des développées, des trajectoires orthogonales, des courbes de M. Bertrand. Quelque courtes Notes, placées à la fin du volume, se rapportent principalement à la définition du paramètre différentiel du premier ordre, et à la signification géométrique des coefficients des deux formes

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \qquad D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

qui jouent, comme on sait, un rôle capital dans la théorie des surfaces.

Le Livre de M. Burali-Forti se trouve ainsi contenir une exposition des diverses propriétés auxquelles on donne, à juste titre, la place la plus importante dans ce qu'on appelle habituellement les *Applications géométriques du Calcul différentiel*. Il

y a certainement intérêt, pour les étudiants, à connaître ce mode d'exposition, où les raisonnements, au lieu de porter sur des transformations analytiques effectuées sur des fonctions des coordonnées, portent sur les objets géométriques eux-mêmes et se trouvent souvent être la clef du succès des transformations analytiques correspondantes. J. T.

FRICKE (R.) und KLEIN (F.). — VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE DER AUTOMORPHEN FUNCTIONEN. Band I : *Die Gruppentheoretischen Grundlagen.* 1 vol. gr. in-8° de XIV-634 pages avec 192 fig. dans le texte. Leipzig, Teubner, 1897.

La publication d'un premier Traité consacré aux fonctions fuchsiennes est un fait scientifique digne d'attirer l'attention, et cela d'autant plus que, au moins dans notre pays, la théorie, depuis sa création par M. Poincaré, a reçu peu de développements systématiques. Il faut peut-être en accuser le caractère purement abstrait et philosophique qu'elle a revêtu, et que devait revêtir une théorie aussi profonde et aussi vaste, dans les travaux de son fondateur.

On sait au contraire que le souci d'arriver à des formes concrètes, élémentaires, a été constant chez M. Klein et chez ses disciples. On peut dire qu'il s'est montré, pour l'Ouvrage actuel, avant son apparition même, par la manière dont celui-ci a été préparé dans les Leçons sur l'*Icosaèdre* et sur les *Fonctions modulaires elliptiques*. Il n'est, pour ainsi dire, pas un principe général relatif aux groupes discontinus linéaires qui n'ait été posé et appliqué à propos des cas particuliers qui ont fait l'objet de ces deux publications.

Dans le premier Volume de la *Théorie des fonctions automorphes,* seul paru jusqu'ici et consacré exclusivement à la théorie des *groupes* discontinus linéaires (indépendamment des fonctions correspondantes) c'est une représentation géométrique élémentaire qui sert de point de départ à toute l'exposition. Les considérations de Géométrie non euclidienne, invoquées par M. Poincaré dans certaines démonstrations, prennent ici une place prépondé-

rante, non seulement sous la forme primitive de Lobatschewsky ou de Riemann, mais encore et surtout sous la forme projective de Cayley, qui correspond à la Géométrie de Riemann, à la Géométrie euclidienne ou à la Géométrie de Lobatschewsky suivant que l'« absolu » est une conique imaginaire, un système de deux points ou une conique réelle. Ici, ces trois Géométries sont désignées par les épithètes d'*elliptique, parabolique, hyperbolique :* ces dénominations, empruntées à des travaux déjà anciens de M. Klein, ne sont peut-être pas sans inconvénient, en raison de la fréquence avec laquelle chacun de ces adjectifs se rencontre, pris dans plusieurs sens différents.

Une importante Introduction est consacrée à ces notions ainsi qu'à leur extension à l'espace, telle que l'exige la théorie des groupes kleinéens.

Un premier exemple de la nécessité d'une telle extension est immédiatement présenté par le groupe auquel est attaché le nom de M. Picard, et qui diffère du groupe modulaire en ce que les coefficients des substitutions, au lieu d'être des entiers réels, prennent des valeurs complexes. En même temps ce groupe fournit l'occasion de définir la notion de discontinuité propre ou impropre et le domaine fondamental ou domaine de discontinuité. Il faut toutefois observer que les mots « proprement » ou « improprement discontinu » ne sont pas pris par M. Fricke dans le sens adopté par M. Poincaré : sont dits *improprement discontinus* les seuls groupes qui, sans être véritablement continus, c'est-à-dire sans relever des méthodes de M. Lie, font correspondre à un point *quelconque* donné des points infiniment voisins du premier. Le fait que le groupe de M. Picard, sans contenir de substitutions infinitésimales, n'est cependant pas proprement discontinu, montre l'intérêt de cette proposition : *Tout groupe linéaire dépourvu de substitutions infinitésimales est proprement discontinu* (au sens de l'Ouvrage actuel) *sinon dans le plan, du moins dans l'espace.*

Un point particulièrement intéressant à noter, parce qu'il n'avait pas été traité jusqu'ici avec toute la netteté désirable, est la formation du domaine de discontinuité. Deux modes de construction sont indiqués. Le plus simple, né d'une idée de Dirichlet, consiste à partir d'un point quelconque C_0 et à former le

domaine normal de discontinuité de *centre* C_0 avec les points qui sont à une moindre distance (euclidienne ou cayleyenne) du point C_0 que de l'un quelconque de ses homologues. Par exemple, pour le groupe dérivé des deux périodes d'une fonction elliptique, le domaine ainsi constitué est un hexagone, celui-là même qui a été considéré par Dirichlet et appliqué par lui à la réduction des formes quadratiques binaires.

La forme du domaine normal dépend, en général, du choix du centre C_0, et c'est précisément cette circonstance qui conduit à la seconde forme du domaine fondamental. Il existe, en effet, des positions du centre pour lesquelles le domaine normal a un nombre de côtés moindre que celui qui correspond à un centre arbitraire : on constate que le lieu de tels points C_0 se compose de certaines cubiques, lesquelles divisent le plan en régions qui sont des domaines (domaines *naturels*) de discontinuité.

Cette seconde définition du domaine fondamental prend place dans la seconde Section, laquelle est consacrée à la classification générale des groupes d'après leurs deux nombres fondamentaux, qui sont le genre p et le nombre n de points homologues à eux-mêmes (points fixes des substitutions), non homologues entre eux. Au commencement de cette Section, l'auteur est revenu sur les groupes de déplacements du plan elliptique ou parabolique, ceux-ci ayant été traités (du moins pour le plan elliptique) dans les *Leçons sur l'Icosaèdre,* mais à l'aide de considérations fonctionnelles, alors qu'il était intéressant de les reprendre au point de vue de la pure théorie des groupes.

C'est à ce même point de vue, c'est-à-dire abstraction faite de toute considération fonctionnelle, qu'est développée la théorie de la transformation. La question de la transformation des *groupes* fuchsiens est posée de la façon suivante : le domaine fondamental étant replié de manière à former une surface fermée S par suture des côtés conjugués, un système de coupures qui rend S simplement connexe la transforme à nouveau en un domaine fondamental, auquel correspond un choix parfaitement déterminé de substitutions fondamentales susceptibles d'engendrer le groupe : comment est modifié le Tableau de ces substitutions lorsqu'on passe d'un système de coupures à un autre?

Un dernier sujet est longuement étudié dans cette Section : c'est

la comparaison d'un groupe avec ceux qui lui sont semblables, autrement dit avec ses transformés par une substitution quelconque. Les *modules* ou invariants relatifs à ces transformations sont formés tout d'abord pour les couples de substitutions. Les relations qui lient entre eux ces modules sont alors étudiées pour les groupes $(0, 3)$ et $(1, 1)$ (c'est-à-dire les groupes qui correspondent à $p = 0$, $n = 3$, ou $p = n = 1$), groupes dont la discussion et l'énumération complète s'effectuent directement et sans difficulté. Les groupes $(0, n)$ se déduisent d'ailleurs des groupes $(0, 3)$, tout groupe $(0, n)$ pouvant être considéré comme dérivé d'un groupe $(0, n-1)$ et d'un groupe $(0, 3)$ ayant une substitution fondamentale hyperbolique commune; de sorte que l'on peut, jusqu'à un certain point, définir par leurs modules tous les groupes $(0, n)$ et se rendre compte de leur degré de généralité. Quant aux groupes (p, n), chacun d'eux est en relation simple avec un groupe $(0, n + 2p)$.

Enfin les deux points de vue précédents sont combinés dans la recherche des transformations subies par les modules lorsqu'on transforme les substitutions fondamentales par changement du système des coupures, ainsi qu'il a été expliqué précédemment. On obtient ainsi certaines transformations birationnelles qui permettent de passer des anciens modules aux nouveaux ou réciproquement : l'ensemble de ces transformations constitue le *groupe modulaire* (p, n), groupe que l'auteur étudie pour les cas $(0, 4)$ et $(1, 1)$.

Un dernier Chapitre est consacré aux groupes sans cercle fondamental et aux propriétés si curieuses que peut présenter la courbe limite (lieu des points singuliers) pour de tels groupes.

La troisième Section traite d'un sujet qui appelle encore de nombreux compléments : la formation effective des groupes fuchsiens; elle y marque un pas important, grâce aux travaux arithmétiques que M. Fricke a consacrés à cette question. La théorie de la réduction des formes quadratiques, dont l'exposition générale, si sommaire qu'elle soit forcément ici, comble une véritable lacune, sert de base à cette troisième Section. L'auteur traite d'abord des formes binaires à coefficients réels ou complexes, à indéterminées réelles ou conjuguées, ainsi que des groupes dont les substitutions transforment en elles-mêmes ces différentes formes.

Passant alors aux formes ternaires et quaternaires, M. Fricke expose les théories de M. Hermite, sous les différentes formes qui leur ont été données; d'autre part, le fait que toute forme ternaire peut être, à l'aide d'une substitution à coefficients rationnels, réduite à $ax^2 + by^2 + cz^2$, lui permet de ramener l'étude du groupe qui laisse invariante une telle forme à celle d'un groupe linéaire à une variable.

Une théorie analogue étant indiquée et développée sur quelques points pour les formes quaternaires, on obtient ainsi certaines catégories assez générales de groupes fuchsiens. De plus une extension naturelle des recherches précédentes s'obtient en considérant des formes et des substitutions dont les coefficients ne sont plus commensurables, mais pris à l'intérieur d'un *corps* algébrique quelconque.

Un retour sur les groupes (0, 3) et (1, 1), étudiés à ce nouveau point de vue, termine cette dernière Partie qui, réunie à la précédente, justifie pleinement la prétention émise par l'auteur d'avoir constitué une *Théorie* des groupes fuchsiens et kleinéens.

J. Hadamard.

BOREL (E.). — Leçons sur la théorie des fonctions. Un vol. in-8°; VIII-136 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.

La théorie des *ensembles* a, tout d'abord, quelque peu scandalisé les mathématiciens; ils s'y habituent petit à petit. Bornée à elle-même, cette théorie serait sans doute restée dans une région un peu obscure, explorée de temps en temps par ceux des philosophes qui éprouvent le besoin de renouveler leurs spéculations sur l'infini; mais quelques Mémoires célèbres, parmi lesquels il convient de citer tout d'abord le Mémoire de M. Mittag-Leffler sur les fonctions uniformes, ont montré comment certains résultats de cette théorie intervenaient dans des problèmes qu'on ne saurait écarter des Mathématiques. Dans un livre classique, M. Camille Jordan a montré le rôle fondamental que doit jouer la notion d'*ensemble* dans l'exposition des éléments de l'Analyse.

Récemment (¹), M. Hadamard rencontrait, dans la théorie des lignes géodésiques, un de ces ensembles parfaits, qui ne sont denses dans aucun intervalle, dont M. Poincaré a fait connaître le premier exemple.

L'an dernier, M. Borel a exposé aux élèves de l'École Normale, dans quelques leçons, les points de la théorie des ensembles dont l'importance dans le reste des Mathématiques est, en quelque sorte, prouvée expérimentalement; il y a ajouté des vues extrêmement intéressantes sur la théorie des fonctions; c'est de ces leçons qu'est sorti le petit livre dont nous rendons compte, livre très clair, plein d'idées, d'aperçus, de suggestions; le résumé que je vais essayer d'en donner ne pourra certainement rendre ce que la lecture du livre de M. Borel a de presque amusant.

L'auteur développe d'abord la notion de l'ensemble dénombrable, caractérisé par un indice entier attaché à chaque élément; si plusieurs indices, en nombre fini, sont attachés à chaque élément, le caractère de l'ensemble reste le même. D'un ensemble infini quelconque on peut supprimer un ensemble dénombrable, sans que l'ensemble cesse d'être infini.

Les ensembles qui ont la puissance du continu ne sont pas dénombrables. Si l'on a une infinité d'ensembles ayant la puissance du continu, cette infinité (dans laquelle chaque ensemble est regardé comme un élément) ayant elle-même la puissance du continu, l'ensemble total formé par la réunion de tous les éléments des ensembles considérés a aussi la puissance du continu. Les nombres algébriques forment un ensemble dénombrable. C'est là, pour l'auteur, l'occasion de parler des recherches de M. Hermite et de M. Lindemann sur les nombres e et π, et de rappeler les ingénieuses observations de Liouville sur la façon dont on peut approcher d'un nombre algébrique, observations d'où résulte aisément l'existence d'une infinité de nombres transcendants, ayant la puissance du continu. La théorie des fractions continues montre, d'ailleurs, que la propriété des nombres algébriques signalée par Liouville ne caractérise nullement ces nombres. M. Borel traite ensuite des ensembles parfaits : il distingue l'en-

(¹) *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques* (*Journal de Liouville*, 5e série, t. IV, p. 69).

semble absolument parfait, identique avec son dérivé, et l'ensemble relativement parfait qui contient tous les éléments de son dérivé, et qui, d'après une proposition de M. Bendixon, n'en peut différer que par un ensemble dénombrable. Il montre comment un ensemble parfait, composé de points entre 0 et 1, peut n'être dense dans aucun intervalle [1], et, à ce propos, se trouve amené à démontrer que si l'on considère un ensemble dénombrable d'intervalles $(a_n - b_n)$, n'ayant pas de points communs, tous compris dans l'intervalle $(0 - 1)$, et tels que la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$$

de leurs longueurs respectives soit inférieure à 1, il existe un ensemble A, non dénombrable, formé de tous les points qui n'appartiennent pas aux intervalles $(a_n - b_n)$. Cette proposition l'amène aux ensembles qu'il qualifie de *mesurables* et qu'il suppose toujours formés de points compris entre 0 et 1. Lorsqu'un ensemble est formé de tous les points compris dans une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et ayant une longueur totale s, M. Borel dit qu'il a pour mesure s. Si les ensembles E, E′ ont pour mesure s, s' et si tous les points de E′ appartiennent à E, l'ensemble des points de E qui n'appartiennent pas à E′ a, *par définition*, $s - s'$ pour mesure. Ces définitions ne sont jamais contradictoires. *Tout ensemble parfait limité est mesurable.*

Après avoir résumé d'une façon très brève et très lumineuse les propositions fondamentales concernant le prolongement des fonctions, et la définition, d'après Weierstrass, des fonctions analytiques, l'auteur montre, d'après M. Poincaré, comment on peut définir toute fonction analytique au moyen d'une infinité dénombrable d'éléments $P(x - a)$. Il donne un exemple extrêmement simple d'une fonction analytique uniforme dans un domaine d'un seul tenant, représentée, dans une partie de ce domaine, par une série qui, tout en restant convergente, ne la représente plus dans une autre partie du même domaine. M. Borel a bien voulu rap-

[1] M. Borel propose avec raison de dire *dense* et non *condensé* dans un intervalle.

peler, à ce propos, une série simple que j'avais signalée comme représentant 1 dans une partie du plan et -1 dans une autre. Je ne parle ici de cette série que pour dire une fois de plus qu'elle avait été considérée avant moi par M. Schröder. L'auteur fait ensuite une étude très intéressante de la convergence des séries de la forme

$$\varphi(x, y) = \sum \frac{A_n}{[(x - a_n)^2 - (y - b_n)^2]^{m_n}},$$

où les A_n et les m_n sont des nombres positifs dont les premiers tendent vers o avec $\frac{1}{n}$ et sont tels que la série

$$\sum \frac{1}{\left(\log \frac{1}{A_n}\right)^{\mu}},$$

où μ est un nombre positif, soit convergente.

Les variables x, y sont réelles, ainsi que les systèmes de constantes a_n, b_n, qui définissent un ensemble dénombrable de points du plan; les sommations sont relatives à l'indice n.

En même temps que cette série, M. Borel considère les séries obtenues en prenant les dérivées partielles d'ordre quelconque de tous ses termes. Le résultat essentiel auquel il parvient est le suivant : On peut trouver dans toute région du plan une infinité non dénombrable de courbes C sur lesquelles toutes ces séries à termes positifs sont uniformément convergentes. Si l'on considère toutes les droites D parallèles à une direction donnée et un segment de droite σ de longueur l non parallèle à cette direction, on peut trouver sur ce segment un ensemble dont la mesure diffère aussi peu que l'on veut de l et tel que toute droite D, passant par un point de cet ensemble, ait la propriété fondamentale des courbes C. Il en est de même lorsque l'on considère les droites D passant par un point O et que l'on remplace le segment σ par un arc de cercle de centre O, si l'on suppose que le point O ne coïncide avec aucun des points $(x = a_n, y = b_n)$, ni avec aucun point de l'ensemble dérivé formé par ces points. On peut cependant, dans toute région du plan, même si tous les points de cette région appartiennent à l'ensemble dérivé dont nous venons de

parler, trouver une infinité non dénombrable de points pouvant être pris pour le point O. On peut aussi trouver une infinité non dénombrable de tels points sur toute courbe C. Cette proposition servira plus tard à l'auteur pour établir quelques propositions relatives aux séries de fractions rationnelles.

M. Borel développe enfin des vues générales sur la notion de fonction de variable complexe, vues dont quelques-unes avaient déjà été exposées dans sa thèse.

Distinguant nettement entre les mots *fonction analytique* et *expression analytique,* il indique, d'une part, les résultats obtenus par M. Runge et par M. Painlevé, en vertu desquels toute fonction analytique uniforme ayant un domaine naturel d'existence D peut, dans ce domaine, être représentée par une expression analytique, et fait ressortir ce qui reste d'arbitraire et, par conséquent, d'imparfait dans les représentations de cette sorte, dont il était, toutefois, très important d'établir la possibilité; il fait ensuite une intéressante critique de la belle méthode de M. Mittag-Leffler pour la représentation d'une classe particulière de fonctions uniformes, représentation qui met bien en évidence chaque point singulier de la fonction et la nature de la singularité de la fonction. M. Borel examine, en particulier, le cas d'une fonction qui est la dérivée logarithmique d'une fonction entière, pour montrer comment la façon dont la fonction se comporte à l'infini permet de déterminer la série qui la représente quand la fonction entière, dont elle doit être la dérivée logarithmique, est d'un genre fini, au sens de Laguerre.

Reprenant ensuite un sujet qu'il avait déjà touché dans sa thèse, il étudie les séries de fractions rationnelles de la forme

$$\sum \frac{A_n}{z - a_n},$$

où les points d'affixe a_n ne sont soumis à aucune restriction, si ce n'est de former un ensemble dénombrable qui ne soit pas dense dans tout le plan et où les A_n satisfont à la condition

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{A_n} = 0.$$

Une telle série définit une fonction analytique uniforme dans

certaines aires qui ne contiennent pas de points a_n. *A priori*, on ne peut prévoir aucune relation entre les fonctions analytiques, représentées par ces séries dans deux aires de convergence qui sont séparées. C'est un fait bien remarquable qu'une telle série ne puisse représenter o dans une partie du plan, sans être identiquement nulle partout où elle est convergente. On peut, d'ailleurs, tracer dans toutes les régions du plan une infinité non dénombrable de courbes sur lesquelles la série est absolument et uniformément convergente, ainsi que toutes ses dérivées.

Le livre de M. Borel se termine par trois Notes : la première, relative à *la notion de puissance,* concerne une question capitale, et non encore entièrement élucidée, de la théorie des ensembles : il s'agit au fond de l'extension à l'idée de puissance des notions de plus grand et de plus petit; la question est posée dans toute sa clarté. Désignons, avec l'auteur, un ensemble quelconque par une grande lettre, et par la même lettre, affectée de l'indice 1, un ensemble dont tous les éléments appartiennent au premier ensemble, mais tel que quelques éléments de ce premier ensemble ne lui appartiennent pas. Ceci posé, étant donnés deux ensembles, A, B, quatre cas sont logiquement possibles.

1° Il existe un A_1 ayant même puissance que B et il n'existe pas un B_1 ayant même puissance que A.

2° Il n'existe pas un A_1 ayant même puissance que B, et il existe un B_1 ayant même puissance que A;

3° Il existe un A_1 ayant même puissance que B et un B_1 ayant même puissance que A;

4° Il n'existe ni un A_1 ayant même puissance que B, ni un B_1 ayant même puissance que A.

Les deux premiers cas ne diffèrent que par l'échange des lettres A et B.

Dans le troisième cas, les deux ensembles ont même puissance. M. Borel en donne une démonstration très simple, que lui a communiquée M. G. Cantor et qui est due à M. Félix Bernstein. Pour pouvoir affirmer, comme le fait M. Cantor, que, deux ensembles étant donnés, ou bien ils sont de même puissance, ou bien l'un est de puissance supérieure à l'autre, il faudrait démon-

trer encore que, dans le quatrième cas, les deux ensembles ont même puissance, ou que ce quatrième cas est réellement impossible quand il s'agit d'ensembles infinis. Quoique la proposition essentielle reste douteuse, la démonstration de M. Bernstein, reste très intéressante, et par elle-même, et à cause de la lacune qu'elle comble.

M. Borel s'occupe ensuite de la formation d'ensembles ayant des puissances de plus en plus grandes. Étant donné un ensemble E d'éléments x, on conçoit qu'une fonction $f(x)$ soit déterminée pour chaque élément x de l'ensemble E. Ne considérons que les fonctions ainsi déterminées qui prennent pour chaque valeur x de l'ensemble soit la valeur 0, soit la valeur 1. L'ensemble F de toutes ces fonctions sera d'une puissance supérieure à la puissance de l'ensemble E. Si E est un ensemble dénombrable, F a la puissance du continu; si E a la puissance du continu, F a une puissance supérieure. M. Borel exprime, d'ailleurs, des réserves très sages sur la possibilité de concevoir un tel ensemble, par exemple l'ensemble des fonctions discontinues d'une variable réelle, en raison de l'infinité non dénombrable des conditions qui déterminent chaque fonction.

La seconde Note se rapporte en partie aux recherches de P. du Bois-Reymond sur la comparaison des fonctions croissantes. Du Bois-Reymond a montré que si l'on considère une suite dénombrable de fonctions croissantes

$$(1) \qquad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots,$$

telles que chacune d'elles croisse plus rapidement que la précédente (que le rapport $\frac{\varphi_n(x)}{\varphi_{n-1}(x)}$ croisse indéfiniment avec x), on peut toujours former une fonction qui croisse plus rapidement que n'importe quelle fonction de cette suite. M. Borel se propose de former une *échelle de types croissants,* c'est-à-dire un ensemble E de fonctions dont deux quelconques aient des croissances comparables et qui contienne une fonction croissante arbitrairement donnée. Cet ensemble E ne peut être dénombrable. Partant d'une suite telle que (1), on peut former une fonction $\varphi_\omega(x)$ qui croisse plus rapidement que n'importe quel terme de la

suite (1), puis en posant

$$\varphi_\omega[\varphi_\omega(x)] = \varphi_{2\omega}, \quad \varphi_{2\omega}[\varphi_\omega(x)] = \varphi_{3\omega}(x), \quad \ldots$$

constituer une suite

$$(2) \qquad \varphi_\omega(x), \quad \varphi_{2\omega}(x), \quad \ldots, \quad \varphi_{n\omega}(x), \quad \ldots$$

jouissant des mêmes propriétés que la suite (1), puis former une fonction $\varphi_{\omega^2}(x)$ dont la croissance dépasse la croissance de tous les termes de la suite (2), ... puis répéter indéfiniment ce procédé. En le répétant *indéfiniment,* on ne forme jamais à la vérité que des ensembles dénombrables, mais en le répétant *transfiniment,* c'est-à-dire en le supposant répété chaque fois que l'on aura une infinité dénombrable de types croissants, quel que soit le procédé par lequel on a obtenu cette infinité, on parviendra (idéalement) à un ensemble (S) non dénombrable (de seconde puissance), tel que deux fonctions soient comparables entre elles, que chaque fonction soit immédiatement suivie d'une autre fonction, tel enfin (si l'on admet pour les fonctions croissantes un axiome analogue à celui qui, pour les grandeurs, est connue sous le nom d'*axiome d'Archimède*), que, une fonction quelconque étant donnée, il y ait dans (S) une infinité de fonctions qui croissent plus rapidement qu'elle. L'analogie de cet ensemble (S) avec la suite des nombres entiers est visible. M. Borel constitue un ensemble (Σ) qui joue par rapport à l'ensemble (S) le même rôle que l'ensemble des nombres rationnels par rapport à l'ensemble des nombres entiers; enfin, en introduisant dans l'ensemble (Σ) des coupures (au sens analogue à celui de M. Dedekind pour la définition des nombres irrationnels), il parvient à la notion de fonctions *idéales,* qui tiennent, dans cette théorie de la croissance, le rôle des nombres irrationnels en Arithmétique. Cette notion des fonctions *idéales* avait d'ailleurs été sommairement indiquée par du Bois-Reymond.

Notons encore ce résultat intéressant : l'ensemble des fonctions croissantes (non idéales) a la puissance du continu.

A la fin de cette même Note, l'auteur donne sur les nombres de M. Cantor quelques aperçus que le lecteur a sans doute pressentis.

La dernière Note est intitulée : *La notion de fonction en ge-*

néral. M. Borel y revient sur la difficulté qu'il y a à considérer d'autres fonctions que celles qui sont définies par une infinité dénombrable de conditions; il expose des vues très intéressantes sur certaines classes de ces fonctions. Enfin, il précise le rôle de cette expression, *dépendre de p fonctions de n variables*, qui est quelquefois employée d'une façon un peu vague.

J. T.

CLAUSIUS (R.). — Théorie mécanique de la chaleur. Deuxième édition, refondue et complétée, traduite sur la troisième édition de l'original allemand, par *F. Folie* et *E. Ronkar*. T. I : Développement des formules qui se déduisent des deux principes fondamentaux avec différentes applications. In-8°, VII-499 p. T. II : Théorie mécanique de l'électricité y compris l'application des principes fondamentaux de la Théorie mécanique de la chaleur. In-8°, 472 p. Bruxelles, Société belge d'éditions, 1897 et 1898.

Depuis que, sur les instances des amis de la Science, R. Clausius s'est décidé en 1865 à réunir la collection des Mémoires véritablement fondamentaux qu'on lui doit sur la Théorie mécanique de la chaleur, dont il mérite à tant de titres d'être regardé comme un des fondateurs et sur l'Électrodynamique, un grand nombre d'années se sont écoulées sans affaiblir l'intérêt et l'utilité d'une telle publication. Une traduction française en a paru en 1870 chez Lacroix à Paris; mais, dès 1875, une nouvelle édition de cet important Ouvrage étant devenue nécessaire, l'auteur se résolut à lui donner une forme toute nouvelle. Il lui parut utile de refondre le contenu de ses Mémoires détachés de telle manière qu'il formât un ensemble développé avec méthode et se rapprochât ainsi plus complètement d'un Ouvrage didactique. En se décidant par ces motifs à refondre l'Ouvrage, l'auteur pouvait d'ailleurs y introduire maintes recherches d'autres auteurs et tenir compte des publications si nombreuses faites depuis la publication de sa collection de Mémoires; de sorte que la seconde édition de sa *Théorie mécanique* pouvait être considérée à divers égards comme un Ouvrage nouveau. Cette seconde édition a d'ailleurs, elle aussi, reçu le meilleur accueil et elle vient d'être réimprimée dans ces derniers temps.

C'est précisément la traduction en français de cette troisième édition que nous offrent aujourd'hui MM. F. Folie et Ronkar. Sur la valeur de l'œuvre, il est clair que nous n'avons rien à apprendre à nos lecteurs. Il nous suffira donc de dire que la traduction a été faite avec la plus grande fidélité et le plus grand soin. M. Clausius, d'ailleurs, a bien voulu en revoir toutes les épreuves et mettre les traducteurs à même de la rendre entièrement conforme à la troisième édition de l'original qui se publiait en même temps. On peut donc être assuré que l'Ouvrage imprimé dans de si excellentes conditions sera accueilli avec reconnaissance par les savants et les ingénieurs de langue française.

MÉLANGES.

SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS DE TROIS PLANS GLISSANT LES UNS SUR LES AUTRES;

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,
Chargé d'un Cours complémentaire à l'Université de Toulouse.

I. Considérons trois plans A, B, C glissant les uns sur les autres. Le mouvement relatif de deux d'entre eux, A et B par exemple, se représentera par le roulement d'une courbe BA du plan B sur une courbe AB du plan A et le mouvement instantané sera une rotation autour du point de contact c des deux roulettes AB et BA (*fig.* 1).

Nous avons ainsi six roulettes : AB, AC dans A; BA, BC dans B; CA, CB dans C et trois centres instantanés de rotation a, b, c.

Désignons, en outre, par γ la vitesse instantanée de rotation de B par rapport à A, par α celle de C par rapport à B et par β celle de A par rapport à C.

Le mouvement de C par rapport à A pouvant s'obtenir en composant le mouvement de B par rapport à A et celui de C par rapport à B, on en conclut que la rotation $-\beta$ est la résultante des deux rotations γ et α. Il en résulte :

1° *A chaque instant, les trois centres instantanés de rotation a, b, c sont sur une même droite* Δ.

2° *On a toujours*

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

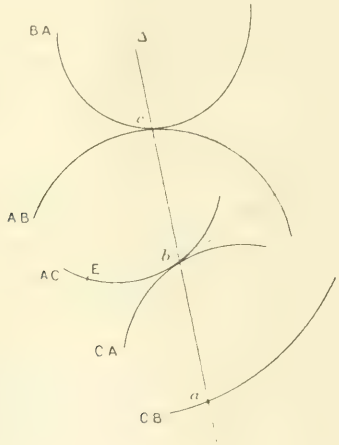
3° *Les trois points a, b, c de* Δ *vérifient la relation*

$$\gamma \times ac + \beta \times ab = 0.$$

Ceci posé, nous allons nous proposer de démontrer la propriété suivante :

Parmi les six roulettes, il y en a cinq que l'on peut se donner arbitrairement.

Fig. 1.



Quand on se donne une roulette de A et une roulette de B, le mouvement relatif de A et B n'est pas déterminé, il faut se donner en outre la position initiale de B en indiquant quel est le point de BA qui est, ou viendra, en contact avec un point déterminé de AB, ce qui revient à se donner la valeur d'un certain paramètre, et enfin indiquer la nature du roulement relativement au temps, c'est-à-dire se donner une fonction de t qui sera par exemple la vitesse de rotation γ, ou encore, l'arc parcouru par le point de contact des deux roulettes sur l'une d'elles. La propriété que nous avons en vue peut alors s'énoncer d'une façon précise comme il suit :

Donnons-nous arbitrairement deux courbes AB, AC *dans le plan* A, *deux courbes* CA, CB *dans le plan* C, *une courbe* BA *dans le plan* B *et enfin un mouvement relatif de* A *et* B *tel que* BA *roule sur* AB.

Il est possible, et d'une infinité de façons, de déterminer un mouvement de C *tel que* CA *roule sur* AC *et que le mouvement relatif de* C *et de* B *soit le roulement de* CB *sur une courbe de* C.

Pour faciliter le raisonnement, nous pouvons, sans restreindre la généralité, considérer A comme fixe.

Nous pouvons, et cela d'une infinité de façons, faire mouvoir C de sorte que CA roule sur AC; il reste encore dans le mouvement de C, un paramètre arbitraire et une fonction arbitraire de t. Supposons qu'on ait fixé le paramètre, il nous suffit de montrer qu'on peut déterminer la fonction de t de façon que le point a se trouve toujours sur CB ou, ce qui revient au même, de façon qu'en appelant a un des points d'intersection de bc avec CB on ait constamment

$$\gamma \times ac + \beta \times ab = 0.$$

Supposons que la fonction de t qui détermine le mouvement de C soit l'arc $Eb = s$.

La position de c est connue en fonction de t, la position du plan C est connue en fonction de s; donc les positions de b et a et, par suite, les valeurs de ac et ab sont connues en fonction de s et t.

γ est une fonction connue de t.

Soit θ l'angle de la tangente en b à AC avec une direction fixe. La courbe AC étant connue, on a

$$\theta = f(s);$$

donc

$$\beta = \frac{d\theta}{dt} = f'(s)\frac{ds}{dt}.$$

L'équation de condition précédemment écrite devient donc

$$\frac{ds}{dt} = F(s, t),$$

F étant une fonction connue.

Cette équation différentielle ordinaire donnera s en fonction de t et d'une constante arbitraire.

Comme, d'après le théorème de Cauchy, une équation telle que la précédente admet toujours des solutions, la possibilité du mouvement de C satisfaisant aux conditions imposées est donc démontrée.

Si nous tenons compte de la constante arbitraire qui a été fixée au début, nous voyons que le mouvement de C dépend encore de deux constantes arbitraires. En général, la roulette BC en dépendra également.

La première de ces deux constantes peut disparaître si l'une des deux roulettes AC, CA est une courbe superposable à elle-même d'une infinité de façons, c'est-à-dire un cercle ou une droite.

On peut interpréter ces résultats de la façon suivante :

Supposons que l'on ait réalisé par un procédé quelconque la liaison des plans A, B, C deux à deux de façon que les courbes correspondantes restent tangentes et que les roulettes soient réalisées matériellement de telle façon qu'elles ne puissent pas glisser les unes sur les autres. Fixons par exemple le point A. Chacun des plans B et C n'aura qu'un seul mouvement possible, et le mouvement de l'un d'eux entraînera le mouvement de l'autre en produisant le mouvement total dans lequel les six roulettes roulent deux à deux les unes sur les autres. Pour faire ainsi mouvoir le plan B par l'intermédiaire de C, il suffit de réaliser les roulettes relatives aux groupes A, C et B, C, de sorte que nous pouvons nous dispenser de réaliser matériellement les roulettes AB et BA en conservant toutefois la liaison correspondante de A et B.

Nous obtenons ainsi sous sa forme la plus générale ce que Reuleaux [1] appelle *principe des trajectoires polaires secondaires*, et nous pouvons faire remarquer que, pour produire un mouvement déterminé de B par rapport à A, il faut employer quatre roulettes auxiliaires dont trois pourront être choisies arbitrairement.

Comme cas particulier intéressant, il faut citer celui où les deux

---

[1] Reuleaux, *Cinématique* (traduction française), p. 79.

roulettes CA et CB du plan C seraient confondues en une courbe C qui ne doit pas être une droite de façon à être rencontrée par Δ en des points distincts pour ne pas être dans un cas d'exception que nous rencontrerons plus loin. Tout mouvement de B par rapport à A peut donc se réaliser en faisant rouler une courbe de C simultanément sur une courbe de A et une courbe de B, et, parmi ces trois courbes, on peut en choisir deux arbitrairement.

Voyons maintenant les cas où les raisonnements faits pour établir le théorème général ne sont plus applicables.

Le raisonnement suppose que b et c soient distincts. Supposons qu'ils soient confondus; on aura alors

$$(\gamma - \beta)ac = 0$$

ou

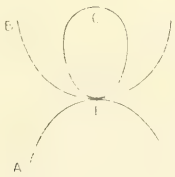
$$\gamma \times ac = 0;$$

or $\alpha\beta\gamma \neq 0$ par hypothèse, sans quoi deux des plans seraient en repos relatif. On aura donc

$$ac = 0,$$

et a, b, c seront confondus en un même point I (*fig.* 2).

Fig. 2.



AB et AC étant les lieux de c et b dans A seront confondues en une même courbe A lieu de I dans A; de même BA et BC seront confondues en une même courbe B et CA et CB en une même courbe C. Il n'y aura plus que trois roulettes A, B, C roulant les unes sur les autres de façon à avoir toujours le même point de contact, et ces roulettes pourront être prises arbitrairement.

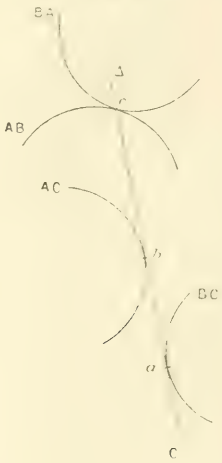
Pour produire un mouvement déterminé du plan B par rapport au plan A, on pourra prendre arbitrairement la roulette C.

Les roulettes auxiliaires ne sont donc que des cas particuliers des roulettes secondaires de Reuleaux.

Un autre cas particulier est celui où la droite Δ rencontre tou-

jours CA et CB au même point, c'est-à-dire où CA et CB sont confondues en une droite C. On retombe sur le cas particulier que nous venons d'étudier avec cette particularité que la roulette auxiliaire est une droite, à moins que cette droite C ne soit constamment confondue avec Δ, c'est-à-dire à moins qu'on ne fasse mouvoir le plan C de façon que Δ roule sur AC en passant constamment par le point c, le point a sera constamment sur Δ et son lieu dans B sera une courbe BC sur laquelle Δ roulera (*fig.* 3).

Fig. 3.



Nous retombons ainsi sur le cas particulier dans lequel c'est la même courbe de C qui roule simultanément sur une courbe de A et une courbe de B, avec cette particularité que C est maintenant une droite, hypothèse qui avait été écartée.

Tout mouvement de B par rapport à A peut être obtenu en faisant rouler une droite C simultanément sur une courbe de A et une courbe de B, l'une de ces deux courbes pouvant être choisie arbitrairement.

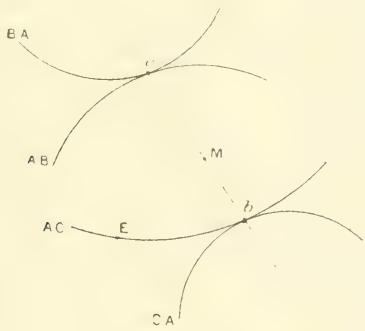
II. Nous allons maintenant nous occuper d'une question qui offre un grand intérêt au point de vue de la théorie géométrique des engrenages.

Considérons un point M du plan auxiliaire C. Il a une trajectoire Γ_A dans le plan A et une trajectoire Γ_B dans le plan B.

Peut-il arriver que Γ_A *et* Γ_B *soient des profils conjugués dans le mouvement relatif de* A *et* B?

Considérons A comme fixe et considérons le mouvement de C par l'intermédiaire de B. Γ_A sera la trajectoire absolue de M et Γ_B sa trajectoire relative. Pour qu'elles soient tangentes en M il faut que la vitesse absolue et la vitesse relative et par suite la vitesse d'entraînement de M aient même direction. Comme la première et la dernière de ces trois vitesses sont respectivement perpendiculaires à M*b* et M*c* il faut et il suffit que M soit en ligne droite avec *b* et *c* (*fig.* 4).

Fig. 4.



1° *Cas où tous les points de* C *engendrent des profils conjugués.*

Tout point de C devant être en ligne droite avec *b* et *c*, ces deux points doivent être constamment confondus et cela suffit, de sorte que nous sommes dans le cas des trois roulettes tangentes au même point.

On retombe ainsi sur la méthode des roulettes pour le tracé des engrenages et l'on sait qu'en choisissant convenablement la roulette C et le point M on engendre n'importe quel couple de profils conjugués.

2° *Cas où il y a une infinité de points de* C *qui engendrent des profils conjugués.*

b et *c* n'étant pas confondus, tous ces points M doivent être

sur la droite Δ laquelle doit être alors une droite invariablement liée au plan C. Comme les points a, b se trouvent toujours sur elle, c'est Δ elle-même qui est à la fois la roulette CA et la roulette CB, de sorte que nous nous trouvons dans le cas où le mouvement relatif de B et A s'obtient en faisant rouler une droite C simultanément sur une courbe AC et sur une courbe BC.

Tous les points de la droite C décrivent des profils conjugués et ce sont les seuls.

Nous retrouvons ainsi la méthode des développantes pour le tracé des engrenages et, comme la courbe AC est arbitraire, on peut ainsi engendrer n'importe quel couple de profils conjugués.

Le fait que la courbe AC est arbitraire permet d'énoncer la propriété fondamentale de cette méthode sous la forme suivante :

On a une courbe AB dans un plan fixe A et une courbe BA dans un plan mobile B. Le plan B se mouvant de façon que BA roule sur AB, à chaque position du point de contact on fait correspondre, suivant une loi arbitraire, une droite Δ passant par ce point. Cette droite Δ a une enveloppe AC dans le plan A et une enveloppe BC dans le plan B. Si, en même temps qu'elle tourne autour de c, on fait glisser la droite Δ sur ce point de façon qu'elle *roule* sur l'une de ses deux enveloppes, elle *roulera* aussi sur l'autre.

3° *Un seul point de* C *décrit des profils conjugués.*

Il faut alors que la droite Δ passe par un point M fixe dans le plan C.

Donnons-nous arbitrairement le mouvement relatif de A et B, une courbe AC et, dans le plan C, la courbe CA et le point M.

La position de c est connue en fonction de t. Celle du plan C et, par suite de b et de M, est connue en fonction de s. En écrivant que cM et cb sont confondues on aura une équation

$$F(s, f) = 0.$$

qui déterminera s en fonction de t, c'est-à-dire la façon dont il faudra faire rouler CA sur AC de manière que cb passe constamment par M.

On peut remarquer qu'ayant fixé AC, la courbe CA et le point M du plan C sont complètement arbitraires; en appliquant

le résultat connu relatif à la méthode des roulettes, on voit qu'on peut s'arranger de façon que M décrive n'importe quel couple de profils conjugués.

Ainsi, au point de vue de la nature des profils engendrés, les trois méthodes sont rigoureusement équivalentes; il n'en est pas de même si l'on se place au point de vue de la génération d'un couple déterminé de profils.

Soit γ_A et γ_B ces deux profils.

Dans la méthode des roulettes, il faut chercher la roulette C, permettant d'engendrer γ_A; elle est donnée par une quadrature de sorte que cette méthode donne une infinité de courbes C dépendant d'un paramètre arbitraire et qui correspondent au même profil γ_A.

Dans la méthode des développantes, c'est la courbe AC qu'il faut déterminer; comme γ_A en est une développante, AC est la développée de γ_A de sorte qu'il y a une et une seule courbe AC permettant d'engendrer γ_A.

Enfin dans la dernière méthode il y a à déterminer deux courbes AC, CA. On peut prendre la première arbitrairement et la seconde dépend encore d'une constante arbitraire. Cette solution dépendant d'une fonction arbitraire d'une variable et d'une constante arbitraire peut être considérée comme la solution la plus générale du système différentiel déterminant le mouvement d'un plan C dont un point doit engendrer deux profils conjugués.

L'étude que nous venons de faire nous montre en résumé qu'en partant de l'idée unique de génération des profils conjugués par le mouvement d'un plan auxiliaire, on est conduit fatalement à trois méthodes et rien que trois correspondant à trois cas particuliers du mouvement relatif de trois plans et parmi lesquelles on trouve les deux méthodes employées dans la pratique : celle des roulettes et celle des développantes.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

DIRICHLET (G.-L.). — *Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimal-Analysis auf die Zahlentheorie* (1839-1840). Deutsch herausgeg. von R. Haussner. In-8°, 128 p. Leipzig, Engelmann. Cart. 2 m.

(Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. 91. Bdchn.)

FRICKE (R.) u. KLEIN (F.). — *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen.* 1 Bd. *Die gruppentheoretischen Grundlagen.* Gr. in-8°, IV-634 p. avec 192 fig. Leipzig, Teubner. 22 m.

PICARD (E.) et SIMART (G.). — *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes.* T. I. In-8°, VI-247 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

REBIÈRE (A.). — *Mathématiques et mathématiciens. Pensées et curiosités.* In-8°, 570 p. Paris, Nony et Cie.

BALL (W.-W.-R.). — *Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes.* Traduit sur la 3e édit. anglaise. In-8°. 352 p. Paris, Hermann. 9 fr.

CALINON (A.). — *Études sur les diverses grandeurs en Mathématiques.* In-8°. 31 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 2 fr.

CAUCHY (A.). — *Œuvres complètes.* Publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences. Série I, t. X. In-4°, 482 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 25 fr.

GROSSE (W.). — *Unterhaltende Probleme und Spiele in mathematischer Beleuchtung.* Mit zahlreichen Figuren u. 1 lithogr. Tafel. In-8°. VI-251 p. Leipzig, Quandt et Händel. 5 m. 20 pf ; relié, 6 m.

VILLIÉ (E.). — *Compositions d'Analyse, Cinématique, Mécanique et Astronomie.* In-8°. X-300 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 8 fr.

1re Partie

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANDOYER (H.). — Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques, a l'usage des candidats a l'Agrégation des sciences mathématiques. In-4°, 184 p. lithogr. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.

Le titre choisi par M. Andoyer spécifie la catégorie spéciale de lecteurs pour lesquels ces Leçons ont été rédigées, mais l'auteur n'entend sans doute pas qu'elles doivent être lues par les seuls candidats à l'Agrégation des Sciences mathématiques. La théorie des formes intéresse tous ceux qui ont poussé assez loin l'étude de l'Algèbre et de la Géométrie analytique pour deviner qu'elle embrasse ce qu'il y a de vraiment essentiel dans l'*Application de l'Algèbre à la Géométrie*. C'est ce que M. Andoyer montrera sans doute plus amplement dans l'Ouvrage *Sur la théorie des formes*, qu'il annonce dès à présent et qui ne peut manquer d'être très bien accueilli.

Les présentes Leçons se rapportent aux formes binaires et ternaires : en dehors des propositions générales sur la formation des invariants, elles se limitent, pour les formes binaires, à l'étude des formes des quatre premiers degrés et de la forme bilinéaire, et, pour les formes ternaires, à l'étude des formes linéaires, quadratiques et bilinéaires. Les applications géométriques y sont plutôt indiquées que développées ; mais elles sont indiquées d'une façon très large, et, d'ordinaire, sans spécifier le sens particulier des variables. L'auteur, pour ne pas prononcer les mots de *point*, de *droite* ou de *courbe*, a poussé le scrupule jusqu'à désigner sous le nom d'*élément*, appartenant à une forme ternaire des variables x_1, x_2, x_3, un système de valeurs de ces variables qui annulent la forme, et sous le nom de *série d'éléments* l'ensemble des éléments qui appartiennent à une forme, au sens précédent. Les théorèmes peuvent être interprétés indifféremment soit au point de vue ponctuel, soit au point de vue tangentiel.

Quatre Chapitres sont consacrés aux formes binaires. Après avoir montré comment les substitutions linéaires forment un groupe continu (σ) à quatre paramètres, M. Andoyer introduit la notion et démontre l'existence d'invariants absolus pour un

système binaire (le mot *invariant* est pris dans sa signification la plus générale, de manière à comprendre les covariants). Il forme, en partant des quatre substitutions infinitésimales indépendantes contenues dans le groupe (τ), le système complet des équations aux dérivées partielles que doit vérifier tout invariant absolu, et dont les solutions rationnelles distinctes permettent de former tous les invariants absolus. Les invariants absolus rationnels et non entiers conduisent naturellement aux invariants d'ordre μ, qui peuvent encore être obtenus au moyen d'un système complet d'équations aux dérivées partielles; la recherche de ces invariants se ramène d'ailleurs à la recherche des invariants entiers et homogènes. La démonstration du théorème de M. Gordan sur l'existence d'un système d'invariants entiers dont tout invariant entier est une fonction entière, ne rentre pas dans l'ordre d'idées où l'auteur a voulu se tenir et la proposition est seulement énoncée.

Après avoir développé les propriétés fondamentales des invariants et passé en revue les principales formations invariantes (polaires, composition au moyen des racines, résultants, discriminants, jacobiens, hessiens, etc.), M. Andoyer arrive aux formes particulières. La considération d'un système linéaire conduit à la notion du rapport anharmonique, qui joue encore le rôle essentiel dans l'étude de la forme bilinéaire, ou de l'homographie. On remarquera, en particulier, la façon très élégante dont sont obtenues les relations entre les invariants d'une forme cubique ou biquadratiques, l'équation au rapport anharmonique de x et des trois racines dans le cas d'une forme cubique, des quatre racines dans le cas d'une forme biquadratique, enfin l'expression invariante des racines.

Cinq Chapitres se rapportent aux formes ternaires. Tout d'abord, conjointement aux *éléments de première espèce* définis par les rapports des coordonnées x_1, x_2, x_3, M. Andoyer introduit les *éléments de seconde espèce* définis par les rapports des quantités ξ_1, ξ_2, ξ_3; une substitution linéaire qui exprime les variables x_1, x_2, x_3 au moyen des variables x'_1, x'_2, x'_3 définit une substitution *transposée* qui exprime ξ_1, ξ_2, ξ_3 au moyen de ξ'_1, ξ'_2, ξ'_3, de manière que l'on ait identiquement

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = \xi'_1 x'_1 + \xi'_2 x'_2 + \xi'_3 x'_3.$$

et l'auteur, pour définir les invariants, se place de suite dans le cas où la forme ternaire contient aussi bien les variables ξ que les variables x. Au reste, cette définition, l'usage des substitutions infinitésimales contenues dans le groupe à neuf paramètres des substitutions linéaires, la formation des équations aux dérivées partielles qui permettent d'obtenir les invariants, constituent des généralisations immédiates de ce qui a été dit pour les formes binaires, et l'auteur a pu se borner aux indications indispensables. On notera le soin avec lequel il a étudié la forme ψ des variables ξ, obtenue en partant de deux formes f et g des variables x, et en éliminant ces variables entre les équations

$$f = 0, \qquad g = 0, \qquad \xi_1 x_1 - \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 = 0,$$

puis le rôle que joue cette forme ψ pour la détermination des solutions communes aux équations $f = 0$, $g = 0$ et de leur degré de multiplicité, ainsi que pour la formation du résultant de trois formes f, g, h des variables x. Un important Chapitre est consacré à la définition d'un élément ξ tangent en un élément x, des éléments multiples, stationnaires, etc., enfin à l'établissement des formules de Plücker.

Passant ensuite aux formes particulières, M. Andoyer traite d'abord de la correspondance homographique, ou, ce qui revient au même, de la forme bilinéaire par rapport aux variables x et ξ, puis, d'une façon assez développée, de la forme quadratique et d'un faisceau de formes quadratiques : on trouvera dans ces Chapitres, sous une forme très simple, les propriétés essentielles des formes adjointes, des pôles et des polaires, la décomposition en carrés la plus générale d'une forme quadratique, l'expression paramétrique de ses éléments, les invariants d'un système de deux formes qui résultent de la considération, soit de l'équation du troisième degré relative à un faisceau, soit de la forme adjointe de ce faisceau ou du faisceau des formes adjointes aux deux formes primitives; enfin, l'interprétation de ces divers invariants. Un dernier Chapitre se rapporte à la forme bilinéaire de deux systèmes de variables x et y de même espèce. J. T.

Ch. MÉRAY, Professeur à la Faculté des Sciences de l'Université de Dijon. — Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques. 4e Partie : Applications géométriques classiques. 1 vol. gr. in-8°, XII-248 p. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

C'était devenu pour moi une douce habitude que de rendre compte, tous les ans, d'un nouveau Volume de M. Méray et d'exprimer, ici même, la sincère admiration que m'inspire son Œuvre. J'ai donc presque un regret de voir la série déjà close et de venir annoncer l'apparition du quatrième et dernier Volume de ses *Leçons sur l'Analyse*.

En écrivant le bel Ouvrage que, sans la moindre défaillance, il vient de mener si bien à sa fin, M. Méray n'avait aucunement l'intention de faire une Encyclopédie analytique, tout au contraire. Il a voulu, dédaignant, non sans raison, la compilation, faire œuvre personnelle, exposer ses vues et montrer leur ampleur, leur élévation, leur fécondité.

Il eût pu, à vrai dire, en se restreignant à la théorie pure, se contenter d'écrire son premier Volume et quelques Chapitres du second; mais il eût, ainsi, prêté le flanc à la critique facile qui eût peut-être accusé ses méthodes de manquer de souplesse dans les applications. Tandis qu'en développant, lui-même, dans des limites raisonnables et suffisantes, les conséquences de ses théories, il a ainsi montré que, grâce à elles, on atteignait aussi aisément qu'avec d'autres, et, à coup sûr, souvent plus logiquement, les divers domaines mathématiques.

Écrit dans cet esprit, ce dernier Volume n'a donc pas la prétention d'être un exposé *complet* de toutes les applications géométriques de l'Analyse, mais seulement un résumé de celles qui sont les plus courantes. Cela suffit cependant pour que M. Méray ait pu y montrer combien sa façon de procéder met de logique et de rigueur dans toutes les démonstrations.

Le premier Chapitre est une sorte d'Introduction qui est réservée aux diverses représentations des lignes et des surfaces, aux rectifications, quadratures et cubatures. L'auteur y attaque toujours chaque question sous son aspect le plus général, en ne considérant l'étude des figures planes que comme un cas particulier des figures de l'espace.

Nous y noterons surtout le soin avec lequel il a précisé chaque terme et justifié chaque définition.

Par exemple, lorsqu'on définit les points singuliers d'une surface

$$f(x, y, z) = 0,$$

on se contente d'ordinaire de dire que ce sont les points dont les coordonnées vérifient les relations

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0;$$

M. Méray, lui, n'oublie pas de faire remarquer, ce qui a son importance, que cette définition ne dépend pas du choix des axes.

Au lieu de se contenter d'effleurer rapidement les divers sujets qu'il voulait traiter, M. Méray a préféré, et nous l'en félicitons vivement, en développer un avec tout le soin qu'il comporte; et, du coup, il a choisi le plus délicat, celui des contacts et des enveloppes. D'ailleurs, à cette théorie du contact, qu'il a exposée avec une netteté et une rigueur que l'on trouve rarement ailleurs, il a rattaché ingénieusement toute la suite; et, ainsi, elle sert de base à tout le reste.

La méthode analytique est toujours celle que l'auteur préfère, aussi définit-il le contact d'une façon purement algébrique : « Deux surfaces

$$(1) \qquad x = \varphi_1(p, q), \qquad y = \chi_1(p, q), \qquad z = \psi_1(p, q),$$

$$(2) \qquad x = \varphi_2(p, q), \qquad y = \chi_2(p, q), \qquad z = \psi_2(p, q),$$

ont un *contact d'ordre* k pour les valeurs particulières $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ des variables auxiliaires, si, pour $p = p^{(0)}$, $q = q^{(0)}$, les fonctions φ_1, χ_1, ψ_1 et leurs dérivées, jusqu'à l'ordre k inclusivement, sont numériquement égales aux fonctions φ_2, χ_2, ψ_2 et à leurs dérivées semblables. L'entier k est l'ordre *effectif* du contact quand l'égalité numérique en question n'a plus lieu pour toutes les dérivées d'ordre $k + 1$. »

De cette définition, et des analogues pour le contact de deux courbes ou d'une courbe et d'une surface, découlent, ensuite, les propriétés géométriques dont une, en particulier, sert, d'ordinaire, à la définition du contact. Elles sont énumérées avec ordre et établies avec une grande précision. Malgré cela, les démonstra-

tions sont simples et brèves car les études analytiques détaillées des fonctions olotropes, qui font l'objet du premier Volume, ont admirablement préparé le terrain.

Nous nous permettrons cependant de faire une légère observation à propos de la définition qui précède. A la lire telle quelle, sans avoir poussé plus avant la lecture du Volume, un débutant pourrait croire qu'il y a $3(k+1)$ conditions pour que deux surfaces aient un contact d'ordre k. Il est vrai que la proposition qui suit immédiatement cette définition est propre à remettre immédiatement le lecteur dans la bonne voie; mais, pour éviter toute méprise, n'aurait-il pas mieux valu dire : « Deux surfaces ont un contact d'ordre k si l'*on peut* trouver deux représentations paramétriques (1) et (2) telles que, pour les valeurs particulières $p^{(0)}$ et $q^{(0)}$ des variables auxiliaires, les fonctions φ_1, χ_1, ψ_1, etc. ...»?

Au Chapitre III, M. Méray applique immédiatement les théories générales du contact aux cas où l'une des figures considérées est du premier degré. Il définit donc et étudie les plans tangents, tangentes et droites osculatrices aux surfaces; les tangentes, plans tangents et plans osculateurs aux lignes et établit leurs propriétés géométriques. Puis, sans aller plus loin dans cette voie, il expose, dans le quatrième Chapitre, la théorie des enveloppes. Après le Chapitre II, c'est celui qui m'a paru le plus intéressant, car la clarté de l'exposition et la précision des détails évitent, sans nul doute, au lecteur les erreurs que commettent couramment les débutants sur ce sujet délicat.

Contrairement à ce que l'on fait d'ordinaire, l'auteur débute par la recherche des conditions pour qu'une famille de courbes à 1 paramètre ait une enveloppe. Dans une famille de courbes à 2 paramètres, il cherche ensuite à former une *tribu* de courbes à 1 paramètre ayant une enveloppe et arrive ainsi tout naturellement à mettre en évidence la surface enveloppe qui existe en général, aux exceptions près qu'il énumère avec soin. Dans l'étude des enveloppes de surfaces et en particulier de l'arête de rebroussement de l'enveloppe de surfaces à 1 paramètre, la théorie des enveloppes de courbes lui est tout aussi utile.

En suivant toujours le même ordre, M. Méray, après avoir étudié les contacts avec les figures du premier degré, examine, au Chapitre V, les contacts de la sphère et du cercle avec des fi-

gures. Les notions de la normale à une surface et du plan normal à une courbe se présentent alors comme lieux des centres des sphères tangentes en un point à la figure. Puis, comme généralisation de la normale, vient la recherche des trajectoires orthogonales et obliques de familles de courbes et de surfaces. L'hélice et la loxodromie fournissent d'intéressants exemples de trajectoires de lignes à 1 paramètre. L'étude de la congruence des droites normales à une surface et de ses propriétés est, ensuite, un bel exercice des trajectoires orthogonales de lignes à 2 paramètres.

Le Chapitre VI est réservé à la monographie sommaire des principaux types de surfaces à génération géométrique simple. Tels sont les cylindres, les cônes, les surfaces développables, pour chacune desquelles l'équation aux dérivées partielles caractérisante est établie. A propos des surfaces développables, M. Méray dit quelques mots sur les surfaces applicables les unes sur les autres, et nous mentionnerons, tout spécialement, son élégante démonstration du théorème de Gauss sur la conservation de la courbure totale dans la déformation. Il montre que les surfaces développables sont les seules qui puissent être appliquées sur un plan.

Viennent, ensuite, les propositions bien connues sur les surfaces gauches, la distribution des plans tangents autour d'une génératrice et la ligne de striction; puis le Chapitre se termine par l'établissement des propriétés élémentaires des surfaces de révolution.

Les deux derniers Chapitres sont un peu plus brefs ou, pour mieux dire, plus condensés que les précédents.

La courbure et la torsion dans les courbes gauches font l'objet du Chapitre VII. La définition du cercle osculateur conduit à la notion de courbure, de normale principale, de droite polaire, etc. Puis, la propriété de la courbure d'être la limite du rapport de l'angle de deux tangentes infiniment voisines à l'arc correspondant, prépare la définition de la torsion. Sans donner à l'étude du trièdre formé par la tangente, la normale et la binormale en un point d'une courbe la place prépondérante qu'on lui accorde souvent, M. Méray examine avec soin sa disposition. Il termine, enfin, par la recherche des développées et donne, quoique sous une forme très concise, un grand nombre de détails à leur sujet.

Quoique cette omission soit très explicable, vu l'espace res-

treint dont disposait l'auteur, on pourrait cependant regretter qu'il n'ait pas cru utile de donner les élégantes formules de Frenet qui fournissent les dérivées des cosinus des arêtes du trièdre mobile cité plus haut. Elles sont d'un emploi si commode dans bien des questions que leur place paraît toute désignée dans un Ouvrage qui doit servir de guide aux jeunes étudiants.

Le dernier Chapitre contient l'étude des courbes tracées sur une surface. C'est en recherchant les cercles osculateurs en un point, à une surface, et après avoir constaté leur identité avec ceux qui sont osculateurs aux diverses courbes tracées sur la surface par ce point, que M. Méray parvient à l'énoncé et à la démonstration du théorème de Meusnier et des curieuses propositions qui régissent la distribution de la courbure des lignes d'une surface qui passent en un point. La discussion de l'indicatrice, de la courbure totale et moyenne est faite avec le plus grand soin et conduit aux définitions des lignes asymptotiques et des lignes de courbure. Le théorème de Joachimstahl, celui de Dupin sur les systèmes triplement orthogonaux et son application aux quadriques viennent clore ce Chapitre.

Dans une courte *Addition,* M. Méray établit rapidement les formules les plus importantes en coordonnées polaires, dans le plan. Il exprime là un dédain pour tous les systèmes de coordonnées autres que les cartésiennes qui n'est peut-être pas très légitime. Certes le rôle prépondérant des coordonnées rectilignes est incontestable, mais il suffit de lire les beaux Ouvrages de M. Darboux pour se convaincre que, dans bien des questions, il y a d'autres systèmes de coordonnées qui peuvent rendre d'immenses services.

Terminons par une remarque intéressante : c'est que ce Volume ne contient pas une seule figure. C'est évidemment voulu. Le lecteur pourra, très aisément, griffonner quelques dessins qui l'aideront à comprendre le texte; et l'auteur, par cette abstention systématique, a bien mis en évidence la généralité des faits qu'il a établis. Lorsqu'on raisonne sur une figure, on peut toujours craindre d'être, en quelque sorte, influencé par la forme qu'on lui a donnée.

Cette très rapide énumération des faits principaux que contient ce beau Volume ne peut donner qu'une faible idée de l'ampleur

de l'exposition. Tout y est simple, clair et précis. Une notion primordiale, celle du contact, domine tout, et le reste vient se grouper autour d'elle, en un faisceau serré, dans un ordre admirablement logique. Nous n'attendions d'ailleurs pas moins du talent de M. Méray. Peut-être, après l'effort considérable qu'a dû exiger la production d'une telle Œuvre, pensera-t-il à prendre quelque repos. Ce serait bien légitime, car elle est, en tous points, digne d'illustrer la vie d'un homme. Mais un cerveau aussi fécond pourra-t-il rester inactif? Je me permets d'en douter et j'ose espérer, tout bas, d'avoir encore le plaisir de saluer, avec une respectueuse admiration, quelque beau travail du Maître qui a contribué si puissamment à soutenir le bon renom des mathématiciens de France.

C. Bourlet.

E. GOURSAT. — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre a deux variables indépendantes. Tome II : *La méthode de Laplace. — Les systèmes en involution. — La méthode de M. Darboux. — Les équations de la première classe. — Transformations des équations du second ordre. — Généralisations diverses.* 1 vol. in-8°, 344 p. Paris. Hermann. 1898.

M. Goursat achève, dans le nouveau Volume que nous allons analyser, le bel exposé didactique de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre dont il avait donné la première Partie en 1896.

Cette seconde Partie contient, encore plus que la première, la marque personnelle de l'auteur et l'on trouvera à la lecture que M. Goursat a peut-être trop négligé de faire ressortir tout ce qu'il a ajouté de nouveau aux travaux de ses devanciers. On ne saurait trop admirer l'art avec lequel l'auteur a su rassembler tant de travaux divers qui, sous la forme qu'ils viennent de recevoir, rattachés les uns aux autres par des idées générales, enrichis de remarquables recherches personnelles, se trouvent tout à coup mis à la portée des géomètres dans un livre d'une lecture aisée et captivante. Si l'on ajoute que l'Ouvrage est rempli d'idées fécondes à développer, on en aura assez dit pour indiquer le très grand service rendu par M. Goursat à la Science.

Dans ce Volume, de même que dans le précédent, on peut dire que l'auteur prend toujours pour point de départ le problème de Cauchy qui, dans chaque question, conduit à la définition et à l'introduction des multiplicités caractéristiques; cette dernière notion, et c'est là un des caractères saillants de l'Ouvrage, est prise comme fondement de la théorie; l'auteur s'est attaché d'une façon toute particulière à en montrer l'importance et l'utilité; si on le voit un instant l'abandonner, il semble que ce ne soit qu'une feinte habile pour montrer ensuite le caractère intuitif qu'elle peut souvent donner à la théorie. On objectera peut-être que la théorie des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du premier ordre ne se prête qu'à une généralisation incomplète qui ne conduit pas toujours à l'exposition la plus simple et qui pourra se montrer dans l'avenir insuffisante. Mais il est essentiel de remarquer que M. Goursat a pu faire une exposition des résultats acquis à la Science, où tout se présente et s'enchaîne d'une façon naturelle et où l'auteur a su ne faire appel qu'aux notions les plus simples : cela suffit amplement, il nous semble, pour justifier le choix de la méthode.

Le Chapitre V de l'Ouvrage, le premier du Volume que nous analysons, est consacré à la méthode de Laplace; M. Goursat ne se contente pas d'en reprendre l'exposé classique, mais il la rattache à des idées générales; il est ainsi conduit, en particulier, à développer la proposition suivante :

Si, entre $n+1$ intégrales linéairement distinctes de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} - cz = 0,$$

il existe une relation linéaire et homogène dont les coefficients sont des fonctions d'une seule des variables x, y, la suite de Laplace relative à cette équation se termine dans un sens après $n-1$ transformations au plus.

Cette proposition, qui a de nombreuses applications, donne à l'auteur l'occasion de montrer le lien qui existe entre les équations intégrables par la méthode de Laplace et les systèmes en involution; elle trouve ainsi sa véritable origine dans une remarque

importante sur laquelle l'auteur revient plus loin (n° 168) pour y insister.

Le Chapitre se termine par l'extension de la méthode de Laplace aux équations linéaires de forme quelconque ainsi que par une classification de ces équations où l'on a égard à la distinction entre le réel et l'imaginaire.

Le Chapitre VI est consacré à la définition et à l'étude des systèmes en involution formés de deux équations dont l'une est du second ordre. Après avoir rappelé quelques généralités sur les équations simultanées dont l'intégrale générale dépend d'un nombre fini de constantes arbitraires, l'auteur aborde son sujet en se proposant l'étude des systèmes formés d'une équation du second ordre et d'une équation d'ordre quelconque n qui n'admet pas toutes les intégrales de la première. Ceux de ces systèmes qui sont dits *en involution* se présentent comme étant ceux où n est supérieur à l'unité et dont l'intégrale générale possède le plus grand degré de généralité possible; non seulement ils admettent une infinité d'intégrales dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, mais, par une courbe quelconque, il passe, en général, une infinité d'intégrales de ce système; une orientation d'éléments d'ordre n appartenant aux deux équations détermine généralement une intégrale du système. Après avoir insisté, en particulier pour $n = 2$, sur l'analogie saisissante qui se poursuit dans presque tous les détails entre les équations aux dérivées partielles du premier ordre et les systèmes en involution, et mis en œuvre de la façon la plus élégante la notion des caractéristiques et celle des invariants qu'elles peuvent posséder, l'auteur étudie les deux cas qui se présentent lorsque l'on considère le système obtenu en adjoignant à une équation du second ordre deux équations avec lesquelles elle forme deux systèmes en involution, puis revient au système de deux équations pour traiter directement le cas où l'une des équations est du second ordre et ne renferme pas les dérivées r et t.

Le fait capital qui domine toute la théorie des systèmes en involution est le suivant : toute intégrale est un lieu de multiplicités d'éléments qui dépendent d'un nombre fini de constantes et qui, par suite, peuvent être obtenues par l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. L'auteur, après avoir reproduit la méthode ingénieuse par laquelle M. Lie a démontré

cette propriété, signale une remarque intéressante de M. de Tannenberg et termine ce Chapitre en démontrant quelques résultats de M. König sur les systèmes complètement intégrables.

Pendant de longues années après la publication des Mémoires d'Ampère, il n'a été ajouté rien d'essentiel à la théorie qu'il avait développée; un travail particulièrement intéressant a bien été publié en 1856 par Gaspare Mainardi [1], mais il semble qu'il faut arriver jusqu'au Mémoire présenté en 1870 à l'Académie des Sciences par M. Darboux pour trouver l'indication précise d'une nouvelle méthode d'intégration.

C'est au développement de cette méthode qu'est consacré le Chapitre VII dont l'exposé est préparé par les considérations du Chapitre précédent; après avoir examiné le cas où chacun des deux systèmes de caractéristiques admet deux combinaisons intégrables et traité des exemples qui aident singulièrement la lecture, puis le cas où un seul des systèmes de caractéristiques admet deux combinaisons intégrables, l'auteur remarque qu'en définitive tout repose sur la détermination des invariants d'un système de caractéristiques de l'équation du second ordre proposée ou des deux systèmes et fait connaître un certain nombre de propositions remarquables qui peuvent faciliter la recherche de ces invariants. Il montre ensuite que les seules équations du second ordre ayant leurs deux familles de caractéristiques confondues et auxquelles s'applique la méthode de M. Darboux sont les équations considérées au Tome I de l'Ouvrage, pour lesquelles les équations qui déterminent les intégrales intermédiaires du premier ordre forment un système en involution. Après être revenu sur les équations linéaires pour établir que la méthode de M. Darboux et la méthode de Laplace réussissent en même temps, et avoir traité des exemples intéressants, l'auteur signale l'application que l'on peut faire de la théorie des groupes d'ordre infini de transformations pour former des équations intégrables par la méthode de M. Darboux, en remarquant toutefois que la théorie des groupes ne donne pas toutes les équations du second ordre intégrables par cette méthode,

---

[1] Ainsi que le fait remarquer justement M. Goursat à la page 208 de son Ouvrage, le travail de Mainardi doit être, en dépit de son titre, considéré comme un essai d'extension de la méthode de Cauchy.

puis termine le Chapitre par l'exposé des recherches de M. König.

Dans le Chapitre VIII, après avoir rappelé la définition de l'intégrale générale d'après Ampère et montré qu'une intégrale peut être générale au sens d'Ampère sans l'être au sens de Cauchy, M. Goursat remarque que l'on peut déduire des travaux d'Ampère une définition précise des équations de la première classe et démontre, en la généralisant, la proposition énoncée à leur égard par M. Darboux. Il signale différents problèmes auxquels conduit la méthode de M. Darboux et rappelle, en particulier, celui qui a été complètement résolu par M. Moutard [1] puis reproduit, en la modifiant sur quelques points, la démonstration donnée par M. E. von Weber du théorème de M. Maurice Lévy.

On connaît, dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre, le rôle important que jouent les transformations de contact; ces dernières sont loin d'avoir la même portée dans l'étude des équations du second ordre; les transformations qui peuvent ici être utiles semblent devoir présenter des caractères tout nouveaux.

On a vu plus haut que, dans le cas des équations linéaires, la méthode de M. Darboux et la méthode de Laplace réussissent en même temps; la transformation de Laplace donne donc un procédé simple pour effectuer l'intégration d'une équation linéaire à laquelle s'applique la méthode de M. Darboux. Cette remarque appelle sans doute une généralisation et montre en tout cas l'intérêt que l'on doit attacher au Chapitre IX consacré à une classe de transformations qui peuvent être considérées comme la généralisation de celle de Laplace et qui, comme celle-ci, ne réussissent que grâce à la forme particulière des équations auxquelles on les applique.

L'auteur étudie d'abord d'une façon détaillée certaines transformations particulières : la transformation qui consiste à prendre pour inconnue l'une des dérivées premières de la fonction inconnue et un certain nombre de transformations qui en dérivent,

---

[1] M. Paul Stäckel a bien voulu me faire remarquer que le problème considéré par M. Moutard a fait aussi l'objet des recherches de M. Tanner; mais ces dernières recherches, qui demandent à être modifiées et complétées sur plusieurs points, sont postérieures de plusieurs années à celles de M. Moutard.

puis les transformations qui proviennent de la considération d'un système de deux équations simultanées du premier ordre à deux fonctions inconnues. Ces transformations appartiennent à une classe plus générale de transformations considérées pour la première fois par M. Lie sur un exemple particulier et qui ont fait l'objet des recherches de M. Backlund. M. Goursat signale à l'égard de ces transformations de M. Backlund différentes propositions remarquables et termine le Chapitre en considérant d'une manière encore plus générale les transformations des équations du second ordre.

Le Chapitre X a pour objet diverses généralisations des considérations développées précédemment ; l'auteur se borne, pour plus de netteté, à deux cas particulièrement importants : celui d'une équation unique d'ordre n et celui d'un système de n équations du premier ordre à n inconnues, le nombre des variables indépendantes étant, dans les deux cas, toujours égal à deux.

Deux Notes, l'une sur l'équation auxiliaire, l'autre sur les caractéristiques des équations simultanées, terminent l'Ouvrage.

Nous le répétons en terminant : le Livre de M. Goursat n'est pas seulement un exposé remarquablement clair et bien conçu de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre où l'on trouvera complètement réunis et coordonnés tous les résultats que l'on possède actuellement sur cette partie de la Science; c'est encore une œuvre éminemment suggestive, où beaucoup de questions nouvelles, bien dignes de solliciter les recherches, sont posées; il aura donc, à ces deux points de vue, la plus heureuse influence sur les progrès de cette belle théorie.

E. Cosserat.

Giovanni SCHIAPARELLI. — Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci (*Memorie del R. Istituto Lombardo di Scienze e lettere*, XVIII). 100 p. gr. in-4°. Milan, Ulrico Hœpli, 1898.

L'illustre directeur de l'observatoire de Brera vient, après un intervalle de vingt-quatre ans, de reprendre les questions historiques qu'il semblait avoir délaissées depuis ses admirables Mémoires sur les *Précurseurs de Copernic dans l'antiquité*

(1873) et sur les *Sphères concentriques d'Eudoxe, de Callippe et d'Aristote* (1874). Cette fois, il s'agit spécialement de l'existence, dans l'antiquité, d'une conception semblable au système de Tycho Brahe.

Dans mes *Recherches sur l'Histoire de l'Astronomie ancienne* (Paris, Gauthier-Villars, 1892), j'ai déjà fait observer qu'un passage de Ptolémée doit faire conclure que cette hypothèse était connue d'Apollonius de Perge. Il me semblait toutefois qu'historiquement elle n'était apparue qu'après celle d'Aristarque de Samos (Copernic), et je la considérais comme la conséquence logique à laquelle auraient dû aboutir les anciens, s'ils ne s'étaient pas laissé entraîner par l'idée de n'employer qu'une seule des deux explications possibles, avec leur point de départ pour les mouvements planétaires, celle des épicycles et celle des excentriques mobiles.

M. Schiaparelli avait fait la même remarque que moi, mais l'étude très approfondie à laquelle il a soumis la question l'a conduit à se représenter autrement l'évolution des conceptions astronomiques dans l'antiquité. Voici ses conclusions :

Le point de départ est l'idée d'une circulation symétrique autour d'un centre unique; elle domine dans le système de Philolaos, où ce centre est occupé par un feu central hypothétique, dans les constructions platoniciennes et dans le système d'Eudoxe, où la Terre est, au contraire, replacée au centre du Monde.

L'idée d'une circulation autour d'un centre lui-même en mouvement a résulté directement de l'observation. Héraclide du Pont, disciple de Platon, enseigne que Mercure et Vénus tournent autour du Soleil. C'est le premier exemple d'épicycles.

L'observation de Mars devait de même conduire facilement à l'hypothèse que les planètes supérieures décrivaient aussi des cercles autour du Soleil comme centre (excentriques mobiles). Cette hypothèse a dû être émise dès le temps d'Héraclide et, s'il n'en est pas lui-même l'auteur, il l'a très probablement partagée. Cependant il manque à cet égard un témoignage suffisant pour entraîner la conviction.

De l'hypothèse de Tycho Brahe, ainsi construite, il était aisé de passer à celle de Copernic. Héraclide l'aurait également connue,

mais ne l'aurait regardée que comme théorique; Aristarque de Samos est le premier à l'avoir soutenue réellement.

L'abandon postérieur de ces deux hypothèses provient : d'une part, de la difficulté de faire prévaloir contre l'opinion commune l'idée du mouvement de la Terre, même simplement autour de son axe (comme l'admettait Héraclide, à la différence de Tycho Brahe); d'un autre côté, l'hypothèse héliocentrique se heurta aux doctrines astrologiques qui, à partir des conquêtes d'Alexandre, commencèrent à exercer une grande influence. Enfin, elle implique une conception dynamique du Monde, tandis que, si le système des sphères concentriques d'Eudoxe était désormais insoutenable, c'était toujours une machinerie analogue qui semblait aux philosophes la solution désirable. Les Mathématiciens abordèrent dès lors le problème au point de vue purement géométrique, en supposant des centres de mouvement idéaux, et non plus physiques, comme le Soleil. Ils montrèrent l'équivalence cinématique des combinaisons d'un épicycle ou d'un excentrique mobile avec un déférent (ce serait à peu près à cela que se serait borné le rôle d'Apollonius de Perge). L'hypothèse des épicycles triompha parce qu'elle se prêtait plus aisément à la conception de sphères emboîtées et roulant les unes sur les autres, comme l'expose Théon de Smyrne, d'après Adraste, et comme Nassir-Eddin devait encore la développer, même après les complications introduites par Ptolémée.

Je ne puis naturellement donner ici le détail de l'argumentation très solide, très minutieuse et très documentée de M. Schiaparelli. Je me bornerai à dire qu'elle m'a convaincu quant au thème général, et cela quoique je fusse porté beaucoup plutôt à croire que, de même que dans les temps modernes, l'hypothèse copernicienne avait, dans l'antiquité, précédé la tychonienne. Cependant, à la suite des nouvelles études que j'ai, de mon côté, poursuivies depuis six ans, je demanderai à faire quelques réserves sur certains points de détail.

Désormais, je ne crois plus à l'existence, au temps de Platon et d'Aristote, d'une école pythagoricienne comme celle dont M. Schiaparelli admet l'influence sur Héraclide et dans laquelle auraient été débattues les hautes questions scientifiques. D'après

les témoignages les plus sûrs, il n'y a plus, à cette époque, comme pythagoriciens, qu'une sorte de confrérie religieuse, dont les poètes comiques raillent les superstitions et la saleté monacale. Quant aux anciens pythagoriciens, ils n'ont pas dépassé la doctrine de la sphéricité. Eudoxe, élève d'Archytas, est leur légitime héritier.

Mais la réputation déjà légendaire de leur science offrait une grande commodité pour leur attribuer des idées qu'on voulait émettre sans en prendre la responsabilité. Platon donna l'exemple avec son *Timée;* il y eut bientôt toute une littérature pythagoricienne, écrite par des auteurs qui prétendaient avoir vu les derniers savants de l'École, comme Aristoxène, ou qui se livraient à leur simple fantaisie, comme Héraclide du Pont; c'est de cette littérature que proviennent les données fournies par Aristote.

Héraclide du Pont, conteur génial, eut, comme tel, une grande réputation dans l'antiquité. Mais le succès de ses légendes dialoguées sur Empédocle, Abaris ou Zoroastre, a fait tort à ses œuvres scientifiques, traitées dans le même mode. Ce dut être lui, en tout cas, qui, dans un dialogue entre Platon et un Hicétas de Syracuse, exposa le système du feu central et de l'antichthone, qui fut repris plus tard dans l'écrit du pseudo-Philolaos. Ce fut encore Héraclide qui, dans un autre dialogue, au protagoniste duquel il avait donné le nom d'Ecphante, exposa la doctrine de la rotation de la Terre autour de son axe et de la circulation des planètes (au moins des inférieures) autour du Soleil. Depuis le Mémoire de M. Schiaparelli, je ne vois pas de difficulté sérieuse à lui attribuer la conception tychonienne complète.

En tout cas, il introduisit dans la Science l'idée du mouvement relatif, l'hypothèse du déplacement du lieu d'observation. Alla-t-il jusqu'à proposer le mouvement circulaire de la Terre autour du Soleil fixe, comme troisième hypothèse à examiner aussi bien que les deux autres? Il n'y a rien d'impossible à cela; mais le texte invoqué à ce sujet (un fragment de Geminus dans le *Commentaire de Simplicius sur la Physique d'Aristote,* édit. Diels, p. 291-292) ne me paraît nullement décisif; car le passage est certainement corrompu, ainsi que le remarque M. Schiaparelli, et la meilleure façon de le corriger me paraît être de regarder le nom

d'Héraclide du Pont comme passé dans le texte de la marge, où il aura été mis pour expliquer le mot *quelqu'un* (τίς). Ce nom n'offrirait donc aucune garantie d'authenticité.

PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

SUR L'APPROXIMATION DES FONCTIONS;

PAR M. LEBESGUE.

Weierstrass a démontré [1] le premier que toute fonction continue pouvait être représentée, avec une approximation donnée, par un polynome. Je vais indiquer quelques considérations élémentaires permettant de démontrer ce théorème et quelques-unes de ses conséquences.

Soit $f(x)$ une fonction finie et continue dans un intervalle (a, b). On peut partager l'intervalle (a, b) par les points $x_0 = a$, x_1, $x_2, \ldots, x_{n-1}$, $x_n = b$ de telle façon que dans chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) l'oscillation de la fonction soit moindre qu'un nombre positif donné ε.

Inscrivons dans la courbe $y = f(x)$ la ligne polygonale $A_0 A_1 \ldots A_n$ dont les sommets ont pour abscisses $x_0 x_1 \ldots x_n$; elle représente dans l'intervalle (a, b) une fonction continue $y = \varphi(x)$ qui diffère de $f(x)$ de moins de ε. Or $\varphi(x)$ est égale à la fonction continue ψ_1 représentée dans l'intervalle (a, b) par la droite qui porte le côté $A_0 A_1$, plus une fonction φ, représentée par une ligne polygonale $A'_0 A'_1 \ldots A'_n$ dont le premier côté $A'_0 A'_1$ est sur l'axe Ox. φ_1 est la somme des deux fonctions continues ψ_2 et φ_2; ψ_2 est nulle entre x_0 et x_1 et est représentée par la droite qui porte $A'_1 A'_2$ entre x_1 et x_n, φ_2 est représentée par une ligne polygonale $A''_0 A''_1 \ldots A''_n$; A''_0, A''_1, A''_2 sont sur Ox. On arrive finalement à

$$\varphi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots + \psi_n.$$

---

[1] *Journal de Liouville*, année 1886.

ψ_i étant une fonction continue nulle entre a et x_{i-1}, représentée par un segment de droite entre x_{i-1} et b. Si l'on fait le changement de variable

$$X = mx + n,$$

en choisissant convenablement m et n, ψ_i sera définie dans une portion (α, β) de l'intervalle $(-1, +1)$ par la relation

$$\psi_i = k(X + |X|),$$

ce qui s'écrit

$$\psi_i = k[X + \sqrt{1 + (X^2 - 1)}].$$

Si l'on développe le radical par la formule du binome en y considérant $X^2 - 1$ comme une lettre, on obtient une série de polynomes en X, et par suite en x, qui converge uniformément vers ψ_i. La somme des n développements analogues est une série uniformément convergente de polynomes représentant $\varphi(x)$. En prenant un nombre suffisant de termes dans cette série on obtient un polynome $P(x)$ qui diffère de $\varphi(x)$ de moins de η_1, η_1 étant choisi à l'avance. $P(x)$ diffère de $f(x)$ de moins de $\varepsilon + \eta_1$, donc :

I. *Étant donnée une fonction finie et continue dans un intervalle (a, b) on peut trouver un polynome qui, dans tout l'intervalle, en diffère de moins d'une quantité positive quelconque donnée à l'avance.*

II. Comme première application, Weierstrass développe une fonction continue quelconque en série de polynomes de la façon suivante : Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ des quantités positives telles que la série $\Sigma\varepsilon_n$ soit convergente, la série dont la somme des n premiers termes est un polynome P_n qui diffère de la fonction continue donnée $f(x)$ de moins de ε_n converge uniformément vers $f(x)$. De plus, cette série est absolument convergente car l'on a

$$|u_n| = |P_n - P_{n-1}| = |P_n - f| - |P_{n-1} - f| < \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}.$$

III. Une autre conséquence du théorème de Weierstrass est que toute série de fonctions continues dans un intervalle (a, b) y peut être remplacée par une série de polynomes. En effet, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ étant des nombres positifs tendant vers zéro, la série de polynomes dont la somme des n premiers termes diffère de la somme

des n premiers termes de la série proposée de moins de ε_n répond à la question.

Fonctions ayant des points de discontinuités. — En dérivant terme à terme la série de polynomes représentant

$$x - |x|,$$

on obtient une série de polynomes convergente dans l'intervalle $(-1, +1)$ sauf au point O, représentant 0 pour x négatif, 1 pour x positif. Par l'addition de séries de cette nature à une série de polynomes représentant une fonction continue on développe en série de polynomes toute fonction n'ayant qu'un nombre fini de discontinuités. La série obtenue est divergente aux points de discontinuités. Par un procédé différent nous allons arriver à une conclusion plus générale.

Soit $f(x)$ une fonction qui dans l'intervalle (a, b) n'a de discontinuités que pour un ensemble dénombrable de valeurs

$$x_0 = a, \quad x_1 = b, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots.$$

Marquons les points $A_0, A_1, \ldots, A_n$ représentant la fonction $y = f(x)$ pour $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$. Quelques-uns de ces points pourront être à l'infini. Soient x_k l'une des n valeurs considérées pour x, x_l celle de ces n valeurs qui lui est immédiatement supérieure.

1° Supposons A_k et A_l à distance finie.

A. Entre x_k et x_l n'existe aucun intervalle où la fonction est continue, ou bien il en existe plusieurs; traçons le segment $A_k A_l$.

B. Entre x_k et x_l existe un intervalle (x', x'') et un seul où $f(x)$ est continue. Dans cet intervalle la fonction est représentée par un arc de courbe $\alpha\beta$.

a. $f(x)$ est continue à droite pour $x = x'$ et à gauche pour $x = x''$; traçons le segment $A_k\alpha$, l'arc $\alpha\beta$, le segment βA_l; les segments $A_k\alpha$, βA_l peuvent être nuls.

b. $f(x)$ n'est pas continue à droite pour $x = x'$ ni à gauche pour $x = x''$; traçons le segment $A_k P_n$, l'arc $P_n Q_n$, le segment $Q_n A_l$; P_n et Q_n étant deux points de l'arc $\alpha\beta$ qui tendent respectivement vers α et β quand n croît indéfiniment.

c. $f(x)$ est continue à droite pour $x = x'$ et n'est pas continue à gauche pour $x = x''$; commençons le tracé comme dans le cas (a), terminons-le comme dans le cas (b).

d. $f(x)$ n'est pas continue à droite pour $x = x'$ et est continue à gauche pour $x = x''$; commençons le tracé comme en (b), terminons-le comme en (a).

2° Si l'un des deux points A_k, A_l ou tous les deux sont à l'infini, nous remplacerons celui ou ceux de ces deux points qui sont à l'infini par des points de même abscisse et dont l'ordonnée croîtra avec n.

Dans tous les cas, nous traçons dans l'intervalle (a, b) une courbe représentant une fonction $\varphi_n(x)$, on peut même supposer que la fonction f soit infinie dans un certain nombre, fini ou non, d'intervalles, à condition de compter les extrémités de ces intervalles comme des points de discontinuités et de faire jouer le rôle de la courbe $\alpha\beta$ à une parallèle à Ox dont l'ordonnée croîtra indéfiniment avec n.

La fonction $\varphi_n(x)$ a pour limite pour n infini $f(x)$, en entendant par là que $\varphi_n(X)$ tend vers $f_n(X)$ quand X est pris arbitrairement dans (a, b). Ceci est évident si X est une valeur de discontinuité, ou appartient à un intervalle où la fonction est continue, ou est extrémité d'un pareil intervalle. Pour une autre valeur, X est la limite d'une suite $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots$ de valeurs de discontinuités, $f(X)$ étant continue pour $x = X$, $f(X)$ est la limite de la suite $f(x^{(1)}), f(x^{(2)}), \ldots$. D'autre part, pour n assez grand $\varphi_n(x)$ est compris entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, α et β étant les extrémités de celui des intervalles, obtenus à l'aide des points de subdivision $x_0, x_1, \ldots, x_n$, qui contient X, d'où

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \lim_{p=\infty} f(x^{(p)}) = f(X).$$

Donc

$$f(x) = \varphi_1(x) + \Sigma[\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)];$$

$f(x)$ est représentable par une série de fonctions continues et, par suite, par une série de polynomes.

IV. *Toute fonction continue dans un intervalle (a, b), sauf pour un ensemble dénombrable de valeurs de la variable, est développable dans cet intervalle en série de polynomes, abso-*

lument et uniformément convergente dans tout intervalle où n'existe pas de points de discontinuités.

Il est facile de donner des exemples de fonctions ayant une infinité dénombrable de discontinuités.

Premier exemple. — Entre $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$, la fonction $f(x)$ est égale à une fonction continue quelconque A_n. Aux points de discontinuités, elle a une valeur quelconque finie ou infinie. A_n sera limitée ou non; ce sera, par exemple, $A_n = \frac{1}{x - \frac{1}{n}}$.

Deuxième exemple. — $x_1, x_2, \ldots$ étant donnés, on considère une fonction nulle si x n'est pas une des valeurs données, et égale à $\frac{1}{n}$ pour $x = x_n$. Les points $x_1, x_2, \ldots$ sont les seuls points de discontinuités.

Il existe donc, en particulier, des séries de polynomes nulles pour toutes les valeurs commensurables (ou algébriques) d'un intervalle et pour celles-là seulement.

Troisième exemple. — Les fonctions à variation limitée de M. Jordan.

Dans ce qui précède, nous n'avons pas obtenu les fonctions les plus générales représentables par des séries de polynomes; M. Baire a indiqué (*Comptes rendus*, 21 mars 1898) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable soit représentable par une série de polynomes.

Fonctions de plusieurs variables. — Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables finie et continue par rapport à l'ensemble (x, y) pour $a \leqq x \leqq b$; $c \leqq y \leqq d$. Cherchons à le représenter approximativement par un polynome.

On peut trouver des valeurs $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$; $y_1 < y_2 < \ldots y_n$ telles que pour $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$, $y_j \leqq y \leqq y_{j+1}$, l'oscillation de la fonction soit moindre qu'un nombre donné ε.

Soit A_{ij} le point de coordonnées $x = x_i$, $y = y_j$, $z = f(x_i, y_j)$. Le paraboloïde de plans directeurs zOx, zOy passant par $A_{i,j}$; $A_{i+1,j}$; $A_{i,j+1}$; $A_{i+1,j+1}$ représente pour $x_i \leqq x \leqq x_{i+1}$; $y_j \leqq y \leqq y_{j+1}$

une fonction qui diffère de $f(x)$ de moins de ε. Or, la fonction continue représentée par l'ensemble de ces fragments de paraboloïdes est une somme de fonctions continues telles que la suivante :

$$k[XY + |XY| + X|Y| + Y|X|]$$

que l'on peut représenter par une série uniformément convergente de polynomes. On achève comme précédemment.

Le même raisonnement réussit avec un nombre quelconque de variables; l'image géométrique fait seule rapidement défaut. Il faudra parler, par exemple, de fonctions linéaires par rapport à chacune des variables là où l'on parlait de droite ou de paraboloïde.

Les propositions I, II, III sont donc encore vraies, quand on y remplace *fonction d'une variable continue dans un intervalle* (a, b) par *fonction de plusieurs variables continue par rapport à l'ensemble dans un domaine fini.*

Des artifices analogues à ceux qui ont conduit au théorème IV nous conduiront à des propositions telles que la suivante :

V. *Si une fonction de deux variables, définie dans un domaine fini* Ω, *connexe ou non, partout continue par rapport à l'ensemble des variables, sauf en des points formant un ensemble dénombrable et sur des courbes* C [1] *formant un ensemble dénombrable, est telle que, sur chacune des courbes* C, *par rapport à un paramètre fixant d'une façon continue la position d'un point sur cette courbe, la fonction soit continue, sauf en un ensemble dénombrable de points, elle est représentable par une série de polynomes, absolument et uniformément convergente dans tout domaine ne contenant pas de discontinuités.*

On peut aussi supposer que la fonction est infinie sur certains arcs des courbes C ou dans certains domaines en nombre fini ou non à condition de compter les courbes frontières de ces domaines comme faisant partie des courbes C.

---

[1] Le mot *courbe* est pris dans un sens restreint; aucune des courbes C ne doit passer dans le voisinage de tous les points d'une aire.

Fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles. — M. Baire (*Comptes rendus*, 1897) a montré comment l'on pouvait construire des fonctions de plusieurs variables continues par rapport à chacune d'elles sans l'être par rapport à l'ensemble. La méthode employée précédemment permet d'obtenir des développements de ces fonctions.

Soit $f(x, y)$ une fonction définie pour $a \leqq x \leqq b$, $c \leqq y \leqq d$ continue séparément par rapport à x et par rapport à y. Divisons l'intervalle (a, b) en n parties égales; soient $x_0 = a$, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $x_n = b$ les points de divisions.

Considérons la fonction $\varphi_n(x, y)$ continue par rapport à l'ensemble xy et définie entre x_p et x_{p+1} par

$$\varphi_n(x, y) = \frac{f(x_{p+1}, y)(x - x_p) - f(x_p, y)(x - x_{p+1})}{x_{p+1} - x_p}.$$

Les fonctions $\varphi_n(x, y)$ ont $f(x, y)$ pour limite quand n croît indéfiniment. En effet, soit X, Y un système de valeurs pour x, y. Choisissons n assez grand pour que dans chaque intervalle x_i, x_{i+1} l'oscillation de la fonction $f(x, \mathrm{Y})$ soit moindre que ε, ε étant donné à l'avance. Si X est dans l'intervalle x_p, x_{p+1}, l'expression

$$|f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) - \varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y})|$$

est plus petite que la plus grande des deux suivantes

$$|f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) - f(x_p, \mathrm{Y})| \quad |f(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) - f(x_{p+1}, \mathrm{Y})|$$

qui sont plus petites que ε.

On peut donc écrire

$$f(x, y) = \varphi_1(x, y) + \sum_{n=1}^{n=\infty} (\varphi_{n+1} - \varphi_n);$$

$f(x, y)$ est représentable par une série de fonctions continues, et, par suite, par une série de polynomes; on peut même remarquer que cette série est uniformément convergente pour y donné.

Le même raisonnement prouve que :

VI. *Une fonction des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_p$, continue par rapport à l'ensemble des x et par rapport à l'ensemble des y, est représentable dans tout domaine fini par une série de polynomes.*

Dans le cas de plus de deux variables, on est conduit à des propositions telles que la suivante :

VII. *Une fonction de quatre variables x, y, z, t, continue dans un certain domaine par rapport à chacune de ces variables, est représentable dans ce domaine :*

1° *Par une série de fonctions continues par rapport aux ensembles* $(x, y)(x, z)(x, t)$;

2° *Ou par une série de séries de fonctions continues par rapport aux ensembles* $(x, y, z)(x, y, t)$;

3° *Ou par une série de séries de séries de polynomes.*

Cette proposition subsiste si l'on fait jouer le rôle de x, y, z, t à des ensembles $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_q)$, $(z_1, z_2, \ldots, z_r)$, $(t_1, t_2, \ldots, t_s)$.

Les mêmes artifices que précédemment permettent de supposer que ces fonctions ont des discontinuités du genre de celles rencontrées aux théorèmes IV et V.

Approximations à l'aide des suites de Fourier. — Weierstrass a démontré que toute fonction continue ayant la période 2π peut se représenter avec telle approximation que l'on veut, par une suite finie de Fourier ou, ce qui est la même chose, par un polynome en $\cos x$ et $\sin x$ [1].

M. Picard déduit cette proposition des propriétés de l'intégrale de Poisson, et en conclut la possibilité de représenter approximativement une fonction continue par un polynome.

On peut de bien des manières passer inversement de l'approximation par un polynome à l'approximation par une suite de Fourier.

Soit $f(x)$ une fonction continue ayant la période 2π. On peut trouver une fonction continue $\varphi(x)$ ayant la période 2π qui diffère

---

[1] M. Volterra [*Sul Principio di Dirichlet* (*Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, tome XI)] démontre cette proposition de la façon suivante : on peut approcher autant que l'on veut d'une courbe à l'aide d'une ligne polygonale. Une telle ligne représente une fonction qui, n'ayant qu'un nombre fini de maxima et minima, peut, d'après Dirichlet, être développée en série de Fourier uniformément convergente.

de $f(x)$ de moins de ε et qui soit telle que, pour α assez petit, on ait

$$\varphi(\alpha) = \varphi(2\pi - \alpha), \qquad \varphi\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

$$\varphi(\pi - \alpha) = \varphi(\pi + \alpha), \qquad \varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = \varphi\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right).$$

Posons

$$\varphi(x) = A(\cos x) + \sin x\, B(\cos^2 x) + \sin x \cos x\, C(\cos^2 x).$$

En échangeant dans cette expression x en $\pi - x$, $\pi + x$, $2\pi - x$ on tire

$$A(\cos x) = \frac{\varphi(x) + \varphi(2\pi - x)}{2},$$

$$B(\cos^2 x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(2\pi - x) + \varphi(\pi - x) - \varphi(\pi + x)}{4 \sin x},$$

$$C(\cos^2 x) = \frac{\varphi(x) - \varphi(2\pi - x) - \varphi(\pi + x) + \varphi(\pi - x)}{4 \sin x \cos x}.$$

Donc A, B, C sont des fonctions finies et continues de $\cos x$, et, par suite, $\varphi(x)$ ou $f(x)$ peut être représentée avec telle approximation que l'on veut, par un polynome en $\sin x$ et $\cos x$.

Sous la seule réserve que les intervalles dont il s'agit soient plus petits que 2π, les théorèmes I, II, III sont exacts si l'on remplace dans leur énoncé *polynome* par *suite finie de Fourier*.

Ce résultat se déduit plus facilement encore du théorème sur les fonctions de deux variables.

Une fonction continue ayant la période 2π peut, en effet, être considérée comme attachée aux points de la circonférence

$$X = \cos x, \qquad Y = \sin x.$$

Soit $F(X, Y)$ une fonction continue par rapport à l'ensemble (X, Y) et égale sur la circonférence à la fonction proposée. On peut trouver un polynome $P(X, Y)$ qui diffère de moins de ε dans un domaine comprenant la circonférence; donc $P(\cos x, \sin x)$ diffère de la fonction proposée de moins de ε.

Sous cette forme, la démonstration se généralise immédiatement.

Soit une fonction continue par rapport à l'ensemble de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$: ayant la période π pour chacune des n

premières variables et la période 2π pour x_n, telle que pour $x_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ la fonction soit indépendante des variables $x_{i+1}, \ldots, x_n$. On peut la regarder comme attachée aux points de la variété

$$X_1 = \cos x_1, \quad X_2 = \sin x_1 \cos x_2, \quad \ldots, \quad X_n = \sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_{n-1} \cos x_n,$$
$$X_{n+1} = \sin x_1 \sin x_2 \ldots \sin x_{n-1} \sin x_n$$

ou

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_{n+1}^2 = 0;$$

elle est donc représentable avec telle approximation que l'on veut par un polynome en $X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}$.

SUR LA THÉORIE DES ABAQUES A ALIGNEMENTS;

PAR M. E. DUPORCQ.

1. Dans le numéro de juillet dernier du *Bulletin des Sciences mathématiques*, M. d'Ocagne a signalé, entre autres problèmes soulevés par l'étude de la nomographie, l'intérêt qui s'attache à la question suivante : étant donnée une relation entre plusieurs variables, rechercher si elle peut être représentée graphiquement par un abaque d'un type déterminé. M. d'Ocagne insiste, en particulier, sur le cas des abaques dits *à alignements*, qui sont parmi les plus simples; le problème se réduit, dans ce cas, au suivant : vérifier si une fonction donnée de trois variables, $F(x, y, z)$, peut être mise sous la forme

$$(1) \qquad F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \chi_1(x) & \psi_1(x) \\ \varphi_2(y) & \chi_2(y) & \psi_2(y) \\ \varphi_3(z) & \chi_3(z) & \psi_3(z) \end{vmatrix}.$$

La recherche des équations différentielles, auxquelles doit satisfaire la fonction F, conduit pratiquement à des calculs inextricables; mais le problème que l'on a en vue sera résolu tout aussi bien si, au lieu de ces équations différentielles, on parvient à établir des équations fonctionnelles nécessaires et suffisantes. La méthode que je vais présenter, et dont j'ai signalé déjà les

résultats dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (¹), permet, non seulement de vérifier si la fonction F peut prendre la forme (1), mais encore, le cas échéant, de la lui donner.

2. Je traiterai d'abord le problème analogue dans le cas d'une fonction de deux variables

$$F(x, y) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(y) \\ \psi_1(x) & \psi_2(y) \end{vmatrix}.$$

Soient b et b' deux valeurs arbitraires de y : les trois fonctions de x, $F(x, y)$, $F(x, b)$ et $F(x, b')$ sont de la forme

$$\lambda\varphi_1(x) + \mu\psi_1(x).$$

λ et μ étant indépendants de x. Ces trois fonctions de x sont donc liées entre elles par une relation linéaire et homogène : par suite, a et a' étant deux valeurs arbitraires de x, on a l'identité

$$\begin{vmatrix} F(x, y) & F(x, b) & F(x, b') \\ F(a, y) & F(a, b) & F(a, b') \\ F(a', y) & F(a', b) & F(a', b') \end{vmatrix} = 0.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante, puisqu'on peut alors écrire

$$F(x, y) = u\,F(x, b) + v\,F(x, b'),$$

u et v ne dépendant que de y.

On voit, de plus, que les fonctions φ_1 et ψ_1 sont toutes deux de la forme

$$\beta F(x, b) + \beta' F(x, b').$$

β et β' étant des constantes.

3. Revenons à la fonction (1). Soient b, b' et b'' trois valeurs arbitraires de y, c, c' et c'' trois valeurs arbitraires de z. On voit que les quatre fonctions de x

$$F(x, y, z), \quad F(x, b, c), \quad F(x, b', c'), \quad F(x, b'', c'')$$

sont de la forme

$$\lambda\varphi_1(x) + \mu\chi_1(x) + \nu\psi_1(x).$$

(¹) Séance du 1er août 1898.

λ, μ et ν étant indépendants de x. Il existe donc, entre ces quatre fonctions de x, une relation linéaire et homogène : par suite, a, a' et a'' étant trois valeurs arbitraires de x, on a l'identité

$$(\mathrm{A})\qquad \begin{vmatrix} F(x, y, z) & F(x, b, c) & F(x, b', c') & F(x, b'', c'') \\ F(a, y, z) & F(a, b, c) & F(a, b', c') & F(a, b'', c'') \\ F(a', y, z) & F(a', b, c) & F(a', b', c') & F(a', b'', c'') \\ F(a'', y, z) & F(a'', b, c) & F(a'', b', c') & F(a'', b'', c'') \end{vmatrix} = 0.$$

On aura deux autres identités analogues, (B) et (C), en considérant les fonctions de y

$$F(x, y, z), \quad F(a, y, c), \quad F(a', y, c'), \quad F(a'', y, c''),$$

et les fonctions de z

$$F(x, y, z), \quad F(a, b, z), \quad F(a', b', z), \quad F(a'', b'', z).$$

On voit, de plus, que les fonctions φ_1, χ_1 et ψ_1 sont toutes trois de la forme

$$\alpha F(x, b, c) - \alpha' F(x, b', c') - \alpha'' F(x, b'', c''),$$

α, α' et α'' étant des constantes. On peut même, en remplaçant chacun des éléments du déterminant (1) par la somme des éléments de la même ligne, multipliés, dans chaque colonne, par des paramètres convenables, supposer que

$$(2)\qquad \varphi_1 = F(x, b, c), \qquad \chi_1 = F(x, b', c'), \qquad \psi_1 = F(x, b'', c'').$$

4. Ceci posé, on peut, en vertu de l'identité (A), déterminer trois fonctions u, v et w de y et de z, telles que

$$F(x, y, z) = uF(x, b, c) - vF(x, b', c') - wF(x, b'', c''),$$

et il va falloir exprimer que ces trois fonctions peuvent être mises simultanément sous les formes

$$(a)\qquad u = \begin{vmatrix} \chi_2 & \chi_3 \\ \psi_2 & \psi_3 \end{vmatrix}, \qquad v = \begin{vmatrix} \psi_2 & \psi_3 \\ \varphi_2 & \varphi_3 \end{vmatrix}, \qquad w = \begin{vmatrix} \varphi_2 & \varphi_3 \\ \chi_2 & \chi_3 \end{vmatrix}.$$

S'il en est ainsi, la fonction φ_2, par exemple, qui figure dans v et dans w, doit être, d'après la dernière remarque du n° 2, proportionnelle à une fonction f_2 qui est à la fois des deux formes sui-

vantes

$$(3)\qquad f_2(y) = \alpha_2 v(y, c) - \alpha'_2 v(y, c') = \alpha_2 w(y, c) - \alpha_2 w(y, c'),$$

les α_2 désignant des constantes. Cette fonction pourra donc être déterminée, à une constante près, si les quatre fonctions de y

$$(\alpha)\qquad v(y, c),\quad v(y, c'),\quad w(y, c),\quad w(y, c')$$

sont liées entre elles par une relation linéaire et homogène. Or, cela résulte des identités (A) et (B). En effet, par suite de la première, les fonctions $v(y, z)$ et $w(y, z)$ sont des fonctions linéaires et homogènes des trois fonctions

$$F(a, y, z),\quad F(a', y, z),\quad F(a'', y, z),$$

et, en vertu de (B), la fonction de y, $F(\alpha, y, \gamma)$, est, quels que soient α et γ, une fonction linéaire et homogène des trois fonctions de y

$$F(a, y, c),\quad F(a', y, c'),\quad F(a'', y, c'').$$

Les quatre fonctions (α) peuvent donc s'exprimer en fonction linéaire et homogène des trois précédentes : il existe bien, par suite, entre elles une relation linéaire et homogène, et la fonction f_2 se trouve déterminée, à un facteur constant près.

On déterminera, d'une manière analogue, en vertu de (A) et (C), à un facteur constant près, une fonction $f_3(z)$, telle que

$$(4)\qquad f_3(z) = \alpha_3 v(b, z) - \alpha'_3 v(b', z) = \alpha''_3 w(b, z) - \alpha'''_3 w(b', z).$$

En opérant d'une manière quelconque, on obtiendra, finalement, trois fonctions de y : f_2, g_2 et h_2, et trois fonctions de z : f_3, g_3 et h_3, respectivement proportionnelles aux fonctions φ_2, χ_2, ψ_2, φ_3, χ_3 et ψ_3.

5. Posons

$$(5)\qquad \varphi = lf,\qquad \chi = mg,\qquad \psi = nh,$$

$$(6)\qquad \varphi_2 h_3 = \lambda,\qquad h_2 \varphi_3 = \lambda',\qquad m_2 n_3 = \lambda_1,\qquad n_2 m_3 = \lambda'_1,$$

$$\cdots\cdots\cdots\qquad \cdots\cdots\cdots\qquad \cdots\cdots\cdots\qquad \cdots\cdots\cdots$$

Si la première égalité (a) est satisfaite, on a

$$(7)\qquad a = \lambda\lambda - \lambda'\lambda';$$

or il faut, pour cela, que l'on ait identiquement

$$(D)\qquad \begin{vmatrix} u(y, z) & A(y, z) & A'(y, z) \\ u(b, c) & A(b, c) & A'(b, c) \\ u(b', c') & A(b', c') & A'(b', c') \end{vmatrix} = 0.$$

On devra avoir deux identités analogues, (E) et (F), entre les fonctions v, B, B′ et w, C, C′.

Inversement, une fois ces conditions remplies, on pourra déterminer des coefficients λ, λ', μ, ..., ν', tels que les trois égalités analogues à (7) soient satisfaites, et l'on pourra en déduire six coefficients l, m et n, au moyen des égalités (6), à la condition d'avoir

$$(G)\qquad \lambda\mu\nu = \lambda'\mu'\nu'.$$

Les égalités (5) serviront alors à déterminer les six derniers éléments du déterminant (1), dont les trois autres avaient été fournis par les égalités (2).

En résumé, on aura à vérifier les sept égalités (A), (B), ..., (G), et, quand elles seront remplies, on pourra déterminer les éléments du déterminant (1).

6. On pourra simplifier les recherches précédentes, dans le cas où l'on connaîtra trois systèmes différents de solutions de l'équation

$$F(x, y, z) = 0.$$

Soient (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ et $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ ces trois systèmes. On devra pouvoir déterminer des coefficients λ, μ et ν tels que l'on ait identiquement

$$F(x, y, z) = \begin{vmatrix} \lambda F(x, \beta, \gamma) & \mu F(\alpha, y, \gamma) & \nu F(\alpha, \beta, z) \\ \lambda' F(x, \beta', \gamma') & \mu' F(\alpha', y, \gamma') & \nu' F(\alpha', \beta', z) \\ \lambda'' F(x, \beta'', \gamma'') & \mu'' F(\alpha'', y, \gamma'') & \nu'' F(\alpha'', \beta'', z) \end{vmatrix}$$

et il sera facile de se rendre compte si cette détermination est possible.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ball (W.-W.-R.). — *Récréations et Problèmes mathématiques des temps anciens et modernes.* 3e édit. Traduit par J. Fitz-Patrick. In-8°, IV-352 p. avec fig. Paris, A. Hermann.

Graf (J.-H.). — *Der Mathematiker Jacob Steiner v. Utzenstorf.* Ein Lebensbild u. zugleich eine Würdigung seiner Leistungen. Avec portrait et fac-similé. Gr. in-8°, 54 p. Bern, Wiss. 1 m. 20 pf.

Hammer (E.). — *Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie.* 2e édition. Gr. in-8°, XIV-572 p. avec fig. et pl. Stuttgart, Metzler. 7 m. 40 pf; relié 7 m. 90 pf.

Page (J.-M.). — *Ordinary Differential Equations.* Elementary Textbook. With Introduction to Lie's Theory of the Group of one Parameter. In-8°, 246 p. London, Macmillan. 6 sh. 6 d.

Pascal (E.). — *Repertorio di Matematiche superiori.* Vol. I. Analisi. In-8°, XVI-642 p. Milan, Hoepli. 4 m. 80 pf.

Vivante. — *Corso di Calcolo infinitesimale.* In-8°. Messine, Trimarchi. 8 l.

Andrade (J.). — *Leçons de Mécanique physique.* In-8°, IV-415 p. avec figures. Paris, Société d'éditions scientifiques. 10 fr.

Bortkewisch (L. v.). — *Das Gesetz der kleinen Zahlen.* Gr. in-8°, VII-52 p. Leipzig, Teubner. 2 m.

Connaissance *des Temps ou des mouvements célestes pour le méridien de Paris, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an* 1900. Publiée par le Bureau des Longitudes. In-8°, XVI-865 p. et planches en couleurs. Paris, Gauthier-Villars et fils. 4 fr.

Czuber (E.). — *Vorlesungen über Differential- u. Integral-Rechnung.* 1 Bd. Gr. in-8°, XII-526 p. avec 112 fig. dans le texte. Leipzig, Teubner. 12 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WEBER (H.). — Lehrbuch von Algebra. Zweite Auflage. Erster Band; in-8°, xv-703 p. Braunschweig. Vieweg und Sohn, 1898.

WEBER (H.). — Traité d'Algèbre supérieure, traduit de l'allemand sur la deuxième édition par *J. Griess*. Principes. Racines des équations. Grandeurs algébriques. Théorie de Galois. Gr. in-8°, xi-764 p. Paris, Gauthier-Villars, 1898.

Tout récemment dans le Tome XIX, p. 161-176, et dans le Tome XXI, p. 93-114, nous donnions un compte rendu et une appréciation détaillée de l'excellent Ouvrage de M. H. Weber. Cet Ouvrage a eu un tel succès qu'au bout de quatre ans une nouvelle édition est devenue nécessaire. C'est le Tome I de cette nouvelle édition qui vient de paraître en Allemagne et c'est aussi la traduction de ce Tome I que nous offre aujourd'hui M. Griess. Indiquons tout d'abord en quoi la seconde édition du Tome I diffère de la première.

Le succès même obtenu par cette première édition montrait que le plan et la suite des idées avaient été bien établis. Rien d'essentiel n'y a été changé. Cependant toutes les parties ont été revues à différentes reprises; bien des points de détail ont été remaniés, en partie pour améliorer l'exposition même, en partie pour y faire entrer les travaux récents.

La traduction de M. Griess est fidèle et élégante. Il n'est pas douteux que, dans un pays où l'Algèbre a été cultivée si longtemps et avec tant de succès, elle ne reçoive l'accueil qu'elle mérite à tous égards. A ce point de vue, elle constitue un nouveau et important service rendu par M. Griess à la Science française et à l'enseignement.

PETERSEN. — Vorlesungen über Funktionstheorie. 1 vol. in-8°, 328 p. Copenhague, A.-F. Host et Son; 1898.

Ce Livre d'enseignement est de ceux auxquels on doit bon accueil, non seulement à cause des résultats nouveaux qu'il contient, mais aussi parce que les théories qui y sont développées ont été pensées à nouveau par l'auteur, qui a su donner à leur exposition une forme systématique et, très souvent, personnelle. Au reste, le lecteur s'attend naturellement, dans un livre de M. Petersen, à trouver des modèles de brièveté et d'élégance, des vues claires et rapides.

Ce Livre est divisé en deux Parties consacrées, l'une aux théories générales, l'autre à quelques fonctions particulières.

L'auteur appelle tout d'abord l'attention sur ce que c'est qu'une partie connexe du plan qui sert à représenter une variable complexe et sur le sens dans lequel peut être parcouru son contour; il définit ensuite les fonctions monogènes, établit les propriétés élémentaires de la représentation conforme, distingue les fonctions univoques et plurivoques, montre le caractère et le rôle des points d'embranchement et expose de suite la construction d'une surface de Riemann, relative à une fonction algébrique donnée : il introduit ensuite la notion d'intégrale curviligne et établit, d'après la méthode de Riemann, le théorème fondamental sur l'intégrale d'une fonction d'une variable complexe. Au bout d'une cinquantaine de pages, la notion de module de périodicité est déjà acquise, et plusieurs applications, notamment aux intégrales elliptiques, ont été développées rapidement. L'auteur consacre ensuite un important Chapitre à la théorie de la connexion et de la réduction d'une surface de Riemann à une forme normale. On y remarquera une démonstration de cette proposition : dans toute surface connexe, on peut pratiquer une coupure (*Querschnitt*) qui ne partage pas la surface en deux morceaux, tant que cette surface n'est pas une *surface élémentaire;* à cette démonstration se rattache la détermination de la forme normale. M. Petersen passe ensuite aux intégrales abéliennes, établit la distinction en espèces et traite du théorème d'Abel, du problème de la réduction des intégrales,

des théorèmes d'addition, tout cela d'une façon large et rapide, en même temps qu'avec des exemples précis.

Le lecteur a maintenant acquis des vues étendues sur une théorie capitale, et cela, avec la seule notion de fonction de variable complexe, jointe aux intuitions géométriques nécessaires pour la conception de la surface de Riemann et la théorie de la connexion. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'acquérir les connaissances élémentaires sur les modes les plus importants de représentation des fonctions, en particulier sur les séries et les produits infinis. M. Petersen reprend les choses au début et, d'une façon claire et condensée, expose les règles principales pour la convergence des séries à termes positifs, la notion de convergence absolue, les propositions essentielles sur les séries de puissances, la notion de convergence uniforme, etc.

De là, l'auteur passe à l'étude de l'intégrale

$$\int \frac{f(z)\,dz}{z - z_0},$$

et aux conséquences fondamentales du théorème de Cauchy.

En dehors des applications classiques aux séries de Taylor, Maclaurin, Laurent, Lagrange, Fourier, etc., nous signalerons l'étude de l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(z)}{e^{2i\pi z} - 1}\,dz$$

et la démonstration qui en résulte du théorème suivant :

Soient x_1, x_2 deux nombres entiers, on aura

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1) + \varphi(x_1 - 1) + \varphi(x_1 + 2) - \ldots + \varphi(x_2 - 1) + \frac{1}{2}\varphi(x_2)$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \varphi(z)\,dz + \frac{1}{i}\int_0^\infty \frac{[\varphi(x + iy) - \varphi(x - iy)]_{x_1}^{x_2}\,dy}{e^{2\pi y} - 1},$$

si la fonction $\varphi(z)$ est univoque et continue pour toutes les valeurs de z dont la partie réelle est comprise entre x_1 et x_2 et si, lorsque la fonction $\varphi(z)$ de $z = x + iy$ devient infinie avec y dans cet intervalle, on a, suivant que y augmente indéfiniment par

valeurs positives ou négatives,

$$\lim_{y=\infty} e^{2i\pi z}\varphi(z) = 0, \qquad \lim_{y=\infty} \frac{\varphi(z)}{e^{-i\pi z}-1} = 0.$$

De cette proposition, qui précise une formule d'Abel, l'auteur déduit, en particulier, la fermule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

C'est du théorème de Cauchy que M. Petersen déduit les propositions fondamentales de la théorie des fonctions; à la fin de ces propositions il a placé le théorème de M. Schwarz sur le prolongement par symétrie et le théorème de M. Picard relatif aux fonctions entières $f(z)$ telles que les équations $f(z) = a$, $f(z) = b$ n'aient qu'un nombre limité de solutions; il donne ensuite la notion de fonction analytique, au sens de Weierstrass. Le paragraphe relatif aux fonctions transcendantes entières contient, outre la démonstration du théorème de Weierstrass sur la détermination d'une telle fonction au moyen de ses zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, l'étude du rôle joué par le nombre ρ, limite pour n infini du rapport

$$\frac{\log n}{\log |a_n|}.$$

La fin de la première Partie est consacrée aux théorèmes d'existence : l'auteur s'occupe d'abord de l'existence d'une fonction u, à l'intérieur d'une aire simplement connexe, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

et définie par ses valeurs le long du contour. Tout en renvoyant aux Mémoires classiques pour la démonstration du principe de Dirichlet, M. Petersen développe la solution de M. Schwarz pour la représentation conforme du demi-plan sur une aire polygonale. Il traite, enfin, de l'existence d'une fonction relative à une surface de Riemann donnée.

Dans la seconde Partie, M. Petersen développe d'abord les propriétés les plus importantes de la fonction $\Gamma(z)$ et de la fonction $\zeta(z)$ de Riemann. La formule de sommation, dont il a été question plus haut, fournit pour $\log\Gamma(z)$ les expressions suivantes,

valables suivant que la partie réelle de $z = x + iy$ est positive ou négative

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}{e^{2\pi y} - 1}\,dy,$$

$$\log\Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log(-z) - \log\sin\pi z - z - \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{2}$$

$$- 2\int_0^\infty \frac{\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}}{e^{2\pi y} - 1}\,dy.$$

Signalons encore, relativement à la fonction $\zeta(z)$, l'application de la même formule sommatoire, puis l'étude du nombre de zéros, dans un cercle de rayon infiniment grand, de la fonction transcendante entière

$$f(z) = \pi^{-\frac{z}{2}}\,\Gamma\left(\frac{z}{2} + 1\right)(1 - z)\,\zeta(z):$$

l'application à la recherche du nombre de nombres premiers, la démonstration d'importants résultats obtenus récemment par MM. Hadamard, de la Vallée-Poussin et Mangoldt.

La fin de l'Ouvrage constitue un intéressant résumé, très condensé, de la théorie des fonctions doublement périodiques. C'est tout d'abord l'exposition des propriétés de ces fonctions qui résultent directement de la théorie générale des fonctions, dans la voie suivie par Liouville, Briot et Bouquet, puis l'introduction des fonctions ϑ, leur décomposition en facteurs primaires, la construction des fonctions elliptiques au moyen de ces fonctions ϑ. Les relations entre les fonctions sn, cn, dn, les théorèmes d'addition sont, pour la plupart, obtenus au moyen du théorème de Liouville. L'auteur donne des indications essentielles sur le problème de la transformation. Enfin, un dernier Chapitre, sur les fonctions modulaires elliptiques, initie le lecteurs aux recherches de M. Schwarz et de M. Klein.

J. T.

CZUBER (E.). — Vorlesungen über differential- und integral Rechnung. Zweiter Band; un vol. in-8°, IX-428 p. Leipzig, Teubner, 1898.

Nous avons parlé récemment du premier Volume de ces Leçons : le second Volume se rapporte au Calcul intégral; il est conçu dans le même plan que le premier, et le but de l'auteur est toujours de donner à l'étudiant les connaissances indispensables sans rien sacrifier d'essentiel dans la rigueur de l'exposition : c'est ainsi qu'au début il établira, en toute rigueur, l'existence de l'intégrale pour les fonctions continues, tout en insistant, comme il convient, sur la signification géométrique de l'opération.

Les Chapitres concernant les intégrations élémentaires ne comportent naturellement pas grandes observations, tant la matière est classique. Signalons, toutefois, le soin avec lequel sont choisis les exemples et le souci d'éviter aux débutants des erreurs dans lesquelles ils tombent facilement : par exemple, M. Czuber emploie deux notations différentes, $\operatorname{arc\,tang} x$ et $\operatorname{Arc\,tang} x$ pour désigner la valeur principale $\left(\text{comprise entre } -\frac{\pi}{2} \text{ et } +\frac{\pi}{2}\right)$ de l'arc dont la tangente est x, et les autres déterminations.

Il semble que la notion de *courbe unicursale,* qu'il a laissée de côté, puisse être aisément comprise, même par des lecteurs peu familiers avec la Géométrie analytique, pourvu qu'on se borne à la notion, et à des applications immédiates.

Pour ce qui est des intégrales définies, signalons la démonstration très simple, fondée sur la formule d'intégration par parties, *du second théorème de la moyenne,* qu'exprime l'égalité

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\,dx = \psi(a)\int_a^\xi \varphi(x)\,dx + \psi(b)\int_\xi^b \varphi(x)\,dx$$
$$(a < \xi < b)$$

sous la supposition que la fonction $\psi(x)$ varie dans le même sens quand x varie de a à b; cette démonstration, à la vérité, suppose que la fonction $\psi(x)$ admet une dérivée; mais cet inconvénient n'en est pas un dans l'ordre d'idées où s'est placé l'auteur. L'étude des cas où la fonction sous le signe $\int$ devient infinie aux

limites, du cas où les limites sont infinies, de la différentiation et de l'intégration d'une intégrale ou d'une série sont faites avec autant de soin que de mesure. Signalons, par exemple, les applications aux intégrales $\int_0^\infty e^{-yx}\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int_0^\infty e^{-x^2}\frac{\sin xy}{x}\,dx$. L'auteur traite ensuite des intégrales multiples. Les formules pour le changement de variables sont déduites de considérations géométriques. Les applications sont nombreuses et intéressantes; elles se terminent par une étude du potentiel, dont les propriétés fondamentales sont établies avec clarté et rigueur.

On ne peut s'attendre, dans un livre tel que celui que nous analysons, à trouver une théorie approfondie des équations différentielles. Donner, sous une forme géométrique, une idée claire du problème, et les règles les plus usuelles d'intégration, tel est le but que s'est évidemment proposé l'auteur et qu'il a atteint. Il part de ce qu'une équation différentielle $f(x, y, y') = 0$ définit une infinité d'éléments linéaires, c'est-à-dire de systèmes formés par un point et une droite passant par ce point, la droite qui passe par le point (x, y) ayant pour coefficient angulaire y' : intégrer l'équation, c'est ordonner de toutes les façons possibles ces éléments linéaires en une suite telle que les points forment une courbe et les droites correspondantes les tangentes à cette courbe. L'auteur traite les cas classiques d'intégration, donne la notion du facteur intégrant, puis, à l'occasion de l'équation de Clairaut, celle de l'intégrale singulière, que les considérations géométriques permettent d'éclaircir très suffisamment. Pour ce qui est des équations différentielles d'ordre supérieur, il se borne aux cas d'intégration immédiate, sauf pour les équations linéaires dont il développe les propriétés élémentaires, et qu'il apprend à intégrer dans le cas des coefficients constants. Quelques pages sont consacrées au calcul des variations; application est faite à l'équation des lignes géodésiques. Les équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires ou non, sont traitées dans le même ordre d'idées que les équations différentielles ordinaires. Pour ce qui est des équations aux dérivées partielles du second ordre, l'auteur développe quelques exemples où l'on obtient une intégrale intermédiaire, et le cas des équations linéaires à coefficients constants.

Le court résumé qui précède suffira, je l'espère, pour montrer que, tout en s'adressant aux élèves des écoles techniques, comme en témoignent nettement le souci d'écarter les développements purement théoriques et le parti pris très justifié de rester dans le réel, les Leçons de M. Czuber gardent un caractère élevé.

J. T.

G. HOLZMULLER. — Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. II. Theil : *Das Potential und seine Anwendung*. Un vol. in-8°, XVII-440 p. Leipzig. Teubner. 1898.

Le développement, de plus en plus considérable, qu'a pris l'enseignement de l'Électricité dans les écoles supérieures techniques faisait souhaiter que l'on rendît accessible, à ceux qui n'ont pas fait d'études mathématiques approfondies, la connaissance des théories électriques. M. Holzmüller a donc fait œuvre utile en nous donnant une exposition élémentaire du potentiel et de ses applications à la gravitation, à l'électricité, au magnétisme, à la chaleur et à l'hydrodynamique.

« Ce livre s'adresse aux ingénieurs praticiens, aux étudiants des Universités et des Instituts techniques, aux professeurs de Physique et de Mathématiques des écoles supérieures auxquels il importe de connaître les ressources que donnent, pour l'enseignement, les procédés élémentaires. Il est destiné à compléter, pour la partie mathématique, les manuels de Physique usuels. »

Deux modes d'exposition se présentent pour atteindre le but que s'est proposé M. Holzmüller.

Le premier consistera à exposer, dans une courte introduction, les quelques notions mathématiques, dérivée, intégrale, infiniment petits, qui seront employées plus tard. Il faudra sans doute se garder d'en faire une exposition abstraite, mais, au contraire, employer toutes les ressources de l'intuition, s'aider des notions déjà familières de tangente et d'aire pour élucider les notions nouvelles. On obtiendra ainsi, en même temps qu'un terrain solide pour édifier la future théorie, des procédés analytiques puis-

sants, qui en faciliteront l'exposition, en supprimant tout calcul parasite. Le lecteur acquerra la connaissance de notions importantes qui peuvent lui servir ailleurs. L'ensemble du livre gagnera en simplicité, en précision et en rigueur.

M. Holzmüller a jugé préférable de suivre une marche tout à fait élémentaire, et il convient de le suivre sur le terrain qu'il a choisi. Son exposition « exclut complètement le Calcul infinitésimal et n'exige de la Géométrie analytique que les notions qui sont enseignées dans les lycées ».

Tous ceux qui ont enseigné la théorie du potentiel savent combien la tâche ainsi entreprise était lourde; par l'emploi fréquent d'illustrations géométriques et mécaniques judicieuses, M. Holzmüller a su vaincre la plupart des difficultés sérieuses. L'exclusion du Calcul infinitésimal paraît cependant avoir eu ce résultat fâcheux d'alourdir ou de rendre incomplètes certaines démonstrations. Il est sans doute facile d'effectuer une sommation déterminée par un artifice de calcul, mais il faut à chaque nouvelle sommation employer un artifice nouveau; aussi, après avoir calculé très élégamment l'intégrale $\int \frac{dx}{x^2}$, M. Holzmüller n'a pas tenté le calcul des intégrales $\int x^3\,dx$, $\int x^4\,dx$, $\int \frac{dx}{x}$, $\int \cos x\,dx$ qui se présentaient incidemment.

Quelquefois aussi l'exposition élémentaire ne permet pas d'obtenir quelque propriété importante qui reste ainsi dans l'ombre. C'est ainsi que seule la troisième des lois de Képler sur le mouvement des planètes est mise en évidence; la distribution superficielle de l'électricité dans un condensateur en équilibre n'est pas indiquée.

Malgré ces objections, le livre de M. Holzmüller peut rendre des services sérieux aux étudiants auxquels il est destiné. Il est particulièrement intéressant d'y trouver réunies et envisagées à un même point de vue les théories de la gravitation, de l'électricité, du magnétisme, de la chaleur et de l'hydrodynamique; le rapprochement de ces diverses théories les éclaircit mutuellement et montre toute l'importance de la notion du potentiel dans la Physique moderne.

Voici une indication très succincte des sujets traités.

L'Ouvrage commence par l'exposé de la loi de l'attraction universelle, qui conduit immédiatement à la notion de potentiel; ensuite, sont établis les théorèmes sur l'attraction d'une surface et d'une couche sphériques homogènes d'une sphère. Les résultats obtenus sont appliqués à la résolution de quelques problèmes de Physique terrestre ou céleste : masses et densités de la Terre et des planètes, marées, refroidissement du Soleil, etc.

L'auteur passe ensuite à l'étude des champs de force créés par l'attraction gravifique, électrique ou magnétique; il expose au Chapitre IV les notions de ligne de force, de tube de force, de surface de niveau et fait comme application la théorie de l'influence électrique, des condensateurs, de l'électromètre de Thomson.

Le Chapitre V contient l'étude des champs de force créés par plusieurs points chargés d'électricité de même nature ou de natures différentes; de nombreuses figures donnent la disposition des lignes de force et des surfaces de niveau.

Au Chapitre VI, nous abordons l'importante notion du flux de force avec les théorèmes de Laplace, Gauss et Poisson, et leurs conséquences.

Les Chapitres VII, VIII, IX et X contiennent une exposition, où l'on n'a pu éviter quelques redites, des théories des images électriques, du potentiel logarithmique, etc.; à signaler de nombreuses études de champs électriques particuliers.

Puis, le Chapitre XI traite des courants électriques et des lois de Ohm, de Kirchhoff et de Joule; le Chapitre XII contient les principes de la théorie du magnétisme.

Les actions électromagnétiques et électrodynamiques des courants électriques sont exposées au Chapitre XIII, où il faut signaler particulièrement une représentation mécanique du champ électromagnétique (p. 365 et suiv.) qui éclaire vivement la théorie des courants d'induction, des ondes électromagnétiques et des oscillations hertziennes.

La fin du Volume contient un Chapitre consacré à certaines théories d'hydrodynamique (tourbillons, mouvements des eaux d'infiltration) qui présentent des analogies remarquables avec les

théories précédentes; puis viennent deux suppléments consacrés, le premier à l'attraction des ellipsoïdes, le deuxième aux unités et à leurs dimensions. F. MAROTTE.

SMITH (W.-B.). — INFINITESIMAL ANALYSIS. Vol. I. *Elementary : real variables.* Un vol. in-8°, xv-352 p. Londres et New-York, Macmillan and Co, 1898.

Dans cet Ouvrage, l'auteur n'a nullement cherché à faire une exposition complète et rigoureuse du Calcul infinitésimal. Son but a été tout différent. Il a voulu, en laissant de côté, dans une première étude, les démonstrations trop ardues et l'appareil nécessairement compliqué d'une rigueur parfaite, inspirer à ses lecteurs le goût de l'Analyse infinitésimale et leur donner aussi complètement que possible une idée claire de l'objet de cette science et de la puissance de ses méthodes. Aucun sujet n'est donc traité à fond; mais l'auteur ne s'est refusé aucune digression propre à intéresser le lecteur et à lui inspirer le désir d'une étude plus complète. De nombreux exercices, pris surtout dans les Recueils anglais, sont indiqués sur les différents sujets; quelques-uns pourront paraître difficiles, l'essentiel est qu'ils intéressent les débutants.

Il nous serait difficile de donner une analyse d'un Traité dont la devise est de donner des clartés sur tout sans épuiser aucune théorie. Nous dirons toutefois que ce premier Volume traite uniquement des variables réelles et laisse de côté toute théorie générale des séries.

DRAKE-ROE (E.). — DIE ENTWICKELUNG DER SYLVESTER'SCHEN DETERMINANTE NACH NORMAL-FORMEN. In-8°, 52 p. Leipzig, Teubner, 1898.

On sait que Sylvester a donné la résultante de deux équations algébriques, d'ordres m et n respectivement, sous la forme d'un déterminant à $m+n$ lignes qui est aujourd'hui bien connu du

moindre de nos étudiants. Ce déterminant se forme de la manière la plus simple; il est très facile de l'écrire, mais il est très difficile de le développer dès que les nombres m et n ne sont pas tous les deux égaux à 2. Cela tient à ce que son développement conduit à un grand nombre de termes qui se réduisent et disparaissent dans le résultat final. Pour obtenir ce développement sous la forme la plus simple, l'auteur a dû faire appel aux propriétés essentielles et évidentes de la résultante de deux équations. Sa méthode, essentiellement différente de celle que Cayley a donnée en 1857 dans le Vol. CXLVII des *Transactions philosophiques,* repose sur l'emploi de formes particulières auxquelles il donne le nom de *formes normales* et de *formes réductibles*. La forme normale, par exemple, est formée par l'ensemble des termes de la résultante qui contiennent en facteurs les coefficients extrêmes des deux formes données.

Comme application de la puissante méthode qu'il donne dans son Ouvrage, il fait connaître le développement complet de la résultante lorsque, une des équations étant du second degré, l'autre est d'un degré quelconque et aussi lorsque les deux équations sont respectivement du quatrième et du cinquième degré.

Dans sa Préface, M. Drake Roe rappelle avec empressement qu'il a suivi l'enseignement de M. Gordan, qu'il a entendu à Erlangen un cours du savant professeur sur le déterminant de Sylvester, que c'est sur son invitation même qu'il a entrepris la recherche dont nous venons d'indiquer le but et les résultats.

LAGUERRE. — Œuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par MM. *Ch. Hermite, H. Poincaré* et *E. Rouché,* Membres de l'Institut. Tome I : *Algèbre. Calcul intégral.* 1 vol. Gr. in-8°, XVI-472 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1898.

L'édition des Œuvres de Laguerre sera complète en deux Volumes; le second est réservé aux Mémoires de Géométrie; nous n'avons à nous occuper que du premier, qui contient toutes les autres publications de Laguerre. Il renferme en outre l'intéressante et substantielle Notice de M. Poincaré sur Laguerre, qui lui sert

de préface ; une Note importante de M. Hermite sur une question d'Algèbre et, au bas des pages, quelques notes de M. Rouché qui fournissent d'utiles renseignements sur l'exécution de cette édition.

Les Mémoires de Laguerre sont classés sous deux rubriques distinctes : *Algèbre, Calcul intégral;* et, dans cette classification, on est tout d'abord étonné de voir les recherches de Laguerre sur les transcendantes entières, et d'autres encore, figurer parmi les Mémoires d'Algèbre. Cet étonnement disparaît lorsque, au lieu de lire seulement la Table des matières, on étudie le texte même; on voit alors que l'un des traits caractéristiques de Laguerre est l'aisance avec laquelle il résout bien des questions d'Analyse par les méthodes de l'Algèbre la plus élémentaire, et l'on s'aperçoit à peine de la transition entre l'Algèbre des polynomes et *l'Algèbre des fonctions transcendantes,* si l'on peut ainsi s'exprimer.

Laguerre a touché à des sujets très variés; dans des Notes souvent très courtes, il leur apporte une contribution intéressante; c'est ainsi que le Volume dont nous rendons compte renferme plus de soixante Notes ou Mémoires. Pour les analyser en détail, il serait nécessaire de dépasser beaucoup les limites habituelles que s'imposent les rédacteurs du *Bulletin.* Aussi nous bornerons-nous aux sujets sur lesquels Laguerre est revenu à de nombreuses reprises, laissant de côté, quelque intéressants qu'ils soient, les Mémoires isolés (¹).

Nous serons ainsi amenés à parler successivement de trois ordres différents de recherches, d'ailleurs souvent connexes et ayant trait aux équations algébriques, aux transcendantes entières et aux fractions continues.

I. La détermination exacte du nombre des racines réelles d'une équation algébrique et la séparation de ces racines ont longtemps

(¹) Nous mentionnerons cependant le Mémoire *Sur le calcul des systèmes linéaires,* à cause de son importance exceptionnelle. Pour donner une idée de la variété du génie de Laguerre, citons, parmi les sujets traités dans ces Mémoires isolés : les covariants des formes binaires, la partition des nombres, la multiplication et la transformation des fonctions elliptiques, le potentiel des ellipsoïdes; l'étude de certaines équations différentielles du premier, du second et du troisième ordre; la méthode de Monge pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, les coupures des fonctions analytiques, etc.

été au nombre des plus importantes préoccupations des géomètres. La beauté de la solution de Sturm, perfectionnée par M. Hermite, et aussi la multitude d'autres sujets nouveaux qui sollicitaient l'attention ont, dès le milieu de ce siècle, diminué beaucoup l'importance relative de ces questions. La complication rapidement inextricable qu'atteignent les calculs dans les applications n'était d'ailleurs pas faite pour en encourager l'étude.

Laguerre pensa cependant qu'entre les méthodes imparfaites, mais simples, dont la règle de Descartes fut le premier exemple, et les méthodes parfaites, mais pratiquement compliquées, dont Sturm a donné le type, il y avait place pour d'autres méthodes, moins imparfaites que les premières et plus aisément utilisables que les secondes.

Ces nouvelles méthodes devaient permettre, au prix de calculs *assez* simples, de résoudre, *dans la plupart des cas,* le problème pratique de la séparation des racines. Un problème énoncé sous une forme aussi vague n'aurait probablement pas conduit à beaucoup de résultats un esprit moins net et moins précis que celui de Laguerre. En fait, non seulement il a donné, pour ainsi dire, tous les intermédiaires entre la règle de Descartes et celle de Sturm, c'est-à-dire une série de méthodes dont les chances de succès augmentent à mesure que les calculs exigés par elles se compliquent, mais encore, chemin faisant, il a trouvé un grand nombre de propositions importantes et nouvelles dont plusieurs ont trait aux équations transcendantes.

Dès lors, une équation numérique étant donnée, la séparation de ses racines est, en général, obtenue par un calcul très simple. Sans doute, si les coefficients sont indéterminés, on doit craindre, *a priori,* des calculs aussi longs que ceux de Sturm; mais c'est là une difficulté théorique sans doute inévitable; elle importe d'ailleurs assez peu, si, en fait, on est presque toujours dispensé de ces calculs.

A la séparation des racines d'une équation numérique se rattache la question de leur approximation. Là encore le sujet pouvait paraître épuisé. Laguerre le renouvelle en montrant que si l'équation a toutes ses racines réelles, ce que l'on sait souvent *a priori,* on peut obtenir une approximation plus grande par des procédés plus simples. Il obtient ainsi, outre la règle qui porte son nom,

d'intéressants résultats sur l'approximation des fonctions circulaires.

L'étude des travaux de Laguerre sur la théorie des équations met déjà en évidence une qualité qu'il possédait au plus haut degré et que l'on retrouve dans le reste de son œuvre : je veux parler de sa faculté de généralisation, à la fois prudente et hardie.

Généraliser une proposition est souvent très facile, si l'on entend par là donner un énoncé assujetti à la seule condition de contenir le premier comme cas particulier. Mais la généralisation ainsi comprise sera rarement intéressante, rarement féconde.

Presque toujours généraliser une propriété d'une certaine classe d'êtres algébriques (ou géométriques, etc.), c'est étendre cette propriété à une classe plus large. Cette extension ne sera le plus souvent possible que si l'on modifie la forme de la proposition, si on la réduit à ce qu'elle a d'*essentiel*, et voilà un premier point où la sagacité de l'analyste devra s'exercer. Mais ce n'est pas tout; il est clair que, plus on élargit la classe d'êtres auxquels on veut étendre la proposition, plus cette proposition devra elle-même être restreinte dans son énoncé. Il y a donc à garder une mesure et c'est là que la lecture de Laguerre peut nous fournir des modèles incomparables.

On voit comment il s'attache à dégager les *raisons essentielles* d'une proposition, ainsi que ce qu'il y a de vraiment important dans son énoncé, de manière à l'étendre autant que possible en surface, tout en la réduisant le moins possible en profondeur. On en trouverait de nombreux exemples dans les recherches dont nous venons de parler; mais c'est surtout dans l'étude de ses Mémoires sur les fonctions entières que nous saisirons sur le vif sa méthode.

II. La mémorable découverte des facteurs primaires avait établi une analogie de plus entre les transcendantes entières et les polynomes; mais, en même temps, elle avait mis en évidence le caractère propre de ces transcendantes et faisait pressentir la vraie nature des difficultés de leur étude. Aussi, malgré sa beauté, la découverte de Weierstrass resta d'abord presque dépourvue d'applications : on se contenta de l'admirer.

Il était réservé à Laguerre de faire voir comment on en pouvait

déduire une classification naturelle des fonctions entières et combien cette classification pouvait faciliter l'étude de ces fonctions : il introduisit la notion de *genre,* dont l'importance s'accroît chaque jour, et étendit plusieurs propriétés des polynomes à des classes déterminées de fonctions entières (fonctions de genre zéro, de genre un, de genre fini).

Par exemple, si un polynome a toutes ses racines réelles, il résulte immédiatement du théorème de Rolle :

1° Que le polynome dérivé a aussi toutes ses racines réelles;

2° Que, dans l'intervalle formé par deux racines consécutives du polynome proposé, il y a *une seule* racine du polynome dérivé.

Ces conséquences ne s'étendent évidemment pas à toutes les équations transcendantes; Laguerre fait voir qu'elles subsistent, avec de très légères modifications, pour les fonctions de genre fini ([1]).

Un autre exemple est fourni par le théorème des lacunes, conséquence immédiate du théorème de Descartes pour les polynomes : Laguerre l'étend aux fonctions entières de genre zéro ou un.

Il est inutile de multiplier les exemples; on voit combien les résultats obtenus par Laguerre ont un caractère précis et, si l'on peut ainsi dire, algébrique; aussi ses travaux sur les fonctions entières forment-ils une base extrêmement solide pour des recherches ultérieures; souvent, d'ailleurs, la forme qu'il donne à des théorèmes fort particuliers fait soupçonner l'existence de propositions plus générales. Aussi, malgré les progrès faits depuis par cette théorie, notamment sous l'influence de MM. Poincaré et Hadamard, la lecture des quelques pages qu'y a consacrées Laguerre reste éminemment suggestive, et indispensable à quiconque en veut faire une étude personnelle.

III. La théorie des fractions continues algébriques est l'une des plus difficiles de l'Analyse; elle est encore dans la période où l'étude détaillée de cas particuliers peut seule indiquer dans

---

([1]) Il peut y avoir des racines *irrégulières* dans la dérivée, en nombre au plus égal au genre de la fonction.

quelle direction on trouvera peut-être des résultats intéressants et généraux.

Un tel sujet de recherches était très approprié au génie de Laguerre; d'ailleurs, par plusieurs côtés, il touchait à ses travaux sur les équations algébriques : par exemple, c'est surtout pour démontrer qu'ils ont au plus une racine réelle que Laguerre a étudié les polynomes numérateurs et dénominateurs des réduites d'ordre quelconque (m, n) de la fonction e^x. Mais nous ne pouvons tout citer : indiquons seulement un résultat qui paraît devoir être parmi les plus féconds.

L'étude de l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$$

conduit Laguerre à une *série divergente,* à laquelle correspond un *développement en fraction continue convergent.* On sait à quels beaux résultats a été conduit Stieltjes par cette remarque [1].

IV. En terminant, disons quelques mots de celui des Mémoires isolés de Laguerre qui est le plus important, autant par son étendue que par l'originalité et la beauté de sa matière : nous voulons parler de la Lettre à M. Hermite *Sur le calcul des systèmes linéaires.*

L'idée fondamentale de Laguerre consiste dans le fait de considérer un système linéaire, c'est-à-dire le tableau des coefficients de n équations linéaires à n inconnues, *comme une véritable quantité, soumise à toutes les opérations algébriques* [2]. La principale difficulté du calcul de ces nouvelles quantités provient de ce que leur multiplication n'est généralement pas commutative; ce calcul permet néanmoins d'obtenir très simplement d'importants résultats; nous ne pouvons énumérer ici ceux que donne

---

(1) *Mémoire sur les fractions continues* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* 1894. *Voir* aussi un intéressant Mémoire de M. Padé (*Acta mathematica*, t. XVIII).

(2) Cette généralisation de la notion de quantité comprend comme cas particuliers toutes celles qui avaient été données auparavant : imaginaires de Galois, clefs de Cauchy, nombres complexes de Weierstrass, etc.

Laguerre, encore moins ceux qui ont été obtenus après lui par divers géomètres, notamment par Sylvester.

Indiquons cependant que, pour $n = 2$, le calcul des systèmes linéaires est identique à celui des quaternions; si l'on remplace les deux variables homogènes par une seule, on trouve la relation, aujourd'hui bien connue, entre les rotations dans l'espace et la composition des substitutions homographiques de la forme

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

On sait quelle importance ont acquise ces remarques dans l'Analyse moderne ([1]); mais le rôle joué par Laguerre dans cette théorie est souvent ignoré.

Les pages qui précèdent ne donnent qu'une idée très imparfaite et très incomplète du Livre dont elles devraient être le compte rendu; elles ne seront cependant pas inutiles, si elles inspirent à quelques-uns le désir de lire Laguerre. Peu de lectures sont à la fois aussi attrayantes et aussi profitables; on y trouve de tout : des remarques ingénieuses et des démonstrations élégantes dont un professeur peut orner son Cours, des méthodes de recherche qui paraissent pouvoir être utilement imitées, des aperçus profonds où chacun trouve à réfléchir et d'où se dégageront peut-être encore d'importantes découvertes.

Il ne nous reste qu'à exprimer le vœu de voir le second Volume, qui doit renfermer les Mémoires de Géométrie, suivre de près le premier; on est certain d'avance que l'ordonnance et l'exécution matérielle en seront aussi parfaites; peut-être même les fautes d'impression pourront-elles être moins nombreuses. L'excellent éditeur de Laguerre trouvera peut-être que cette dernière remarque est trop sévère; mais n'est-ce pas lui qui, par la perfection typographique habituelle de ses publications, a le plus contribué à nous rendre exigeants en cette matière?

Émile Borel.

([1]) *Voir*, par exemple, le Livre bien connu de M. Klein sur l'Icosaèdre. Le Mémoire dont nous parlons y est signalé, page 36.

KLEIN (F.) und SOMMERFIELD (A.). — Ueber die Theorie des Kreisels. Heft II : *Durchführung der Theorie im Falle des Schweeren symmetrischen Kreisels*. 1 vol. in-8°; 197-512 p. Leipzig, Teubner, 1898.

Nous avons essayé, à propos du premier fascicule de cette *Théorie de la toupie*, de caractériser le but des auteurs : faire l'étude complète d'un problème particulier, et grouper autour de cette étude, sans craindre de remonter aux principes, les connaissances de Géométrie, de Mécanique et d'Analyse qu'elle implique. Ainsi le premier fascicule contenait la théorie cinématique du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, en particulier tout ce qui concerne l'introduction des quatre variables complexes α, β, γ, δ, dépendant de quatre variables réelles A, B, C, D et liées par la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ qui permettent de représenter, de la façon la plus simple, une rotation autour d'un point, et, à ce propos, une théorie élémentaire des quaternions, puis un exposé lumineux de la mise en équation des problèmes de la Mécanique, l'application au problème de la toupie (mouvement d'un corps solide de révolution pesant autour d'un point fixe situé sur l'axe), et l'étude approfondie du cas de la précession régulière. Le second fascicule, outre l'étude détaillée du problème de la toupie, des divers cas possibles du mouvement, mis en pleine lumière par une double discussion géométrique et analytique, avec des figures et des formules qui permettent de se représenter le mouvement et d'en déterminer numériquement les éléments, contient une belle et philosophique étude de la question *de la stabilité du mouvement* et une instructive introduction à la théorie des fonctions elliptiques. Comme dans le premier fascicule, le lecteur rencontrera çà et là, parfois sans s'y attendre, des vues ingénieuses ou profondes.

Le fascicule s'ouvre par une étude géométrique ou plutôt intuitive du mouvement de la toupie, faite sans s'attacher à la rigueur, fondée sur le sentiment de la continuité, et destinée à orienter le lecteur dans la distinction des divers cas possibles. On établit ensuite les formules classiques qui donnent, sous forme d'intégrales elliptiques, en prenant pour variable $u = \cos\theta$, d'une part le temps, d'autre part les deux autres angles d'Euler φ et ψ. Ces formules,

obtenues en partant des propriétés géométriques du vecteur d'impulsion (axe du couple des quantités de mouvement) qu'expriment les intégrales premières du problème, permettent d'établir le caractère périodique du mouvement et conduisent à des expressions simples et symétriques des quantités $\log\alpha$, $\log\beta$, $\log\gamma$, $\log\delta$ qui seront, à la fin du Volume, transformées en formules définitives, d'une parfaite élégance. Les expressions de t, φ, ψ en fonction de u permettent d'établir la possibilité d'un même mouvement pour des toupies différentes, et, en particulier, le droit que l'on a de se borner, sans diminuer la généralité, à l'étude d'un corps dont les trois moments d'inertie sont égaux, ou, si l'on veut, d'une *toupie sphérique*. C'est là un des nombreux résultats obtenus par M. Darboux dans la théorie qu'on lui doit des mouvements à la Poinsot; MM. Klein et Sommerfeldt établissent en outre quelques propriétés essentielles de la polhodie et de l'herpolhodie. Les différents cas possibles du mouvement de la toupie sphérique sont ensuite distingués analytiquement. Le polynome (en u) du troisième degré U dont la racine carrée figure dans les intégrales elliptiques contient, en fait de constantes, le moment d'inertie A, la distance P du centre de gravité au point fixe, les composantes N et n du vecteur d'impulsion suivant l'axe du corps et la verticale, enfin la constante des forces vives, que l'on élimine en mettant en évidence une racine e de ce polynome, comprise entre -1 et $+1$, et que l'on suppose être la valeur de u à l'origine des temps. Le polynome U admet une seconde racine réelle e' comprise aussi entre -1 et $+1$; la troisième racine e'' est en dehors de cet intervalle.

La distinction des cas se fait en regardant les constantes e, A, P, N comme fixes et la constante n comme pouvant prendre toutes les valeurs possibles : on est amené à distinguer la *toupie forte* (starker Kreisel) et la *toupie faible* (schwacher Kreisel); dans le premier cas, la seconde racine e' peut prendre (pour deux valeurs de n) toutes les valeurs comprises entre -1 et 1; dans le second cas la racine e' doit rester comprise entre 1 et $-e+\frac{N^2}{2AP}$. Les auteurs montrent aussi comment on peut, au moyen des Tables de Legendre, effectuer les calculs numériques : ce sont les notations mêmes de Legendre, bien appropriées à ce problème particulier, qu'ils ont adoptées. Un intéressant paragraphe con-

tient en outre diverses formules approchées qui, dans les cas les plus importants dans la pratique, peuvent remplacer les formules exactes. La question du calcul numérique sera d'ailleurs reprise à la fin du Volume et résolue de la façon la plus satisfaisante (jusqu'à l'évaluation de l'erreur), au moyen des séries $\mathfrak{S}$.

Les auteurs vont maintenant s'occuper de cas particuliers importants, qu'ils traiteront avec tous les détails nécessaires, pour parvenir à élucider la difficile question de la stabilité du mouvement. C'est, tout d'abord, le cas de la précession régulière ($e = e'$) et la perturbation qu'apporte alors dans le mouvement une petite percussion; ce cas leur donne l'occasion de donner en passant, au lecteur, quelques indications essentielles sur les solutions singulières des équations différentielles; mais la conclusion la plus importante de cette étude est celle-ci : suivant la définition que l'on donne de la stabilité du mouvement, le mouvement de précession régulière doit être regardé comme stable ou instable, et comme ayant, suivant les cas, un plus ou moins haut degré de stabilité. Les idées qu'ils développeront plus tard, en toute généralité, se trouvent nettement élucidées sur ce cas particulier. Ils traitent ensuite du mouvement de précession pseudo-régulière, obtenu en imprimant à la toupie une rotation rapide autour d'un axe qui diffère peu de l'axe de figure de la toupie. L'étude est faite de manière à bien éclaircir le caractère paradoxal de ce mouvement et à bien montrer pourquoi l'expérience seule ne permet pas de le distinguer de la précession régulière. Enfin ils s'occupent du mouvement de la toupie droite (aufrechter Kreisel), c'est-à-dire du mouvement de rotation de la toupie autour de la verticale avec laquelle l'axe de figure est supposé coïncider. Ici encore l'étude est faite en vue de la question de stabilité : le mouvement de la toupie droite est stable, s'il s'agit d'une toupie forte, instable s'il s'agit d'une toupie faible. Les auteurs vont maintenant discuter en général la notion de stabilité du mouvement.

D'après E.-J. Routh (*On the stability of a given state of motion;* London, 1877), le mouvement d'un système est dit *stable* si, par suite d'une percussion arbitraire mais petite, la différence, à chaque instant, entre les coordonnées du système dans le mouvement altéré et dans le mouvement non altéré reste petite. Pour préciser, il convient d'abord de dire que la différence doit être

aussi petite qu'on le veut, pourvu que la percussion soit aussi petite qu'on le veut. Au moins c'est de cette façon que l'on doit entendre la définition précédente si l'on veut parler de la stabilité théorique; s'il s'agit d'une stabilité pratique, on devra définir ce que l'on entend par *petit* dans le problème réel dont on s'occupe. Il convient de remarquer encore que le mot *coordonnées du système* est vague, et que pour tel système de coordonnées, la différence des coordonnées pourra rester petite, et ne pas l'être pour d'autres : on peut préciser en convenant de dire que la distance de deux positions d'un même point dans les deux mouvements doit rester petite, si le mouvement est stable. Si l'on adoptait la définition de Routh, ainsi précisée, tous les mouvements de la toupie devraient être regardés comme instables; il en serait de même, évidemment, du mouvement rectiligne et uniforme d'un point matériel qui n'est soumis à aucune force. La définition est trop étroite.

On peut être tenté de la modifier ainsi : dans un intervalle de temps donné $t < T$, les distances entre les positions d'un même point dans le mouvement troublé et dans le mouvement non troublé doivent rester inférieures à une certaine limite. Alors la définition devient trop large, car le mouvement de la toupie droite, dans le cas de la toupie faible, devrait être regardé comme stable. Finalement les auteurs s'arrêtent à la définition suivante : le mouvement est dit *stable,* quand le mouvement altéré tend vers une certaine limite lorsque la percussion tend vers zéro, d'une façon quelconque, et que cette limite coïncide avec le mouvement non altéré. Il sera dit *absolument stable,* pour une percussion qui ne modifie pas la force vive du système, si les conditions de la définition donnée en premier lieu sont vérifiées. En outre la stabilité sera dite *totale* si elle a lieu pour n'importe quelles percussions, ou partielle si elle n'a lieu que pour certaines percussions. Deux paragraphes sont consacrés l'un à l'extension au cas du mouvement au criterium de Lagrange et Dirichlet relatif à la stabilité de l'équilibre, l'autre à la méthode des petites oscillations.

On trouvera ensuite des vues intéressantes sur le problème du mouvement d'un corps solide pesant autour d'un point fixe, dans le cas général. C'est pour M. Klein l'occasion de dire que, dans l'étude mathématique d'un problème de Mécanique, on doit

chercher une représentation géométrique claire du mouvement du système considéré et la détermination des propriétés essentielles de ce mouvement, plutôt que l'expression analytique des coordonnées au moyen de fonctions connues. Pour ce qui est du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe, les résultats obtenus par Mme Kowalevski, MM. Liouville, Levi-Cività, Liebmann sont analysés ou cités. Les cas particuliers étudiés par M. Hesse et par M. Staude sont traités avec quelques détails.

Le dernier Chapitre du fascicule est consacré à l'étude du problème de la toupie au moyen des fonctions elliptiques : on y trouvera d'abord une véritable introduction à la théorie de ces fonctions, faite d'ailleurs sur les intégrales même auxquelles on a été amené par le problème de la toupie. C'est le radical $\sqrt{U}$ qui entre dans ces intégrales dont les auteurs expliqueront la représentation sur la surface de Riemann; ils expliquent comment, sur cette surface de Riemann, les angles φ et ψ deviennent infinis (comme des logarithmes), en quatre points; comment les logarithmes des paramètres α, β, γ, δ sont des intégrales de troisième espèce; comment ces paramètres eux-mêmes sont des fonctions uniformes.

Ils feront ensuite la représentation conforme de la surface de Riemann sur le plan de la variable t, qui, lorsqu'elle est réelle, représente le temps, détermineront les zéros et les infinis des paramètres α, β, γ, δ, et parviendront ainsi finalement à l'expression explicite de ces paramètres, sous forme de quotients de fonctions ϑ multipliés par une exponentielle, avec la détermination précise de toutes les constantes; il leur sera dès lors facile d'obtenir tout ce qui concerne la détermination de la trajectoire d'un point de l'axe, de la polhodie et de l'herpolhodie, des courbes d'impulsion (lieux dans l'espace et dans le corps de l'extrémité de l'axe des quantités de mouvement). Une application numérique est traitée avec tous les détails désirables.

Les auteurs traitent ensuite, d'une façon analogue, le problème du mouvement d'un corps solide quelconque, ayant un point fixe, et sans forces extérieures. Citons les expressions en fonction du temps t auxquelles ils parviennent pour les paramètres α, β, γ, δ;

on a

$$\alpha = \sqrt{M}\, e^{ilt} \frac{\Theta(t - 2i\omega' + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t - i\omega')}},$$

$$\beta = i\sqrt{M}\, e^{ilt} e^{\frac{i\pi}{2\omega}(t - i\omega' + is)} \frac{\Theta(t + is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}},$$

$$\gamma = i\sqrt{M}\, e^{-ilt} e^{-\frac{2\omega}{i\pi}(t + i\omega' - is)} \frac{\Theta(t - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}},$$

$$\delta = \sqrt{M}\, e^{-ilt} \frac{\Theta(t + 2i\omega' - is)}{\sqrt{\Theta(t - i\omega')\,\Theta(t + i\omega')}};$$

la constante M est déterminée par la formule

$$M = \frac{\Theta(i\omega' - is)\,\Theta(i\omega' + is)}{\Theta(2i\omega' - 2is)\,\Theta(2i\omega')}.$$

L'axe des z est supposé coïncider avec l'axe G du couple des quantités de mouvement; en désignant par A, B, C les moments d'inertie, par $2h$ la force vive et en posant pour abréger

$$\varepsilon^2 = \frac{(2hA - G^2)C}{(A - C)G^2}, \qquad \varepsilon'^2 = \frac{(2hB - G^2)C}{(B - C)G^2},$$

$$V = \frac{(A - C)(B - C)}{AB}\,\frac{G^2}{C^2}(\varepsilon^2 - v^2)(v^2 - \varepsilon'^2),$$

en sorte que l'on ait $t = \int \frac{dv}{\sqrt{V}}$, les constantes ω, ω', s, qui figurent dans les expressions de α, β, γ, δ, sont données par les formules

$$\omega = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon'} \frac{dv}{\sqrt{V}}, \qquad 2i\omega' = \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{V}} + \int_{-\infty}^{\varepsilon} \frac{dv}{\sqrt{V}}, \qquad is = \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dv}{\sqrt{V}};$$

la fonction $\Theta(t) = \mathfrak{I}(t, 2\omega, 4i\omega')$ est définie par le développement trigonométrique

$$\Theta(t) = e^{-\frac{2\omega\pi}{i\omega'}} \sin\frac{\pi t}{2\omega} - e^{-\frac{18\omega\pi}{4\omega'}} \sin\frac{3\pi t}{2\omega} + \ldots;$$

enfin la constante l est donnée par la formule

$$il = \frac{iG}{2l} + \frac{\Theta'(2i\omega')}{\Theta(2i\omega')} + \frac{1}{2}\left[\frac{\Theta'(i\omega' - is)}{\Theta(i\omega' - is)} - \frac{\Theta'(i\omega' + is)}{\Theta(i\omega' + is)}\right].$$

Les expressions de α, β, γ, δ conduisent immédiatement aux expressions des neuf cosinus en fonction uniforme de t.

Ces diverses formules permettent de faire d'une façon très simple l'étude de deux mouvements à la Poinsot conjugués, c'est-à-dire des mouvements de deux corps solides (sans force extérieure) dont les vitesses angulaires de rotation sont à chaque instant égales et opposées, comme aussi d'établir le théorème de Jacobi sur la représentation du mouvement d'un corps de révolution pesant autour d'un point fixe, par la composition de mouvements de corps solides sans forces extérieures, théorème dont M. Darboux a donné une démonstration très élégante.

Dans un dernier paragraphe, le problème de la toupie est repris à un autre point de vue. Les équations de Lagrange sont formées pour les paramètres α, β, γ, δ. Ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left[\frac{2P}{M}u(t) - \frac{2h - P}{M}\right]\alpha,$$
$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \left[\frac{2P}{M}u(t) - \frac{2h - P}{M}\right]\beta,$$

où M est la masse du corps, et où $u(t)$ est une fonction doublement périodique de t définie par les relations

$$t = \int_e^u \frac{du}{\sqrt{U}},$$

$$U = \frac{4}{M^2}\{2Mh(1-u^2) - [u^2 + N^2 + 2nNu - MPu(1-u^2)]^2\};$$

e est une racine de l'équation $U = 0$; les autres racines sont e', e''. Les équations de Lagrange pour les paramètres α, β, γ, δ appartiennent ainsi à cette classe d'équations de Lamé, approfondies par M. Hermite, qui admettent des intégrales uniformes; elles s'intègrent au moyen de fonctions doublement périodiques de seconde espèce et du premier degré. On obtient, de cette façon, une seconde solution, très rapide et élégante, du problème de la toupie, et cette solution même met en évidence cette intéressante propriété du mouvement de la toupie de pouvoir être identifié avec le mouvement du pendule sphérique dans l'espace à quatre dimensions. J. T.

MÉLANGES.

SUR LES COURBES INTÉGRALES;

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS.

La détermination des courbes intégrales d'une équation du premier ordre qui sont situées sur une surface donnée conduit évidemment à l'intégration d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Si l'on cherche à traiter le problème en partant de l'intégrale complète, on ne retrouve pas immédiatement ce résultat et l'on est conduit, en interprétant convenablement les calculs, à une propriété des courbes intégrales.

Soit

$$V(x, y, z, a, b) = 0, \tag{1}$$

l'intégrale complète. A chaque surface intégrale S correspond une relation entre a et b ou, si l'on veut, une courbe s située dans le plan des ab ou sur une surface fixe pour laquelle a, b seraient des coordonnées curvilignes.

Désignons par S_M l'intégrale formée par les caractéristiques issues d'un point M et par s_M la courbe correspondante.

Ceci posé, soit une surface σ donnée par

$$x = f(u, v), \qquad y = \varphi(u, v), \qquad z = \psi(u, v), \tag{2}$$

et désignons par

$$W(u, v, a, b) \tag{3}$$

ce que devient V quand on y remplace x, y, z au moyen des formules (2).

Une courbe intégrale est donnée par

$$V = 0, \qquad \delta V = 0, \qquad \delta^2 V = 0.$$

En exprimant qu'elle est sur σ on voit que l'on est conduit à

dire que les trois équations

$$(4) \qquad W = 0, \qquad \delta W = 0, \qquad \delta^2 W = 0$$

ont une solution commune en u et v. L'élimination de u et v conduira à une équation

$$(5) \qquad F\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}\right) = 0,$$

qui est du second ordre.

Ce résultat paradoxal s'explique immédiatement ; en effet, l'équation (5) s'obtient en éliminant u et v entre l'équation

$$(6) \qquad W = 0$$

et ses deux premières dérivées prises comme si u et v étaient des constantes. Elle admet donc comme solutions toutes les fonctions b définies par cette équation (6), dans laquelle on considère u et v comme des constantes arbitraires. L'équation (6) est donc l'intégrale générale de (5).

Pour une telle intégrale, les valeurs de u et v qui constituent la solution commune aux équations (4) sont des constantes : donc la courbe intégrale se réduit à un point M de la surface σ. La fonction b définit les caractéristiques issues d'un même point de σ. Nous pouvons donc dire : *L'intégrale générale de* (5) *est donnée par les courbes* s_M *relatives aux différents points de* σ.

Puisque les intégrales générales de (5) ne nous fournissent que des courbes intégrales réduites à des points, les véritables courbes intégrales situées sur σ ne pourront être données que par des intégrales singulières de (5).

Comme tout élément du second ordre $\left(a, b, \frac{db}{da}, \frac{d^2 b}{da^2}\right)$ appartenant à (5) appartient à une de ses intégrales générales, on peut dire que toute intégrale singulière de (5) a, en chacun de ses points, un contact du second ordre avec une intégrale générale de cette équation.

Soit s une telle courbe, elle définit une courbe intégrale située sur σ et chaque valeur de a en donne un point M_1 dont les coordonnées u, v sont fournies par les équations (4). L'intégrale s_M qui a un contact du second ordre avec s au point a est relative à

un point M dont les coordonnées u, v sont fournies ainsi par les équations (4). Dans les deux cas les équations (4) sont les mêmes, car les valeurs de a, b, $\frac{db}{da}$, $\frac{d^2b}{da^2}$ sont les mêmes pour s et s_M : donc M_1 et M sont confondus.

En outre, ces résultats sont indépendants de la surface σ; ils s'appliquent par conséquent à toute courbe intégrale, de sorte que :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit une courbe intégrale est que, le point M *décrivant cette courbe, la courbe* s_M *ait constamment un contact du second ordre avec son enveloppe.*

Si l'on se sert des propriétés bien connues des surfaces intégrales, on peut énoncer le résultat précédent sous cette nouvelle forme :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe soit une courbe intégrale est que, le point M *décrivant cette courbe, la surface* S_M *ait constamment un contact du second ordre avec son enveloppe.*

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXII; 1898. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages.

ANDOYER (H.). — Leçons élémentaires sur la théorie des formes et ses applications géométriques 261-263
BACHMANN (P.). — Zahlentheorie 201-204
BOREL (E.). — Leçons sur la théorie des fonctions 242-250
BRAHY (E.). — Exercices méthodiques de Calcul intégral 112-114
BROCARD (H.). — Notes de bibliographie des courbes géométriques ... 165-167
BURALI-FORTI (C.). — Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann 231-238
CANTOR (MORITZ). — Vorlesungen über Geschichte der Mathematik ... 197-200
CAYLEZ (A.). — Collected Mathematical Papers 23
CAYLEY (A.). — Collected Mathematical Papers 169
CLAUSIUS (R.). — Théorie mécanique de la chaleur 250-251
CZUBER (E.). — Vorlesungen über Differential und Integral Rechnung. Erster Band 168-169
CZUBER (E.). — Vorlesungen über Differential und Integral Rechnung. Zweiter Band 298-300
DARBOUX (GASTON). — Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal 132-158
DRAKE-ROE (E.). — Die Entwickelung der Sylvester'schen Determinante nach Normal-Formen 303-304
FRICKE (R.) und KLEIN (F.). — Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen 238-242
FRISCHAUF (J.). — Vorlesungen über Kreis-und Kugel-Functionen-Reihen 6-7
GALOIS (E.). — Œuvres mathématiques publiées sous les auspices de la Société mathématique de France 5-6

Pages.

GAMBORG (V.). — Logarithmetabel indeholdende logarithmer og antilogarithmer. Logarithmene til de trigonometrische funktioner..... 17
GOURSAT (E.). — Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes..... 269-294
HOLZMÜLLER (G.). — Die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung..... 300-303
JANUSCHKE (H.). — Das Princip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre..... 7-9
KIEPERT (L.). — Grundriss der Differential-und Integral-Rechnung.... 114
KLEIN (F.). — Sur l'état de la publication des Œuvres de Gauss..... 204-210
KLEIN. — Conférences sur les Mathématiques..... 229
KLEIN (F.). — The mathematical theory of the top..... 33
KLEIN (F.) und SOMMERFIELD (A.). — Ueber die Theorie des Kreisels.. 33-36
KLEIN (F.) und SOMMERFIELD (A.). — Ueber die Theorie des Kreisels.. 311-317
LAGUERRE. — Œuvres de Laguerre..... 304-310
LAISANT (C.-A.). — La Mathématique..... 88-94
LAMB (H.). — An elementary course of infinitesimal calculus..... 9
LEJEUNE-DIRICHLET (G.). — Lejeune-Dirichlet's Werke..... 10
LÉVY (L.). — Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec Tables numériques et applications..... 116-120
LÉVY (MAURICE). — Leçons sur la théorie des marées..... 210-220
LILIENTHAL (R. v.). — Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenschaaren..... 129-130
LORENZ (L.). — Œuvres scientifiques..... 167
LOVE (A.). — Theoretical mechanics an introductory treatise on the principles of dynamics mith applications and numerous examples... 17-21
MADDISON (J.). — On singular solutions of differential equations of the first order in two variables and the geometrical properties of certain invariants and covariants of their complete primitives..... 114-116
MÉRAY (CH.). — Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques..... 264-269
NEDELEC. — Le calcul vectoriel et ses applications en Géométrie et en Mécanique..... 230-231
Œuvres complètes de Christian Huygens..... 65-77
PASCAL (E.). — Repertorio di Matematiche superiori..... 77-78
PETERSEN. — Vorlesungen über Functionentheorie..... 294-297
PICARD et SIMARD. — Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes..... 23-32
RIEMANN. — Œuvres mathématiques..... 161-165
ROUSE-BALL (W.-W.). — Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes..... 120-122
SCHELL (F.). — Allgemeine Theorie der Curven doppeltter Krümmung in rein geometrischer Darstellung zur Einfürhrung in das Studium der Curventheorie..... 181
SCHIAPARELLI (GIOVANNI). — Origine del sistema planetario eliocentrico presso i Greci..... 274-278
SCHLESINGER (L.). — Handbuch der Theorie der linearen differential Gleichungen..... 78-88
SCHROTER (F.). — Jacob Steiner's Vorlesungen uber synthetische Geometrie..... 169-171

Pages.
SMITH (W.-B.). — Infinitesimal Analysis..... 303
TANNERY (J.) et MOLK (J.). — Éléments de la théorie des fonctions elliptiques..... 182-195
VILLIÉ. — Compositions d'Analyse, Cinématique, Mécanique et Astronomie, données depuis 1889 à la Sorbonne pour la Licence ès Sciences. 21-22
WEBER (H.). — Lehrbuch der Algebra..... 182
WEBER (H.). — Lehrbuch der Algebra..... 293
WEBER (H.). — Traité d'Algèbre supérieure..... 293
WITEHEAD (A.). — A treatise on universal Algebra with applications.. 97-112
WOLFANGI BOLYAI DE BOLYA tentamen..... 131-132

MÉLANGES.

BOREL (ÉMILE). — Sur la méthode d'approximation de Laguerre..... 11-16
BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE..... 196, 260, 292
DELASSUS (ÉTIENNE). — Sur les mouvements relatifs de trois plans glissant les uns sur les autres..... 251-259
DELASSUS (ÉTIENNE). — Sur les courbes intégrales..... 318
DEMOULIN (ALPHONSE). — Sur la transformation de M. Lie et les surfaces enveloppes des sphères..... 174-177
DUPORCQ (E.). — Sur la théorie des abaques à alignements..... 287-291
FONDATION BENEKE..... 173-174
LEBESGUE. — Sur l'approximation des fonctions..... 278-287
LIPSCHITZ (R.). — Solution complète d'une question proposée par Fermat..... 123-128
OCAGNE (MAURICE D'). — Sur les questions de Mathématiques pures que soulève l'étude de la Nomographie..... 177-180
PICARD (ÉMILE). — Remarques sur les groupes de transformations des équations linéaires..... 159-160
SAINT-GERMAIN (A. DE). — Note sur le pendule sphérique..... 95-96
SINTSOF (D.). — Théorie des connexes dans l'espace..... 221-228
TZITZÉICA (C.). — Sur les systèmes cycliques..... 172
VACCARO (ANTONINO). — Sur l'intégration d'une classe d'équations aux dérivées partielles du quatrième ordre..... 37-64

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXII.

25401 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
MOLK, POKROVSKY, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XXII. — ANNÉE 1898.

(TOME XXXIII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, PUBLIÉES, SOUS LES AUSPICES DU MINISTRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE, PAR UN COMITÉ DE RÉDACTION COMPOSÉ DE MM. LES MAÎTRES DE CONFÉRENCES DE L'ÉCOLE.

Troisième série, t. XIII, 1896 [1].

Stouff (*X.*). — Sur les rapports entre la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre et la théorie des surfaces. (9-40).

L'auteur se propose de généraliser les recherches de M. Schwarz relatives aux surfaces infiniment voisines des surfaces minima. Mais, tandis que M. Schwarz a surtout en vue l'étude de la variation du second ordre quand on compare une partie de surface minima aux surfaces voisines, soit en laissant invariable la limite de cette partie, soit en la déformant d'une manière arbitraire, les considérations exposées par M. Stouff se rapprochent davantage de la théorie des caractéristiques des équations du second ordre, telle qu'elle a été présentée par M. Darboux.

La question traitée par M. Stouff constitue l'extension du problème de Plateau aux équations du second ordre les plus générales.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point d'une surface S satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0. \tag{1}$$

[1] Voir *Bulletin*, XXI, p. 187.

et soit une courbe dépendant d'un paramètre λ,

$$(2) \qquad x = f(z, \lambda), \qquad y = g(z, \lambda).$$

On considère deux positions C et C′ de la courbe correspondant aux valeurs λ et $\lambda + \Delta\lambda$ du paramètre, et un point M sur la courbe C. Il s'agit de développer en série, suivant les puissances croissantes de $\Delta\lambda$, les valeurs des dérivées partielles de z par rapport à x et y au point M de façon que la surface S contienne les deux courbes voisines C et C′. La première partie du Mémoire est consacrée à l'étude de ces séries, dont les premiers termes surtout présentent de l'intérêt et sont susceptibles d'interprétations géométriques.

Des calculs analogues à ceux que l'auteur développe dans le cas d'une courbe dépendant d'un seul paramètre pourraient être appliqués à une courbe mobile dépendant de paramètres en nombre quelconque. Mais il est préférable d'envisager le problème d'un autre point de vue et de se donner une famille de courbes par deux équations différentielles d'ordre quelconque. Une question dont la réponse est immédiate lorsque les équations de la courbe mobile se présentent sous la forme (2) devient au contraire assez ardue quand elle est représentée par des équations différentielles. A quelle condition la courbe engendre-t-elle une surface satisfaisant à la relation (1)? M. Stouff s'applique à chercher un criterium permettant de décider si une équation aux dérivées partielles admet comme solution des surfaces susceptibles d'être engendrées par des courbes vérifiant deux équations différentielles ordinaires et combien d'infinités de surfaces répondent à la question.

Le problème peut enfin être posé d'une troisième manière. Si l'on sait intégrer l'équation (1), on en tirera une valeur de z contenant deux fonctions arbitraires; il s'agit de déterminer ces deux fonctions arbitraires de telle sorte que la surface passe par deux courbes données sous la forme (2). Cette question se rattache à la recherche des conditions pour qu'une équation $F(x, y) = 0$ entraîne une autre équation $G = 0$, recherche que permet d'effectuer la série de Burmann, étendue par Laplace au cas de deux variables, et servant à développer une fonction suivant les puissances d'une autre fonction. En suivant cette voie, M. Stouff parvient à une formule d'élimination qui lui fournit le moyen de résoudre le problème proposé dans le cas des surfaces minima, en partant des expressions intégrales bien connues des coordonnées d'un point de la surface

$$x = \xi - \frac{1}{2}\int (1 - u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du + \frac{1}{2}\int (1 - u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$y = \eta + \frac{i}{2}\int (1 + u^2)\,\mathcal{F}(u)\,du - \frac{i}{2}\int (1 + u_1^2)\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1,$$

$$z = \zeta + \int u\,\mathcal{F}(u)\,du + \int u_1\,\mathcal{F}_1(u_1)\,du_1.$$

On obtient des formules particulièrement élégantes pour la détermination des fonctions $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_1$ en supposant que les deux courbes limites C et C′ sont planes et se coupent à angle droit.

Minkowski. — Généralisation de la théorie des fractions continues. (41-60).

Dans la première Partie de son travail, l'auteur s'occupe de l'approximation avec laquelle on peut évaluer une grandeur réelle unique à l'aide de fractions rationnelles. Il expose diverses généralisations de la théorie des fractions continues, dont l'idée lui a été suggérée par les recherches de M. Hermite sur le même sujet (*Journal de Crelle*, t. 40, 41 et 47).

Il passe ensuite à l'étude des *corps* de nombres réels algébriques du troisième degré dont le discriminant est positif. Les principes qu'il établit dans la seconde Partie de son Mémoire lui fournissent un procédé pour obtenir toutes les unités d'un pareil corps. L'algorithme qu'il expose, appliqué à la recherche d'un corps cubique à discriminant positif, est analogue à la résolution de l'équation de Pell, à l'aide de la formation d'une période de formes quadratiques binaires indéfinies réduites d'après la méthode de Gauss.

Mangoldt (*von*). — Sur le Mémoire de Riemann relatif au nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée. (61-78).

Riemann a énoncé et, dans une certaine mesure, démontré ces deux propositions :

« 1° Entre o et T, il existe environ $\left(\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}\right)$ racines réelles de l'équation $\xi(\alpha)=0$;

» 2° La série

$$\sum^{\alpha}\left[\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}+\alpha i}\right)+\mathrm{Li}\left(x^{\frac{1}{2}-\alpha i}\right)\right],$$

lorsque ses termes sont rangés suivant les grandeurs croissantes de α, converge vers la même valeur limite que

$$\frac{1}{2\pi i\log x}\int_{a-bi}^{a+bi}\frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{s}\,\frac{\log\xi\left[\left(s-\frac{1}{2}\right)i\right]}{\xi(0)}\right\}x^{s}\,ds,$$

lorsque b croît indéfiniment. »

Mais il convient lui-même que ces propositions ont besoin d'une démonstration plus rigoureuse.

S'appuyant sur les résultats obtenus par M. Hadamard [*Étude sur les propriétés des fonctions entières*, etc. (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX; 1893)], M. von Mangoldt fait voir comment on peut démontrer complètement le deuxième des résultats de Riemann et justifier le premier, au moins en admettant que le nombre des racines dont les parties réelles sont comprises entre o et T est représenté, aux grandeurs d'ordre inférieur près, par l'expression ci-dessus.

L'analyse de M. von Mangoldt conduit encore à d'autres résultats. Si l'on parvenait à démontrer que les racines de l'équation $\xi(t)=0$ sont toutes réelles, ou même seulement que les parties imaginaires de ces racines sont comprises entre des limites plus étroites que $-\frac{1}{2}i$ et $+\frac{1}{2}i$, les développements exposés par l'auteur fourniraient à la théorie des nombres une série de lois asymptotiques. Ainsi la somme des logarithmes de tous les nombres premiers

de 1 à x serait égale à x lui-même pour de très grandes valeurs de x, proposition déjà énoncée par M. E. Cahen.

Borel. — Sur les fonctions de deux variables réelles. (79-94).

M. Borel étend aux fonctions de deux variables réelles un théorème qu'il a démontré dans sa thèse au sujet des fonctions d'une seule variable réelle. En voici l'énoncé :

« Toute fonction de deux variables réelles x et y ayant des dérivées partielles de tous les ordres à l'intérieur et sur le périmètre d'un carré défini par les inégalités

$$-1 \leq x \leq +1, \qquad -1 \leq y \leq +1,$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{aligned} f(x, y) = \sum_\alpha \sum_\beta & (A_{\alpha\beta} \cos \pi\beta y + B_{\alpha\beta} \sin \pi\beta y + C_{\alpha\beta} y^2) x^\alpha \\ & + (A'_{\alpha\beta} \cos \pi\beta y + B'_{\alpha\beta} \sin \pi\beta y + C'_{\alpha\beta} y^2) \cos \pi\alpha x \\ & + (A''_{\alpha\beta} \cos \pi\beta y + B''_{\alpha\beta} \sin \pi\beta y + C''_{\alpha\beta} y^2) \sin \pi\alpha x, \end{aligned}$$

les constantes $A_{\alpha\beta}, \ldots, C''_{\alpha\beta}$ étant telles que l'on ait pour toutes les valeurs de p et q

$$|\alpha^p \beta^q A_{\alpha\beta}| < m_{pq}, \qquad \ldots \qquad |\alpha^p \beta^q C''_{\alpha\beta}| < m_{pq},$$

les nombres m_{pq} ne dépendant pas de α ni de β. »

Ce développement présente cet intérêt que toutes les dérivées partielles de la fonction s'obtiennent par la dérivation terme à terme de la série.

Jamet. — Sur une équation aux dérivées partielles. (95-106).

Il s'agit de l'équation d'Euler et Poisson

$$(u - v) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} + a \frac{\partial \theta}{\partial u} - b \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

dans laquelle u, v sont les variables indépendantes, a, b deux constantes réelles.

M. Jamet se propose d'en trouver une intégrale qui, pour $u = u_0$, devienne égale à une fonction donnée V de v et, pour $v = v_0$, à une fonction donnée U de u. M. Picard a montré (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI) la possibilité de ce problème pour toute équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Mais la méthode suivie par l'éminent géomètre se prêtant mal au calcul pratique, il convient dans le cas en question d'employer une méthode spéciale.

On suppose que, dans le cercle (C) de centre u_0, U soit développable en série de Taylor

$$U = B_1 (u - u_0) + B_2 (u - u_0)^2 + \ldots$$

et que, dans le cercle (C') de centre v_0, V soit de même développable en série

$$V = V_1(v - v_0) + V_2(v - v_0)^2 + \ldots$$

On aura, d'après M. Jamet, une solution du problème en prenant

$$\theta = V + \int_{C'} \frac{(u-\alpha)^a (v-\alpha)^b}{(u_0-\alpha)^a (v_0-\alpha)^b} \varphi(\alpha)\, d\alpha - \int_{C} \frac{(u-\alpha)^a (v-\alpha)^b}{(u_0-\alpha)^a (v_0-\alpha)^b} \psi(\alpha)\, d\alpha,$$

à condition que

$$2\pi i \varphi(v) = -\frac{V_1}{a} + \frac{1.2}{a(a-1)} V_2(v - v_0) - \frac{1.2.3}{a(a-1)(a-2)} V_3(v - v_0)^2 + \ldots$$

et que $\psi(u)$ soit déterminé par une série analogue. Toutefois ces développements ne sont valables que si a et b ne sont ni l'un ni l'autre des entiers positifs.

M. Jamet fait voir comment la solution doit être modifiée dans ces cas exceptionnels.

La fin du travail est consacrée à une application géométrique.

L'auteur remarque que, si ξ, η, ζ sont trois solutions d'une même équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial v} = F(u, v),$$

on pourra déterminer trois fonctions x, y, z par les conditions

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \eta \frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \zeta \frac{\partial \eta}{\partial v} - \eta \frac{\partial \zeta}{\partial v},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \zeta \frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \xi \frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta \frac{\partial \xi}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \xi \frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta \frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \eta \frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi \frac{\partial \eta}{\partial v}.$$

On reconnait alors que, si x, y, z sont les coordonnées d'un point mobile sur une surface, celle-ci admet les paramètres u, v comme paramètres de ses lignes asymptotiques.

Si l'on prend

$$F(u, v) = \frac{m(m-1)}{(u-v)^2}$$

et qu'on fasse le changement de fonction

$$\xi = \theta (u - v)^m,$$

on aboutit à l'équation

$$(u - v) \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + m \frac{\partial \theta}{\partial u} - m \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

qui est un cas particulier de celle d'Euler et Poisson. On a donc, dans ce qui précède, le moyen de former en nombre illimité des intégrales de cette équation. Un cas particulier est à signaler; c'est celui où m est un entier positif : on trouve alors des surfaces algébriques. On a donc ainsi une catégorie de surfaces algébriques dont les lignes asymptotiques sont connues sans aucune intégration.

Fabry. — Sur les courbes unicursales. (107-114).

L'auteur retrouve par des calculs beaucoup plus simples les résultats obtenus par Clebsch (*Journal de Crelle*, t. 64) sur les points d'intersection d'une courbe unicursale d'ordre n avec une courbe d'ordre $n-3$. Appliqués au problème des courbes tangentes, les calculs de M. Fabry montrent facilement ce que deviennent les solutions qui disparaissent lorsqu'un ou plusieurs points doubles deviennent des points de rebroussement.

Haure. — Recherches sur les points de Weierstrass d'une courbe plane algébrique. (115-196).

Si l'on considère un point P d'une courbe algébrique plane et l'ensemble des fonctions rationnelles de x et y attachées à cette courbe, qui deviennent infinies en ce seul point, leurs ordres rangés par ordre de grandeur croissante reproduisent la série des nombres naturels, sauf un certain nombre de lacunes. Le nombre de ces lacunes est indépendant du point P et égal au genre p de la courbe. Telle est la propriété que Weierstrass prend pour définition du genre.

Les nombres dont l'absence donne lieu aux lacunes sont les *ordres manquants*. Si le point P est quelconque, ces ordres seront les nombres $1, 2, 3, \ldots, p$; mais en certains points particuliers A ils pourront être différents. Ces points A sont les *points de Weierstrass*.

M. Haure, poursuivant l'étude dont ces points ont été l'objet de la part de MM. Schottky, Nœther et Hurwitz, s'applique à déterminer les divers systèmes d'ordres manquants qui peuvent se rencontrer dans les courbes d'un genre déterminé, et aussi à définir des classes de courbes possédant un point de Weierstrass correspondant à un système donné d'ordres manquants. A ces recherches se rattache celle des fonctions rationnelles infinies en ce seul point et aussi des familles de groupes spéciaux que l'on peut en faire dériver.

Le Mémoire de M. Haure comprend cinq Chapitres.

Le premier est rempli par l'exposition des théorèmes de M. Nœther.

Le deuxième est consacré à la définition précise des points de Weierstrass et des familles des groupes qui en dérivent. Il se termine par la démonstration d'une proposition de Weierstrass qui est fondamentale pour cette théorie :

On peut trouver une infinité de systèmes de p intégrales de première espèce linéairement indépendantes, infiniment petites en A, *et dont les ordres infinitésimaux* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ *forment une suite toujours croissante. Les ordres manquants en un point quelconque* A *de* C *sont précisément les nombres* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p$ *relatifs à ce point. La suite des ordres manquants est unique.*

Au début du troisième Chapitre, l'auteur développe une méthode indiquée sommairement par M. Hurwitz pour former des tableaux d'ordres manquants; il établit ensuite, d'après M. Schottky, la relation qui existe entre deux fonctions convenablement choisies parmi toutes celles qui deviennent infinies en A.

L'étude de cette relation, ou plutôt de la courbe qu'elle représente, est poursuivie dans le quatrième Chapitre, qui se continue par la recherche des conditions que doit remplir cette courbe pour pouvoir servir à la définition d'une classe de courbes possédant un point de Weierstrass d'espèce déterminée. A ce Chapitre est joint le tableau des systèmes d'ordres manquants pour $p = 3, 4, 5, 6, 7$. L'auteur donne dans chaque cas la courbe qu'il prend pour définir la classe

avec les conditions qui la caractérisent et qui toutes portent sur ses points multiples.

Enfin le dernier Chapitre contient une application des théories qui précèdent à la définition des courbes gauches comme transformées point par point des courbes planes, avec quelques remarques préliminaires sur les courbes gauches déduites de groupes spéciaux quelconques.

Dupuy (Paul). — La vie d'Évariste Galois. (197-266).

Zantschewsky. — Le problème de Pfaff. (267-294).

Étant données $2n$ fonctions $X_1, \ldots, X_{2n}$ de $2n$ variables $x_1, \ldots, x_{2n}$, il s'agit de trouver des fonctions $f_1, \ldots, f_k, F_1, \ldots, F_k$, en nombre k le plus petit possible et satisfaisant à la relation

$$X_1\,dx_1 + \ldots + X_{2n}\,dx_{2n} = F_1\,df_1 + \ldots + F_k\,df_k.$$

La solution de ce problème, telle que la donne M. Zantschewsky, exige l'emploi de certaines notations symboliques.

L'expression

$$a_{m_1q_1}a_{m_2q_2}\ldots a_{m_\nu q_\nu}\Delta^{p_1\ldots p_{2\nu}}_{m_1q_1\ldots m_\nu q_\nu},$$

où $\Delta^{p_1\ldots p_{2\nu}}_{m_1q_1\ldots m_\nu q_\nu}$ désigne un mineur d'un déterminant quelconque Δ d'ordre n, sera désignée abréviativement par $(a_{mq})_1^\nu\,\Delta^{p_1\ldots p_{2\nu}}_{(mq)_1^\nu}$.

Formant ensuite la matrice

$$\left\|\begin{matrix} X_1 & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_{2n} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_{2n}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_{2n}} & \ldots \end{matrix}\right\|,$$

on représentera par $\Delta^{(k+1)}\rho_1\ldots\rho_k$ un déterminant formé avec les $\rho^{\text{ième}}, \ldots, \rho_k^{\text{ième}}$ ligne et avec les k premières colonnes de cette matrice, et l'on écrira pour abréger

$$\Sigma(a_{mq})_1^\nu\,\Delta^{k+1-2\nu}_{(mq)_1^\nu}\,\rho_1\ldots\rho_k,$$

au lieu de

$$\Sigma(a_{mq})_1^\nu\,\Delta^{k+1,\,k,\ldots,\,k+2-2\nu,\,k+1-2\nu}_{(mq)_1^\nu}\,\rho_1\ldots\rho_k$$

et

$$\Sigma(a_{mq})_1^\nu\,\Delta^{(k+1-2\nu)\,\alpha,\,\beta,\ldots}_{(mq)_1^\nu\,r,\,s,\ldots}\,\rho_1\ldots\rho_k,$$

au lieu de

$$\Sigma(a_{mq})_1^\nu\,\Delta^{(k+1-2\nu)\,\alpha,\,\beta,\ldots}_{(mq)_1^\nu\,r,\,s,\ldots}\,\rho_1\ldots\rho_k,$$

en indiquant ainsi non les numéros r, s, ... des lignes du déterminant $\Delta^{(k+1)}\rho_1\ldots\rho_k$ qui doivent être supprimées, mais les indices correspondant à ces lignes liés aux variables X et x.

Avec ces notations, voici, d'après l'auteur, la marche à suivre pour résoudre le problème de Pfaff.

On commence par calculer les fonctions de Pfaff composées à l'aide des quantités

$$a_{mq} = \frac{\partial X_m}{\partial x_q} - \frac{\partial X_q}{\partial x_m} \qquad (m, q = 1, 2, \ldots, 2n)$$

d'ordre 1, 2, 3, ... jusqu'à ce que l'on parvienne à un ordre $l+1$ pour lequel toutes les fonctions de cette espèce sont nulles. Si l'une quelconque des fonctions de Pfaff d'ordre l est différente de zéro, une des expressions

$$\Sigma (a_{mq})_1^l \Delta^{(l)}_{(mq)_1^l \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{2l}}$$

le sera aussi. On aura donc l fonctions $f_1, \ldots, f_l$ si l'expression

$$\Sigma (a_{mq})_1^l \Delta^{(l)}_{(mq)_1^l \alpha_1 \ldots \alpha_{2l-1}}$$

est différente de zéro pour l'une quelconque des combinaisons de $2l+1$ indices pris parmi les nombres 1, 2, ..., $2n$, et $l-1$ fonctions dans le cas contraire.

Après avoir ainsi trouvé le nombre k des fonctions f, on choisit une expression

$$\Sigma (a_{mq})_1^{k-1} \Delta^{(k)}_{(mq)_1^{k-1} 1 \ldots (2k-1)}$$

qui ne soit pas nulle, et l'on cherche une intégrale f_1 commune au système jacobien d'équations

$$\Sigma (a_{mq})_1^{k-1} \Delta^{(k)}_{(mq)_1^{k-1} 1 \ldots (2k-1) t} = 0 \qquad (t = 2k, 2k+1, \ldots, 2n),$$

intégrale qui satisfasse à l'inégalité

$$\Sigma (a_{mq})_1^{k-2} \Delta^{(k)}_{(mq)_1^{k-2} x 1 \ldots (2k-1)} \neq 0,$$

pour l'un quelconque des indices x égaux à 1, 2, ..., $2k-1$. Soit

$$\Sigma (a_{mq})_1^{k-2} \Delta^{(k)}_{(mq)_1^{k-2} 1 \ldots (2k-2)} \neq 0;$$

la fonction f_2 sera alors l'intégrale commune des équations

$$\Sigma (a_{mq})_1^{k-2} \Delta^{(k)}_{(mq)_1^{k-2} 1 \ldots (2k-2) t} = 0 \qquad (t = 2k-1, \ldots, 2n)$$

satisfaisant à l'une quelconque des inégalités

$$\Sigma (a_{mq})_1^{k-2} \Delta^{(k)}_{(mq)_1^{k-2} y 1 \ldots (2k-2)} \neq 0 \qquad (y = 1, 2, \ldots, 2k-2).$$

En continuant ainsi, on déterminera de proche en proche toutes les fonctions $f_1, \ldots, f_k$ dont la dernière sera une intégrale du système jacobien

$$\Delta^{(k+2)} 1 \ldots k t = 0 \qquad (t = k+1, \ldots, 2n)$$

satisfaisant à l'inégalité $\Delta^{(k+2)} 1 \ldots k \geqq 0$.

L'auteur applique cette méthode générale à des exemples où les calculs peuvent être menés jusqu'au bout.

Grévy. — Étude sur les équations fonctionnelles. (29) 338.

Dans un précédent Mémoire (*Ann. de l'École Normale*, 1894), M. A. Grévy avait étudié les solutions des équations fonctionnelles dans le voisinage d'un point limite à convergence régulière : il étend cette étude au cas de la convergence périodique.

Si l'on répète k fois la substitution $|z, \varphi(z)|$, on aboutit à une équation qu'on peut représenter par $z - \varphi_k(z) = 0$. Si x_0 est racine de cette équation, sans l'être d'aucune équation d'indice inférieur, on dit que x_0 appartient à l'indice k. Les quantités $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$, où $x_i = \varphi(x_{i-1})$, appartiennent toutes à l'indice k, et elles sont permutées circulairement par la substitution $|z, \varphi(z)|$; leur ensemble constitue un groupe circulaire de k racines.

Ce groupe est un groupe circulaire limite, si le module du produit

$$a = a_0 a_1 \ldots a_{k-1}$$

où $a_i = \varphi'(x_i)$, est plus petit que 1. Tout point x_i du groupe est un point limite à convergence régulière pour la substitution $|z, \varphi_k(z)|$. Si l'on entoure chaque point d'un cercle (C_i), la substitution $|z, \varphi(z)|$ mène d'un cercle au suivant, et dans chaque cercle, on a une suite de points qui convergent vers le centre.

Ces résultats sont dus à M. Kœnigs, qui en a déduit la solution de l'équation fonctionnelle

$$f(z_1) = af(z),$$

dans le cas où a est différent de zéro.

Après avoir traité la question dans le cas exceptionnel négligé par M. Kœnigs, M. Grévy, généralisant le problème, envisage l'équation fonctionnelle

$$p_0(z) f(z) + p_1(z) f(z_1) + \ldots + p_n(z) f(z_n) = 0,$$

relative à la substitution $|z, \varphi(z)|$, qui admet le groupe circulaire limite x_0, $x_1, \ldots, x_{n-1}$.

Il montre que cette équation a n solutions; chacune d'elles coïncide dans les domaines respectifs de $x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}$ avec une solution des équations

$$\begin{gathered}
P_0(z) f(z) + P_1(z) f(z_k) + \ldots + P_n(z) f(z_{nk}) = 0, \\
P_0(z_1) f_1(z_1) + P_1(z_1) f_1(z_{k+1}) + \ldots + P_n(z_1) f_1(z_{nk+1}) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_0(z_{k-1}) f_{k-1}(z_{k-1}) + \ldots + P_n(z_{k-1}) f_{k-1}(z_{nk+k-1}) = 0,
\end{gathered}$$

les fonctions dont l'ensemble forme une solution devant correspondre à une même racine de l'équation caractéristique commune à ces k relations.

En somme, tous les résultats que l'auteur avait trouvés pour la solution générale et pour les relations entre différentes solutions dans le cas de la convergence régulière subsistent pour la convergence périodique.

Les applications géométriques développées par M. Grévy sont de deux sortes : les premières se rapportent à la détermination d'une courbe définie par une équation fonctionnelle entre les abscisses et les ordonnées; c'est le problème analogue à celui de l'étude d'une courbe définie par une équation différentielle.

La seconde série d'applications a pour but la recherche des propriétés qui résultent, pour une courbe donnée, de la considération de la correspondance

entre points, correspondance qui se ramène à une relation fonctionnelle entre les paramètres définissant ces points.

Delassus. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. (339-365).

Une remarque très simple permet à M. Delassus d'étendre aux systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles la plupart des résultats qu'il avait obtenus précédemment (*Ann. de l'École Normale,* 1895) pour les équations linéaires, et d'en déduire d'intéressantes propositions sur la nature des singularités des intégrales analytiques de ces équations.

Si, dans deux équations linéaires, où les termes de l'ordre le plus élevé sont mis en évidence,

$$A_0 \frac{\partial^n z}{\partial x^n} + A_1 \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y} + \ldots + A_n \frac{\partial^n z}{\partial y^n} = F(z),$$

$$B_0 \frac{\partial^p z}{\partial x^p} + B_1 \frac{\partial^p z}{\partial x^{p-1} \partial y} + \ldots + B_p \frac{\partial^p z}{\partial y^p} = \Phi(z),$$

on prend toutes les dérivées d'ordre $p-1$ de la première et toutes celles d'ordre $n-1$ de la seconde, on a $n+p$ équations où l'auteur envisage comme inconnues les $n+p$ dérivées d'ordre $n+p-1$.

On voit immédiatement que le déterminant des inconnues est le résultant, sous la forme de Sylvester, des deux équations caractéristiques :

$$A_0 \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-1} \lambda + A_n = 0,$$

$$B_0 \lambda^p + B_1 \lambda^{p-1} + \ldots + B_{p-1} \lambda + B_p = 0.$$

C'est cette remarque qui sert de point de départ aux recherches de M. Delassus. Tous les auteurs qui, jusqu'ici, s'étaient occupés des systèmes d'équations aux dérivées partielles, avaient jugé avantageux de les ramener à des équations du premier ordre. Mais cette transformation, qui masque complètement les caractéristiques, n'a eu, dans un grand nombre de cas, d'autre résultat que de cacher d'importantes propriétés des intégrales où ces caractéristiques jouent le premier rôle.

On sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système d'équations aux dérivées partielles admette une intégrale générale ne dépendant que d'un nombre limité de constantes arbitraires, est que l'on puisse, au moyen des équations de ce système, exprimer toutes les dérivées de z d'un certain ordre au moyen des dérivées d'un ordre inférieur. M. Delassus dit qu'un pareil système est de *première espèce,* tous les autres étant de *seconde espèce.*

Il montre que des équations linéaires n'ayant en commun aucun système de caractéristiques sont incompatibles ou donnent naissance à un système de première espèce, et par suite leurs intégrales communes ne peuvent dépendre que d'un nombre limité de constantes arbitraires.

S'aidant d'un théorème de M. Picard, M. Delassus établit ensuite que tout système linéaire complètement intégrable de première espèce ne peut avoir que des intégrales analytiques.

Il suit de là que les intégrales d'un système linéaire complètement intégrable ne peuvent avoir que des lignes singulières essentielles fixes.

Des équations linéaires, n'ayant aucun système commun de caractéristiques

et qui sont compatibles, donnent naissance à un système de première espèce, dont les lignes singulières fixes ne peuvent être que : 1° les lignes singulières des coefficients de ces équations; 2° les lignes le long desquelles toutes les équations caractéristiques ont une solution commune, et, comme cas particulier, les caractéristiques isolées communes à toutes les équations données.

Passant ensuite aux systèmes linéaires complètement intégrables de seconde espèce, l'auteur montre qu'ils jouissent des propriétés qu'il a établies antérieurement pour les équations linéaires. Toutes les équations qui appartiennent à un système linéaire complètement intégrable de seconde espèce ont en commun des systèmes de caractéristiques : ce sont les *caractéristiques du système*.

Dans une région où toutes ses caractéristiques sont imaginaires, un système de seconde espèce ne peut avoir que des intégrales analytiques.

Dans une région où toutes les caractéristiques d'un système de seconde espèce sont réelles, les intégrales analytiques ne peuvent avoir comme lignes singulières mobiles que ces caractéristiques.

Dans la région où le système a toutes ses caractéristiques réelles, les intégrales analytiques ne peuvent avoir comme lignes singulières que : 1° les lignes singulières des coefficients des équations donnnées; 2° les lignes singulières relatives à l'équation qui fournit les caractéristiques du système; 3° les lignes le long desquelles toutes les équations caractéristiques ont une racine commune.

Dans la même région, les intégrales analytiques ne peuvent présenter que des points singuliers isolés fixes ou des points singuliers isolés mobiles sur les lignes singulières fixes. Une ligne singulière mobile ne peut brusquement cesser d'être ligne singulière pour une intégrale, sans être continuée par une autre ligne singulière, qu'en passant par un point singulier isolé fixe. Le contour du domaine à l'intérieur duquel une intégrale est analytique ne peut présenter de points anguleux dirigés vers l'intérieur à moins que ces points ne se trouvent sur les lignes singulières fixes ou coïncident avec des points singuliers isolés fixes.

La considération des lignes singulières fixes d'une équation linéaire conduit naturellement l'auteur à se poser la question suivante : L étant une ligne singulière fixe d'une équation linéaire $F = 0$, peut-il exister des intégrales de cette équation analytiques en tous les points d'un domaine traversé par L?

La solution complète de cette question paraît extrêmement difficile; mais M. Delassus en indique une transformation qui semble devoir y apporter une simplification considérable.

Dans la dernière partie de son travail, l'auteur indique, sur divers exemples, des singularités d'une nature telle qu'elles ne peuvent se rencontrer, en dehors des lignes singulières fixes, que le long des caractéristiques; puis, recourant aux résultats obtenus dans les premières parties, il arrive à une proposition très générale qui lui permet de découvrir une infinité de singularités de cette nature.

En terminant, il montre comment la seule considération des intégrales analytiques permet de séparer nettement les trois régions que conduit à distinguer l'étude approfondie des équations linéaires :

1° Dans la région où toutes les caractéristiques sont réelles, les intégrales analytiques ne peuvent avoir comme singularités mobiles que des singularités caractéristiques;

2° Dans la région où il n'y a que des caractéristiques imaginaires, les singularités mobiles sont toujours non caractéristiques et se présentent le long de lignes absolument arbitraires;

3° Dans la région où les caractéristiques réelles et imaginaires sont mélangées, les singularités peuvent être non caractéristiques le long des lignes arbitraires, mais peuvent aussi être caractéristiques.

Fabry. — Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement en série et l'impossibilité du prolongement analytique dans des cas très généraux. (367-399).

Si l'on développe suivant les puissances entières de $z-a$ une fonction analytique donnée de la variable complexe z, le cercle de convergence passe, en général, par un seul point singulier, le plus voisin du point a.

Si, au contraire, on se donne arbitrairement la série $\Sigma a_n z^n$, de façon toutefois que le cercle de convergence ne soit ni nul ni infini, la fonction représentée par cette série a au moins un point singulier sur le cercle de convergence, mais, en général, elle en a plusieurs, comme l'a montré M. Hadamard (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VIII).

M. Fabry généralise quelques-uns des résultats obtenus par M. Hadamard, et il en déduit de nouvelles méthodes particulières pour rechercher si un point du cercle de convergence est un point singulier.

Parmi les propositions auxquelles il parvient, il convient de signaler les deux suivantes :

1° A l'aide des coefficients de la série

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

dont le cercle de convergence a pour rayon 1, on forme l'expression

$$\varphi_m(t) = a_m + a_{m-1} t \frac{m+1}{p+1} + \ldots + a_{m-\nu} t^\nu \frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)}$$

$$a_{m-1} \frac{1}{t} \frac{p}{m} + \ldots + a_{m-\nu} \frac{1}{t^\nu} \frac{p(p+1)\ldots(p+\nu-1)}{m(m+1)\ldots(m+\nu-1)},$$

où p est un nombre entier variant avec m, de façon que $\frac{p}{mt}$ tende vers 1, et $\nu = \lambda m$, $0 < \lambda < t < 1$. Si $z=1$ n'est pas un point singulier de $f(z)$, la limite supérieure, pour $m=\infty$, de $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ est plus petite que 1; et si cette limite supérieure est 1, le point $z=1$ est singulier.

Réciproquement si, t restant fixe, p varie de façon que $m-p$ prenne toutes les valeurs entières, par exemple si p est compris entre $mt-1$ et mt, et si $z=1$ est un point singulier, $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ a pour limite supérieure 1; si cette limite supérieure est plus petite que 1, le point $z=1$ n'est pas singulier.

2° β_m étant un arc variable, soit q le nombre des changements de signe de la partie réelle a'_n de $a_n e^{-\beta_m i}$ lorsque n varie de $m-\lambda m$ à $m+\lambda m$. Si, pour une suite illimitée de valeurs de m, les quantités $\frac{1}{m} \mathrm{L}\,|a'_m|$ et $\frac{q}{m}$ tendent vers zéro, le point $z=1$ est singulier.

Dans bien des cas, les méthodes données par M. Fabry montrent que tous les

points du cercle de convergence sont singuliers, ce qui permet de former des séries, beaucoup plus générales que celles actuellement connues, qui ne peuvent pas se prolonger analytiquement au delà du cercle de convergence. Il semble d'après cela que le prolongement d'une série donnée *a priori* soit en général impossible, tandis qu'il sera généralement possible d'étendre au delà de son cercle de convergence une série provenant du développement d'une fonction analytique donnée.

Guichard. — Sur les surfaces minima non euclidiennes. (401-414).

On sait qu'on appelle surfaces minima non euclidiennes les surfaces qui admettent un réseau conjugué dont les tangentes touchent une quadrique fixe appelée *quadrique fondamentale.*

Rapportant à un tétraèdre conjugué la quadrique fondamentale

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0,$$

M. Guichard cherche à exprimer les coordonnées homogènes ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 d'un point C d'une surface minima de Cayley en fonction des paramètres u, v qui restent fixes quand on se déplace sur les lignes conjuguées en question.

Soient $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et $B(y_1, y_2, y_3, y_4)$ les points où les tangentes conjuguées en C touchent la quadrique fondamentale, $D(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ le pôle du plan CAB; le point D décrit la surface polaire réciproque de C, et cette surface est aussi une surface minima.

Pour représenter les diverses coordonnées x, y, ξ, η, l'auteur donne les formules très simples

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -x\frac{\partial \varphi}{\partial u} - e^{\varphi}\xi, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = -y\frac{\partial \varphi}{\partial u} + e^{-\varphi}\eta,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -x\frac{\partial \varphi}{\partial v} - e^{-\varphi}\eta, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -y\frac{\partial \varphi}{\partial v} - e^{\varphi}\xi,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = -e^{-\varphi}y, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial u} = e^{\varphi}x,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = e^{\varphi}x, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial v} = -e^{-\varphi}y,$$

avec la condition

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\,\partial v} = e^{-\varphi}\eta - e^{\varphi}\xi,$$

d'où l'on déduit par différentiation les deux équations que vérifient ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\,\partial v} = -e^{2\varphi}\xi,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial v^2} - 2\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \xi}{\partial v} = \eta.$$

Si l'on suppose que la quadrique fondamentale soit la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

les réseaux conjugués décrits par A et B sont orthogonaux. En désignant

par (x) et par (y) des surfaces dont les lignes de courbure admettent pour représentation sphérique les réseaux A et B, par (ξ), (η) des surfaces admettant des réseaux conjugués parallèles à celui des surfaces (C) et (D), l'auteur arrive aux propositions suivantes :

1° Après deux transformations de Laplace dans un sens ou dans l'autre, une surface (x) se transforme en une surface (y). Inversement une surface (y) se transforme en une surface (x); par conséquent, dans l'un et l'autre cas, les lignes de courbure se transforment en lignes de courbure;

2° Dans les mêmes conditions, une surface (ξ) se transforme en une surface (η), et inversement;

3° Après quatre transformations de Laplace, dans un sens ou dans l'autre, les surfaces (x), (y), (ξ), (η) se transforment en surfaces analogues.

Des réseaux de lignes de courbure qui se transforment en réseaux de même nature, l'auteur passe ensuite aux congruences de normales qui se changent en congruences de normales après deux transformations de Laplace.

Lacour. — Décomposition en facteurs de la fonction $\Theta[u^i(z) - G_i]$. (415-420).

Appliquant à cette fonction la méthode générale qu'il a indiquée précédemment (*Ann. de l'Ecole Normale*, 1895) pour les fonctions à multiplicateurs constants, M. Lacour parvient à la formule de décomposition :

$$\operatorname{Log}\frac{\Theta[u^i(z) - u^i(z_1) - u^i(z_2) - \ldots - u^i(z_p) + G_i]}{\Theta[u^i(z) - u^i(z_1) - u^i(z_2) - \ldots - u^i(z_p) + G_i]}$$
$$= \frac{1}{2}\Sigma[u^k(z) - u^k(a)] + \frac{1}{2}\Sigma[H_{z'_k z_k}(z) - H_{z'_k z_k}(a)],$$

où $z'_1, z'_2, \ldots, z'_p$ désignent des valeurs de z qui se déduisent algébriquement de $z_1, z_2, \ldots, z_p$, d'une part, et de a et de z, d'autre part, d'après une règle dont l'énoncé géométrique est très simple.

Delassus. — Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles. (421-467).

Dans un Mémoire présenté en 1894 à l'Académie des Sciences (*Savants étrangers*, t. XXXII), M. Riquier a établi par de solides déductions, dans des circonstances générales et à l'exclusion de tout cas exceptionnel, l'existence des intégrales d'un système différentiel quelconque.

Quelque rigoureuse que soit cette démonstration, M. Delassus lui reproche d'être très compliquée et très artificielle, et même de ne pas résoudre la question aussi complètement qu'il est possible de le faire : les intégrales de M. Riquier sont, en effet, des séries dont une infinité de coefficients sont arbitraires, et il serait à peu près impossible de grouper des coefficients de manière à former des fonctions arbitraires ayant des relations simples avec les intégrales cherchées. Or ce qui fait l'intérêt du théorème de Cauchy sous la forme classique que lui a donnée Mme Kowalevski, c'est que ce théorème ne démontre pas seulement l'existence des intégrales, mais indique en même temps des fonctions arbitraires en nombre fini qui déterminent ces intégrales d'une manière à la fois simple et complète.

C'est à ce point de vue que M. Delassus se place pour reprendre le problème général traité par M. Riquier. Le fondement de la solution qu'il en donne est le classement systématique des dérivées partielles d'un même ordre d'une fonction de plusieurs variables et l'emploi d'un changement de variables dans les systèmes d'équations aux dérivées partielles. Jusqu'à présent, on s'était peu servi de ce dernier procédé, qui semblait condamné à de fréquents insuccès. En effet, dans le cas où le problème avait été traité par Mme Kowalevski, on supposait les équations résolues par rapport à certaines dérivées bien déterminées. On a dès lors été conduit à chercher si l'on ne pourrait pas toujours arriver à ce résultat au moyen d'un changement de variables. Mais M. Bourlet a montré, par un exemple simple, que cet artifice ne permettait pas toujours d'éviter des cas exceptionnels.

On en a légitimement conclu que la forme donnée aux équations dans le théorème de Mme Kowalevski était trop particulière; mais on n'a pas cherché s'il existait des formes réduites un peu plus générales auxquelles le changement de variables pourrait conduire sans danger d'amener à des cas d'exception. Or, et c'est là le point capital du travail de M. Delassus, de telles formes existent, et l'emploi de ces formes dans la transformation du système permet de retrouver un remarquable théorème de M. Tresse, qui a fait faire un grand pas à la théorie en montrant que l'étude d'une infinité d'équations différentielles simultanées peut être ramenée à l'étude d'un nombre fini de ces équations.

Par une suite régulière d'opérations, le changement de variables aboutit ou bien à mettre en évidence l'incompatibilité des équations du système ou bien à obtenir une forme canonique complètement intégrable d'après le théorème de M. Tresse, dont voici l'énoncé précis : « Un système d'équations aux dérivées partielles étant défini d'une façon quelconque, ce système est forcément limité, c'est-à-dire qu'il existe un ordre fini s tel que toutes équations d'ordre supérieur à s que comprend le système se déduisent par de simples différentiations des équations d'ordre égal ou inférieur à s. »

Cette forme canonique de M. Delassus, plus simple que celle de M. Riquier et absolument générale, sert de base à tous les raisonnements que l'auteur développe relativement à l'existence des intégrales. Il ne cherche pas à démontrer directement la convergence des séries, ce qui serait assurément possible, mais non sans de très pénibles calculs. Il se sert de cette propriété remarquable de sa forme canonique : l'intégration d'un système canonique de m variables se ramène à l'intégration successive de m systèmes de Mme Kowalevski, contenant respectivement $1, 2, \ldots, m-1$ variables.

C'est en partant de cette propriété et par l'application successive du théorème de Cauchy que l'auteur parvient à un théorème analogue à celui de Cauchy, qui s'applique à tous les systèmes complètement intégrables, c'est-à-dire ayant des solutions, démontre l'existence des intégrales analytiques et détermine les fonctions et constantes initiales, en nombre fini, dont dépendent ces intégrales.

Voici l'énoncé du théorème de M. Delassus qui implique la notion de certains *nombres fondamentaux* $\gamma_0^i, \gamma_1^i, \ldots, \gamma_m^i$ dont la définition est trop compliquée pour trouver place ici, mais dont la signification résulte clairement de cet énoncé même :

« Soit Σ^n un système canonique complètement intégrable d'équations aux dérivées partielles. Soient C' les dérivées d'ordre inférieur ou égal à n qui

n'entrent pas dans les premiers membres, et

$$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, q)$$

les nombres fondamentaux de Σ^n.

Donnons-nous arbitrairement les fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ analytiques en $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$, auxquelles se réduisent les fonctions z_i pour lesquelles on a $\gamma_0 = 1$;

Puis les fonctions de $x_2, x_3, \ldots, x_n$ analytiques en $x_2^0, \ldots, x_m^0$ auxquelles se réduisent

$$z, \quad \frac{\partial z}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\gamma_1 - 1} z}{\partial x_1^{\gamma_1 - 1}}$$

pour $x_1 = x_1^0$;

Puis les fonctions de $x_3, \ldots, x_m$ analytiques en $x_3^0, \ldots, x_m^0$ auxquelles se réduisent

$$\frac{\partial^{\gamma_1} z}{\partial x_1^{\gamma_1}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial^{\gamma_1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1}}\right), \quad \ldots, \quad \frac{\partial^{\gamma_2 - 1}}{\partial x_2^{\gamma_2 - 1}}\left(\frac{\partial^{\gamma_1} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1}}\right)$$

pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots$;

Enfin les fonctions de x_m analytiques en x_m^0 auxquelles se réduisent

$$\frac{\partial^{\gamma_1 + \ldots + \gamma_{m-2}} z}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}}}, \quad \frac{\partial}{\partial x_{m-1}}\left(\frac{\partial^{\gamma_1 + \ldots + \gamma_{m-2}} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}}}\right), \quad \ldots,$$

$$\frac{\partial^{\gamma_{m-1} - 1}}{\partial x_{m-1}^{\gamma_{m-1} - 1}}\left(\frac{\partial^{\gamma_1 + \ldots + \gamma_{m-2}} z_i}{\partial x_1^{\gamma_1} \ldots \partial x_{m-2}^{\gamma_{m-2}}}\right)$$

pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_{m-1} = x_{m-1}^0$.

Ces fonctions initiales détermineront immédiatement les valeurs initiales (pour $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0, \ldots, x_{m-1} = x_{m-1}^0$) d'un certain nombre de dérivées C'. On se donne arbitrairement, en dernier lieu, les constantes auxquelles se réduisent toutes les autres dérivées C' pour $x_1 = x_1^0, \ldots, x_m = x_m^0$.

Si, au voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0$ et des valeurs initiales de C', les seconds membres des équations de Σ^n sont des fonctions analytiques de $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et des C', il existe un et un seul système d'intégrales $z_1, z_2, \ldots, z_n$ analytiques en $x_1^0, \ldots, x_m^0$, vérifiant toutes les équations du système Σ^n et satisfaisant à toutes les conditions initiales ci-dessus. »

Ce théorème donne une signification très simple aux nombres fondamentaux γ_μ : chaque inconnue z_i introduit dans l'intégrale générale γ_μ fonctions arbitraires de $m - \mu$ variables.

Si l'on convient de désigner par *arbitraires de genre* μ les fonctions arbitraires de μ variables, on voit que l'intégrale générale d'un système d'équations à m variables contient des arbitraires qui ne sont pas toutes du même genre; ce genre peut varier de o (constantes arbitraires) à m. C'est dans ce résultat que doit être cherchée la véritable raison de ce fait que tout système de q équations à q inconnues ne peut pas toujours être ramené par un changement de variables à la forme de Mme Kowalevski; en effet, tout système de

Mme Kowalevski, à m variables, ne contient dans son intégrale générale que des arbitraires de genre $m-1$.

Fontené. — Expression de la quantité $\wp(u_1+u_2+\ldots+u_{2n})$ au moyen d'un pfaffien. (169-187).

Posant

$$(1,2)=\{\wp(u_1+u_2)(\wp_1-\wp_2)\}, \qquad \wp_1=\wp u_1, \qquad \wp_2=\wp u_2,$$

et désignant par Δ le déterminant de Vandermonde qui est le produit des quantités $\wp_1-\wp_2$, l'auteur établit la formule d'addition suivante :

$$\wp(u_1+u_2+\ldots+u_{2n})=\frac{1}{4}\,\frac{\begin{vmatrix} 0 & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,2n) \\ (2,1) & 0 & (2,3) & \ldots & (2,2n) \\ (3,1) & (3,2) & 0 & \ldots & (3,2n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ (2n,1) & (2n,2) & (3n,3) & \ldots & 0 \end{vmatrix}}{[\wp_1^n+\wp_1',\ldots,\wp_1^n+\wp_1^{n-1}]^2},$$

où la quantité placée entre crochets au dénominateur désigne un déterminant d'ordre $2n$ représenté seulement par sa première ligne horizontale, et dont les diverses lignes se rapportent aux indices $1, 2, \ldots, 2n$.

Le déterminant dont la racine carrée figure au numérateur est un déterminant symétrique gauche d'ordre pair et par suite un carré parfait, sa racine carrée est un pfaffien et l'on peut écrire en précisant le signe

$$\wp(u_1+u_2+\ldots+u_{2n})=\frac{1}{4}\,\frac{\Delta\cdot\Sigma(1,2)(3,4)\ldots(2n-1,2n)}{[\wp_1^n+\wp_1,\ldots,\wp_1^n+\wp_1^{n-1}]^2}.$$

On peut remplacer le second membre de cette formule par un covariant relatif à une fonction elliptique du second ordre, à pôles distincts, avec s pour somme des pôles, et qui a les mêmes périodes que $\wp u$.

Cette fonction elliptique $x\left(\frac{s}{2}+v\right)$ étant définie par l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dv}=\sqrt{\Lambda_0x^4+4\Lambda_1x^3+6\Lambda_2x^2+4\Lambda_3x+\Lambda_4},$$

si l'on pose

$$F_{12}=\Lambda_0x_1^2x_2^2+2\Lambda_1x_1x_2(x_1+x_2)+\Lambda_2(x_1^2+4x_1x_2+x_2^2)$$
$$+2\Lambda_3(x_1+x_2)+\Lambda_4,\qquad \ldots$$

et

$$[1,2]=\frac{2F_{12}-2x_1'x_2'}{x_1-x_2},\qquad \ldots,\qquad \Delta=(x_1-x_2)\ldots,$$

on aura la formule qui est l'objet principal du travail de M. Fontené

$$\wp(u_1+u_2+\ldots+u_{2n}+ns)=\frac{1}{4}\,\frac{\Delta\cdot\Sigma[1,2][3,4]\ldots[2n-1,2n]}{[x^n+x',\ldots,x^n+x^{n-1}]^2}$$

Supplément.

Beudon. — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de paramètres. (3-51).

Dans le cas des équations aux dérivées partielles du premier ordre à une fonction inconnue, la réduction à un système d'équations différentielles ordinaires est un problème résolu aujourd'hui avec une absolue perfection.

Dans le cas des équations d'ordre supérieur, la recherche des cas où cette réduction est possible n'a pas fait de progrès aussi considérables. S'inspirant d'un travail fondamental de M. Darboux sur la question, M. Beudon s'est trouvé conduit à se poser le problème suivant : « Déterminer et étudier les systèmes différentiels dont les caractéristiques dépendent d'un nombre fini de constantes arbitraires ». Le cas où il y a plusieurs fonctions se ramène à celui où il n'y en a qu'une seule, grâce à un théorème de M. Riquier.

Dans la première Partie de son travail, M. Beudon généralise, d'après Sophus Lie, la notion d'élément et de multiplicité d'éléments dans l'espace à $n+1$ dimensions, et il indique leur principale propriété. Il rappelle ensuite les résultats auxquels est parvenu M. Riquier sur l'existence des intégrales dans les systèmes différentiels, et il applique ces résultats aux systèmes qu'il se propose d'étudier.

La deuxième Partie est consacrée aux systèmes dont la solution ne renferme qu'une fonction arbitraire; l'auteur ramène l'intégration de ces systèmes à celles d'équations différentielles ordinaires.

La troisième Partie est réservée au cas général; M. Beudon y met en évidence les analogies des systèmes étudiés avec les systèmes d'équations du premier ordre en involution.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXIV; 1896 [1].

Raffy. — Sur deux classes de surfaces analogues aux surfaces tétraédrales. (2-19).

On sait qu'on appelle *surfaces tétraédrales* les surfaces représentées en coordonnées cartésiennes par les formules

$$x = A(u-a)^m(v-a)^n,$$
$$y = B(u-b)^m(v-b)^n,$$
$$z = C(u-c)^m(v-c)^n.$$

---

[1] Voir *Bulletin*, XXI_2, p. 140.

et il est bien connu que les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ tracent sur ces surfaces un réseau conjugué.

M. Raffy se propose de déterminer toutes les surfaces définies par les équations plus générales :

$$x = U_1(u)V_1(v),$$
$$y = U_2(u)V_2(v),$$
$$z = U_3(u)V_3(v),$$

et telles que les courbes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué.

Il trouve comme solutions de ce problème trois classes de surfaces :

1° Les surfaces bien connues que représente l'équation

$$x = f(z)\varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

2° Une classe de surfaces déjà rencontrées par M. Sophus Lie et représentées par les formules

$$\log x = \int \frac{U\,du}{u-a} - \int \frac{V\,dv}{v-a},$$
$$\log y = \int \frac{U\,du}{u-b} - \int \frac{V\,dv}{v-b},$$
$$\log z = \int \frac{U\,du}{u-c} - \int \frac{V\,dv}{v-c};$$

3° Une classe nouvelle de surfaces, ainsi définie

$$\log x^{\frac{1}{a}} = \log u - \int \frac{V\,dv}{v-a},$$
$$\log y^{\frac{1}{b}} = \log u - \int \frac{V\,dv}{v-b},$$
$$\log z^{\frac{1}{c}} = \log u - \int \frac{V\,dv}{v-c},$$

et dépendant d'une fonction arbitraire $V(v)$ et de trois constantes a, b, c.

Pour ces trois classes de surfaces, l'équation des lignes asymptotiques est de la forme

$$F(u)\,du^2 = \Phi(v)\,dv^2.$$

On obtient donc ces asymptotiques par deux quadratures.

A la recherche de ces surfaces s'en rattache immédiatement une autre : celle des surfaces que leurs cylindres circonscrits parallèlement à un plan fixe touchent suivant des courbes planes, dont les plans passent par une droite fixe. Ces dernières sont toutes, comme le montre M. Raffy, les enveloppes des cylindres ayant pour équation

$$z = ay + f(x, a),$$

où la fonction f admet l'une des deux formes suivantes :

$$f(x, a) = X(a)X(x),$$
$$f(x, a) = (ma + n)X(x) + (px + q)X(x)$$

les deux fonctions λ et μ étant arbitraires, ainsi que les quatre constantes m, n, p, q.

Les asymptotiques de chacune de ces surfaces sont encore déterminées par deux quadratures.

Zaremba. — Contribution à la théorie de la fonction de Green. (19-24).

Soit $G(x, y, z; x', y', z')$ la fonction de Green relative à un domaine D, limité par une surface convexe S admettant en chacun de ses points des rayons de courbure déterminés. Si l'on désigne par d la plus grande distance de deux points pris sur la surface S et par a la limite inférieure des rayons de courbure de la surface S en un point variable, l'intégrale

$$\iiint \left| \frac{\partial G}{\partial x} \right| dx'\, dy'\, dz',$$

étendue à tout le domaine D, est inférieure à un nombre N, qui dépend uniquement de la surface S et qui tend vers zéro lorsque S varie de façon que d tende vers zéro, le rapport $\frac{d}{a}$ ne dépassant jamais un nombre fixe M.

Michel. — Courbe d'ombre sur une surface particulière du quatrième ordre. (26-28).

Soient une surface S, un point O et la normale ON en ce point. Si l'on imagine toutes les sections planes de la surface qui passent en O, et si l'on prend en ce point les centres de courbure de ces sections, le lieu des points ainsi obtenus est une surface Σ du quatrième ordre.

M. Michel fait voir que le lieu des courbes d'ombre déterminées sur toutes les surfaces Σ passant en O, et ayant OM pour droite double, par un point lumineux de cette droite, est une surface de révolution autour de ON, dont la méridienne est une strophoïde droite.

Adam (P.). — Sur un problème de déformation. (28-35).

M. Goursat a résolu le problème suivant : « Trouver la surface la plus générale (S) susceptible de se déformer, de façon qu'une série de sections planes, dont les plans sont parallèles, se change en une série de sections planes, dont les plans soient parallèles. »

En même temps que les équations des surfaces (S) il a donné celles des surfaces (S′) applicables sur (S), de manière à satisfaire à l'énoncé du problème.

La déformation que subit la surface (S), pour passer aux surfaces (S′), présente un caractère intéressant, que M. P. Adam met en évidence :

« Dans le passage de la surface (S) à ses associées (S′), les directrices prennent la même succession de formes quand on change les profils de (S) ».

De même, « dans le passage de (S) à ses associées (S′), les profils prennent la même succession de formes quand on change les directrices de (S) ».

Appliquées aux surfaces moulures de Monge et aux surfaces de translation, cette proposition générale donne les théorèmes suivants :

1° Pour toutes les surfaces moulures ayant le même profil qui se déforment en restant des moulures, le profil passe par la même succession de formes que s'il était le méridien d'une surface de révolution d'axe perpendiculaire aux plans des directrices des moulures qui se déformât en restant de révolution;

2° Si une surface de translation à génératrices planes se déforme en gardant sa définition, les génératrices de l'un quelconque des deux systèmes passent par la même série de formes quand on change celles de l'autre système.

Cette propriété appartient d'ailleurs à une surface de translation quelconque.

Lindelöf. — Sur les équations homogènes. (35-39).

L'intégration du système

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i - x_i X_{n+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

revient à la recherche des intégrales homogènes du degré zéro de l'équation

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + X_{n+1} \frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} = 0,$$

où l'on a posé

$$\frac{x_1}{x_{n+1}} = y_1, \qquad \frac{x_2}{x_{n+1}} = y_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{x_n}{x_{n+1}} = y_n$$

et

$$X = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = x_{n+1}^m Y_1(y_1, \ldots, y_n).$$

Ce résultat est la généralisation d'un théorème de M. Darboux sur les équations différentielles à deux variables.

Touche. — Calcul de la résistance des fluides à un disque mince. (39-42).

Un disque mince, se mouvant dans un fluide indéfini, ne transmet pas son impulsion à toute la masse fluide; dans l'intérieur du cône dont l'arête est inclinée de 34 degrés sur l'axe du disque, il reste une portion de cette masse qui n'est pas influencée par le mouvement du solide.

La pression sur l'unité de surface à l'avant du disque, lorsque celui-ci se déplace dans l'air avec la vitesse de 1^m, est

$$\frac{\rho}{g}(1 - \sin^2 34^\circ) = 0{,}0755061.$$

ρ étant la densité divisée par la valeur g de la pesanteur.

A l'arrière du disque mince on a une poupe fluide formée des tourbillons. Si v_1 est la vitesse à l'extrémité du rayon d'un tourbillon, P la pression à l'extérieur du tourbillon, P_1 la pression au centre, la dépression à l'arrière du

disque est

$$P - P_1 = P_2 c_1;$$

elle est indépendante du rayon du tourbillon.

En appliquant au cas de l'air, on trouve pour la dépression $0^{kg},0296125$; cette dépression à l'arrière du disque s'ajoute à la pression de l'avant pour former la résistance, qui est égale à $0^{kg},0659186$.

Goursat. — Sur les lignes asymptotiques. (43-51).

M. Lelieuvre a montré (*Bull. des Sciences mathématiques*, 1888, p. 126) que les coordonnées d'un point d'une surface rapportée à ses asymptotiques α, β sont données par les formules

$$x = \int \left(\theta_2 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha} - \theta_3 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_2 \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta} - \theta_3 \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta}\right) d\beta,$$

$$y = \int \left(\theta_3 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha} - \theta_1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_3 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta} - \theta_1 \frac{\partial\theta_3}{\partial\beta}\right) d\beta,$$

$$z = \int \left(\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\alpha} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_1 \frac{\partial\theta_2}{\partial\beta} - \theta_2 \frac{\partial\theta_1}{\partial\beta}\right) d\beta,$$

où θ_1, θ_2, θ_3 sont trois intégrales particulières d'une équation linéaire à invariants égaux

$$(1) \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \lambda\theta.$$

On peut déduire de ces formules une infinité de surfaces pour lesquelles on connaît les expressions des coordonnées x, y, z en fonction des paramètres α, β des lignes asymptotiques sans aucun signe de quadrature. Il suffit pour cela, comme le fait voir M. Goursat, de partir d'une équation (1) intégrable par la méthode de Laplace.

Raffy. — Surfaces rapportées à un réseau conjugué azimutal. (51-56).

L'auteur étudie quelques applications d'un système de coordonnées curvilignes qui dérive de cette proposition due à M. Kœnigs : « Les sections faites dans une surface par des plans contenant une droite fixe et les courbes de contact des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur cette droite forment un réseau conjugué. »

Après avoir établi les formules générales permettant de rapporter une surface aux courbes d'un tel réseau, qu'il appelle *réseau conjugué azimutal*, M. Raffy applique ces formules à la détermination des surfaces de Joachimsthal, dont il exprime les coordonnées explicitement et sans quadrature, et à la détermination des surfaces qui présentent un réseau conjugué azimutal à invariants égaux : l'équation de ces dernières est

$$z = x f\left(\frac{y}{x}\right) + F\left[x\,\Phi\left(\frac{y}{x}\right)\right]$$

où f, F, Φ représentent trois fonctions arbitraires.

Petrovitch. — Remarques algébriques sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre. (58-80).

L'auteur présente une suite de remarques concernant les valeurs réelles de la variable indépendante x, pour lesquelles les intégrales d'une équation différentielle algébrique du premier ordre peuvent prendre des valeurs données à l'avance et qu'on peut toujours supposer égales à zéro ou à l'infini.

Dans un Travail antérieur, M. Petrovitch a donné, sous une forme pratique, les conditions nécessaires et suffisantes pour que les zéros ou les infinis de l'intégrale ne varient pas avec la constante d'intégration, et un procédé simple pour calculer les ordres des zéros et des infinis mobiles. Soit

$$F(x, y, y') = \sum_{i=1}^{i=s} \varphi_i(x) y^{m_i} y'^{n_i},$$

un polynome en y et y', où les $\varphi_i(x)$ sont des fonctions quelconques de x. On formera le tableau de $2s$ nombres entiers et positifs

$$M_i = m_i - n_i, \qquad N_i = n_i,$$

et l'on tracera dans le plan deux axes : sur l'un on comptera les M_i, sur l'autre les N_i, et l'on marquera les s points (M_i, N_i). Par le point le plus rapproché et par le point le plus éloigné de ON, on tracera une ligne polygonale brisée dont les sommets sont les points (M_i, N_i) et telle qu'aucun point (M_i, N_i) ne soit au-dessus d'elle. Cela étant :

1° Pour que l'intégrale générale de l'équation différentielle $F(x, y, y') = 0$ ait des zéros mobiles d'ordre λ, il faut et il suffit que la ligne polygonale de F ait un côté de coefficient angulaire λ;

2° Pour qu'elle ait des infinis mobiles d'ordre λ, il faut et il suffit que le polygone ait un côté de coefficient angulaire $-\lambda$.

D'après ces théorèmes, si le polygone de F n'a pas de côté à coefficient angulaire positif, les zéros de l'intégrale ne varient pas avec la constante d'intégration. Mais s'il y a de tels côtés, ces zéros varient avec la constante, et l'étude en est impossible dans le cas général. C'est dans ce cas que les remarques présentées par M. Petrovitch peuvent présenter quelque utilité.

D'Ocagne. — Sur la représentation nomographique des équations du second degré à trois variables. (81-84).

Soit l'équation du second degré à trois variables la plus générale

$$(1) \qquad \begin{cases} a_1\alpha_1^2 + a_2\alpha_2^2 + a_3\alpha_3^2 + 2b_1\alpha_2\alpha_3 + 2b_2\alpha_3\alpha_1 + 2b_3\alpha_1\alpha_2 \\ \qquad + 2c_1\alpha_1 + 2c_2\alpha_2 + 2c_3\alpha_3 + d = 0. \end{cases}$$

La condition nécessaire et suffisante pour que cette équation soit représentable par un abaque formé d'un système de cercles et de deux systèmes de droites parallèles est que l'équation (1), où les variables α_1, α_2, α_3 sont prises pour coordonnées courantes, définisse une surface coupée par l'un au moins des plans coordonnés suivant une ellipse, réelle ou imaginaire.

Maillet. — Note sur les groupes de substitutions. (85-96).

M. Maillet donne d'abord quelques indications sur les sous-groupes transitifs des isomorphes holoédriques des groupes symétriques ou alternés.

Il indique ensuite une relation entre le degré, la classe et l'ordre de certains groupes primitifs : si G est un groupe primitif, une seule fois transitif, d'ordre g, de degré n et de classe u, on a

$$g u \leqq n^{\frac{2n}{n}}.$$

L'auteur énonce en terminant quelques propriétés des groupes transitifs de classe ef, e et f étant premiers et impairs.

D'Ocagne. — Théorème relatif aux abaques. (98).

Toute équation représentable par trois systèmes du premier degré de droites isopléthes est de la forme

$$A\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + A_{12}\alpha_1\alpha_2 + A_{23}\alpha_2\alpha_3 + A_{31}\alpha_3\alpha_1 + A_1\alpha_1 + A_2\alpha_2 + A_3\alpha_3 + A = 0,$$

mais ce n'est pas l'équation la plus générale de ce type. Le caractère algébrique de ces équations est le suivant : le discriminant de la forme du premier membre rendue homogène est positif.

Dans le cas où $A = 0$, l'équation, où l'on considère α_1, α_2, α_3 comme des coordonnées courantes, représente un hyperboloïde à une nappe.

Mangeot. — Sur une manière de représenter le rapport des deux courbures d'une courbe gauche. (98-100).

Lorsqu'un point se déplace sur une génératrice G d'un cône quelconque, le rayon de courbure principal du cône en ce point varie proportionnellement à sa distance au sommet du cône, et le coefficient de proportionnalité est égal au rapport de la première à la seconde courbure d'une courbe quelconque ayant des tangentes parallèles aux génératrices du cône, ces courbures étant relatives au point où la tangente est parallèle à G.

L'auteur indique quelques conséquences de ce théorème.

Duport. — Mémoire sur la constitution des atomes et sur l'action de la matière sur la matière. (102-132).

Les atomes, étant des parcelles de matière continue, peuvent être considérés comme fluides ou comme solides. M. Duport discute l'hypothèse de la fluidité des atomes.

Il est naturel d'admettre que l'action mutuelle des différentes parties des atomes s'effectue point matériel à point matériel, et dès lors l'action d'un point matériel sur un autre ne peut plus dépendre que des positions de ces points et de leurs vitesses.

L'hypothèse de la continuité de la matière, jointe à celle de l'existence de la loi précédente et à certaines considérations de symétrie, fournit alors des équations suffisantes pour déterminer cette loi. Malheureusement on n'est con-

dont aussi qu'à des impossibilités, et les calculs n'aboutissent qu'à démontrer l'incompatibilité de la fluidité de l'atome et de l'existence d'une loi d'attraction de la matière sur la matière s'exerçant d'un point aux autres.

Lecornu. — Sur le pendule de longueur brusquement variable. (133-136).

Un pendule simple étant en mouvement, on raccourcit brusquement le fil au moment du passage par la verticale : que va devenir la vitesse? Si l'on applique le théorème des quantités de mouvement, on est tenté de répondre, comme l'a fait M. Delaunay dans sa théorie de l'escarpolette, que la vitesse linéaire n'est pas modifiée, car les deux forces agissantes, pesanteur et tension, sont toutes deux verticales à cet instant. Cependant, le théorème des moments des quantités de mouvement conduit à une tout autre conclusion : en vertu de ce théorème, comme le moment de la tension par rapport au point d'attache est constamment nul, et comme celui de la pesanteur s'annule aussi pour la position verticale du pendule, le moment de la quantité de mouvement, c'est-à-dire le produit de la vitesse linéaire par la longueur du pendule, doit demeurer invariable. En d'autres termes, la vitesse linéaire doit varier en raison inverse de la longueur.

Pour éclaircir cette contradiction, M. Lecornu envisage le cas d'un pendule qui se raccourcit dans un temps très court, mais fini, et fait ensuite tendre vers zéro cet intervalle de temps.

L'application du théorème des quantités de mouvement conduit alors à une conclusion correcte, et l'analyse met en évidence la cause de l'erreur commise par Delaunay.

André (*D.*). — Théorème nouveau de réversibilité algébrique. (136-139).

L'*Intermédiaire des Mathématiciens* a publié la question suivante :

« Si l'on pose

$$f(x, y, z) = x^2 - yz,$$

les formules

$$\frac{f(x, y, z)}{X} = \frac{f(y, z, x)}{Y} = \frac{f(z, x, y)}{Z}$$

donnent

$$\frac{f(X, Y, Z)}{x} = \frac{f(Y, Z, X)}{y} = \frac{f(Z, X, Y)}{z}.$$

Y a-t-il d'autres exemples analogues? »

M. D. André fait connaître un théorème général qui en fournit une infinité : On considère les deux suites de n nombres chacune

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad \ldots, \quad x_n,$$

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad \ldots, \quad X_n.$$

Avec les nombres de la première on forme le rectangle de n colonnes et

$n-1$ lignes

$$\begin{matrix} x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n & x_1, \\ x_3 & x_4 & x_5 & \dots & x_1 & x_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-2} & x_{n-1}, \end{matrix}$$

et un rectangle pareil avec ceux de la seconde.

On prend les déterminants qui se déduisent du premier de ces rectangles par la suppression de la première, de la deuxième, ..., de la $n^{\text{ième}}$ colonne, et après les avoir affectés alternativement des signes + et —, on les désigne par $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$; on prend enfin les déterminants qui dérivent du second rectangle et, après avoir alterné leurs signes, on les désigne par $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$.

Cela étant, si l'on a

$$\frac{\delta_1}{X_1} = \frac{\delta_2}{X_2} = \dots = \frac{\delta_n}{X_n},$$

on a aussi

$$\frac{\Delta_1}{x_1} = \frac{\Delta_2}{x_2} = \dots = \frac{\Delta_n}{x_n},$$

et réciproquement.

Cartan. — Le principe de dualité et certaines intégrales multiples de l'espace tangentiel et de l'espace réglé. (140-177).

Certaines intégrales multiples, relatives à des ensembles de points, ne changent pas de valeur lorsqu'on fait subir aux points un même déplacement : telles sont l'aire d'une portion du plan, le volume d'une portion de l'espace.

N'y a-t-il pas, en vertu du principe de dualité, des intégrales multiples, étendues à des ensembles de droites dans le plan ou à des ensembles de plans dans l'espace, qui jouiraient d'une propriété analogue, c'est-à-dire qui resteraient invariables lorsqu'on imprime un même déplacement à toutes ces droites ou à tous ces plans?

La question, comme le montre M. Cartan, doit être résolue par l'affirmative. Il existe dans le plan, regardé comme engendré par des droites

$$ux + vy + w = 0,$$

une intégrale double invariante

$$\int\int \frac{u\,dv\,dw + v\,dw\,du + w\,du\,dv}{(u^2+v^2)^2}$$

exprimant une propriété métrique d'un ensemble quelconque de droites dépendant de deux paramètres, pourvu que parmi les droites de cet ensemble ne figure pas la droite de l'infini. Étendue à toutes les droites qui rencontrent un segment rectiligne donné, cette intégrale exprime le double de la longueur de ce segment; étendue à toutes les droites qui coupent une courbe fermée convexe, elle est égale au périmètre de cette courbe.

Il y a encore dans le plan une autre intégrale simple étendue à des droites dépendant d'un seul paramètre : elle exprime simplement l'angle de deux droites limites.

Dans l'espace tangentiel, c'est-à-dire considéré comme engendré par des plans, il existe de même deux intégrales : l'une, double, étendue à des ensembles de

plans dépendant de deux paramètres, exprime l'aire découpée sur une sphère de rayon égal à l'unité par les normales aux plans menés par le centre de cette sphère; la deuxième est une intégrale triple, embrassant des ensembles de plans quelconques, pourvu que le plan de l'infini ne soit pas l'un d'eux. Étendue à l'ensemble des plans qui coupent un arc de courbe, cette intégrale triple

$$\int\int\int \frac{\sqrt{\Delta}(u\,dv\,dw\,dh + v\,dw\,du\,dh + w\,du\,dv\,dh + h\,du\,dv\,dw)}{[\varphi(u, v, w, h)]^2}$$

[où $\varphi(u, v, w, h) = 0$ est l'équation en coordonnées homogènes d'une quadrique (quadrique fondamentale) et Δ le discriminant de la forme φ] est égale au produit de π par la longueur de cet arc de courbe. Mais ce qui fait surtout l'intérêt de cette intégrale, c'est que, si on l'étend à l'ensemble des plans qui coupent une surface fermée convexe, on a une nouvelle quantité qu'on peut appeler le *périmètre de cette surface*, de la même dimension qu'une longueur (le *périmètre* ainsi défini d'une sphère est égal au quadruple de son diamètre). Le périmètre d'une surface fermée peut donc être considéré comme le *dualistique* du volume situé à l'intérieur de cette surface.

Enfin, on peut aussi regarder l'espace comme engendré par des droites, ce qui le rend son propre dualistique, et il existe aussi dans l'espace réglé des intégrales multiples métriques. Une de ces intégrales est une intégrale quadruple et, par suite, s'étend à des ensembles de droites quelconques; étendue à l'ensemble des droites qui coupent une portion de surface, elle est égale au produit de π par l'aire de cette portion de surface; étendue à l'ensemble des droites qui coupent une surface fermée convexe, elle est égale au produit de $\frac{\pi}{2}$ par l'aire de cette surface.

Il existe deux autres intégrales de l'espace réglé, et elles sont doubles, par suite s'étendent à des droites dépendant de deux paramètres; l'une d'elles représente l'aire découpée, sur une sphère de rayon égal à l'unité, par les parallèles à ces droites menées par le centre de la sphère. Quant à l'autre, elle jouit de la propriété de se reproduire divisée par n lorsque les droites de la congruence se réfractent à travers une surface dans un milieu d'indice n; de plus, la condition nécessaire et suffisante pour que les droites d'une congruence soient normales à une même surface est que l'intégrale relative à tout pinceau de la congruence soit nulle, d'où résulte que, par réfraction, la congruence des droites normales à une surface se change en une congruence jouissant de la même propriété, ce qui est un théorème bien connu.

Larose. — Démonstration du théorème de M. Vaschy sur une distribution quelconque de vecteur. (177-180).

Soit h un vecteur défini en chaque point d'un champ U limité par une surface S; si φ est une fonction de h, telle que l'intégrale $\int\int \varphi(\nu)\,d\sigma$, prise sur une sphère infiniment petite Σ, soit, à un facteur numérique près, égale à la valeur moyenne de h sur la sphère, on aura

$$4\pi h + \int\int_S \varphi(\nu)\,d\sigma + \int\int\int_U \varphi(\nabla)\,dv = 0,$$

ν étant l'unité de normale intérieure et ∇ l'opérateur de Hamilton.

Cette relation, que M. Larose déduit d'une formule de M. Carvallo, est analogue dans l'espace à l'identité de Cauchy dans le plan pour le calcul des résidus.

L'auteur en conclut une démonstration nouvelle de ce théorème de M. Vaschy : « Le champ d'un vecteur quelconque h peut être considéré comme produit par la superposition d'un champ de masses newtoniennes et d'un champ de masses laplaciennes réparties dans le volume U et sur la surface limite S du champ. »

Carvallo. — Généralisation et extension à l'espace du théorème des résidus de Cauchy. (180-184).

Soit $f(x)$ une entité quelconque, géométrique ou non, déterminée en chaque point x de l'espace v, compris entre une sphère σ et une surface s enveloppant σ. Pour ces surfaces, on considère les normales ν et ν_1 égales à l'unité et dirigées vers l'intérieur du volume v. Soient r la distance d'un point a au point x; α le vecteur unité porté du point a vers le point x; $\left[\nu \frac{\alpha}{r^2} f\right]$ une fonction des trois symboles ν, $\frac{\alpha}{r^2}$ et f, dont la signification demeure arbitraire, mais qui est assujettie à la condition d'être linéaire en ν; enfin ∇ le vecteur symbolique de Hamilton

$$\nabla = I_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + I_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + I_3 \frac{\partial}{\partial x} \cdot$$

Cela étant, on a la formule de réduction

$$\int_\sigma \left[\nu \frac{\alpha}{r^2} f\right] + \int_s \left[\nu_1 \frac{\alpha}{r^2} f\right] ds + \int_v \left[\nabla \frac{\alpha}{r^2} f\right] dv = 0.$$

En particularisant de diverses façons le sens du crochet, M. Carvallo montre la fécondité de cette formule. Il retrouve entre autres applications le théorème de M. Vaschy et démontre cette proposition : « Si l'on considère une distribution de vecteur f qui dérive d'un potentiel, puis une couche superficielle s dont la densité est représentée par le vecteur f, enfin l'action de cette couche superficielle agissant d'après la loi de Laplace sur un point intérieur, le flux de force qui traverse la surface s est nul. »

Raffy. — Sur le signe de la torsion des courbes gauches. (185-186).

Si l'on convient de placer l'observateur du côté du plan rectifiant où n'est pas le centre de courbure, qu'on donne au trièdre (M, xyz) formé par la tangente, la normale principale et la binormale, la disposition habituelle, et qu'on choisisse le signe de la torsion de telle sorte qu'on ait, pour les points de la courbe voisins de l'origine M,

$$x = s \ldots, \quad z = -\frac{6s}{RT} \ldots,$$

on arrive à cette règle : « Une courbe à torsion positive est dextrorsum; une courbe à torsion négative est sinistrorsum. »

2e Partie.

Hadamard. — Sur les fonctions entières. (186-187).

Dans un Travail antérieur (*Journal de Mathématiques*, 1893), M. Hadamard a étudié les relations qui existent entre l'ordre de grandeur des coefficients du développement d'une fonction entière et l'ordre de grandeur de la fonction pour des valeurs infinies de la variable. Ayant reconnu depuis que ces relations pouvaient se mettre sous une forme plus simple et en même temps plus exacte, l'auteur expose sommairement les résultats auxquels il est parvenu.

Mannheim. — Sur le rapport des deux courbures d'une courbe gauche. (188).

Laisant. — Identités relatives à des polynomes entiers. (191-192).

Si l'on représente par h la moyenne arithmétique des racines $a, b, c, \ldots, l$ d'une équation $f(x) = 0$ de degré m, on a les deux identités

$$\sum f^{m-3}(a) - \frac{m^2(m-3)}{2} f^{m-3}(h) = 0,$$

$$\sum f^{m-2}(a) - m(m-2) f^{m-2}(h) = 0,$$

les sommations s'étendant à toutes les racines de l'équation.

Duporcq. — Sur les centres de gravité des courbes parallèles. (192-194).

Des courbes fermées, géométriques ou non, parallèles entre elles, ont le même centre de gravité des courbures. Les centres de gravité de leurs périmètres sont sur une droite passant par ce point fixe, et leurs distances à ce point sont inversement proportionnelles aux périmètres correspondants.

Après avoir donné une autre forme à cette propriété, et en avoir tiré diverses conséquences, M. Duporcq indique quelques résultats applicables à des courbes parallèles non fermées.

Les centres de gravité des courbures ω d'une famille d'arcs, ba parallèles entre eux, sont sur une droite parallèle à la bissectrice de l'angle des normales communes extrêmes. Si φ désigne cet angle, deux courbes distantes de ρ ont des centres de gravité dont la distance est $\frac{2\rho}{\varphi} \sin \frac{\varphi}{2}$.

Quant aux centres de gravité g des périmètres de ces arcs, ils sont sur une hyperbole dont une des asymptotes est parallèle à la bissectrice de l'angle des normales extrêmes.

Les droites $g\omega$ enveloppent une parabole qui touche également les perpendiculaires abaissées des centres de gravité g sur les cordes ab correspondantes.

D'Ocagne. — Sur le signe de la torsion des courbes gauches et du paramètre de distribution des surfaces réglées. (195-196).

M. d'Ocagne propose une convention inverse de celle de M. Raffy. (*Voir* ci-dessus.)

Duport. — Sur la constitution des atomes et l'action de la matière sur la matière. (197).

Au Mémoire récent, où il a montré que les atomes doivent être considérés comme de petits corps solides, l'auteur ajoute quelques résultats : il indique, entre autres choses, que l'action d'un point d'un atome sur un point du même atome ne saurait dépendre seulement de la position relative de ces deux points et de leurs vitesses.

Laisant. — Propriétés algébriques des coefficients du binome. (197-199).

Si l'on forme le Tableau de $n+1$ colonnes et de n lignes

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n-1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & \dots & n^2 & (n-1)^2 \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot & \dots & \cdot\cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ 1 & 2^{n-1} & 3^{n-1} & \dots & n^{n-1} & (n-1)^{n-1} \end{array}$$

et si l'on désigne les déterminants qui résultent de la suppression de la 1re, de la 2e, ..., de la $(n+1)^{\text{ième}}$ colonne par

$$\Delta_0, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \dots, \quad \Delta_i, \quad \dots, \quad \Delta_n,$$

les valeurs des termes de cette suite sont proportionnelles aux coefficients du développement de la puissance n du binome.

Hadamard. — Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques. (199-220).

La fonction $\zeta(s)$ de Riemann est définie, lorsque la partie réelle de s est plus grande que 1, par l'équation

$$\log \zeta(s) = -\sum_p \log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right),$$

où p désigne successivement les différents nombres premiers. Elle est holomorphe dans tout le plan, sauf au point $s=1$ qui est un pôle simple. Elle ne s'annule pour aucune valeur de s dont la partie réelle soit supérieure à 1; mais elle admet une infinité de zéros imaginaires dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Stieltjes avait démontré, conformément aux prévisions de Riemann, que ces zéros sont tous de la forme $\frac{1}{2} + ti$, mais sa démonstration n'a jamais été publiée.

Reprenant la question, M. Hadamard, en n'invoquant que les propriétés les plus simples de $\zeta(s)$, fait voir que cette fonction n'a pas de zéros sur la droite $\mathcal{R}(s) = 1$ [$\mathcal{R}(s)$ désignant la partie réelle de s]. Il étend cette proposition

aux séries introduites en arithmétique par Dirichlet et qui appartiennent à la catégorie des séries de la forme $\sum \frac{a_n}{n^s}$ périodiques, c'est-à-dire dont les coefficients a_n se reproduisent de k en k.

Bien que ce résultat soit très éloigné de la précision de celui qu'ont annoncé Riemann et Stieltjes, il suffit néanmoins pour démontrer les principales conséquences arithmétiques qu'on a jusqu'ici essayé de tirer des propriétés de $\zeta(s)$.

Ainsi, on peut en conclure la démonstration rigoureuse de ce théorème énoncé par Halphen : « La somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x est asymptotique à x. » Ce théorème n'est d'ailleurs, comme le montre M. Hadamard, qu'un cas particulier du suivant : « La somme $\frac{1}{\Gamma(\mu)} \sum_p \log p \log^{\mu-1} \frac{x}{p}$, étendue aux nombres premiers inférieurs à x, et dans laquelle μ désigne un nombre positif quelconque, est asymptotique à x. »

En utilisant la propriété des séries de Dirichlet, M. Hadamard établit d'autres propositions analogues sur la somme des logarithmes des nombres premiers inférieurs à x et compris dans une progression arithmétique déterminée.

Il signale, en terminant, la possibilité d'appliquer sa méthode aux séries de Weber et de Meyer, par lesquelles on étend le théorème de Dirichlet sur la progression arithmétique aux formes quadratiques : ces séries ne s'annulent pas sur la droite $\mathcal{R}(s) = 1$.

Bendixson. — Démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles linéaire. (220-225).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXXIII; 1896 [1].

Boussinesq. — Lois générales du régime uniforme dans les lits à grande section. (7-13).

Korkine. — Sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre. (38-40).

Dans une récente Communication, M. Painlevé avait avancé que les exposants constants qu'il désigne par $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ devaient être tous distincts dans la méthode de M. Korkine. M. Korkine relève l'inexactitude de cette assertion. Il adresse diverses critiques aux résultats énoncés par M. Painlevé et termine en affirmant que la question par lui-même posée, loin d'avoir reçu une solu-

[1] Voir *Bulletin*, t. XXI, p. 217.

tion antérieure quelconque, n'en a jusqu'à présent d'autre que celle qui est contenue dans sa Note.

Boussinesq. — Du régime uniforme dans les canaux rectangulaires larges et dans les tuyaux ou canaux à section circulaire ou demi-circulaire. (77-83).

Painlevé. — Sur les équations différentielles du premier ordre. (88-91).

Laissant de côté les rapports plus ou moins étroits qui peuvent exister entre les recherches de M. Korkine et les siennes, M. Painlevé maintient l'exactitude de toutes les propositions qu'il a énoncées comme lui appartenant dans sa dernière Communication.

Miller. — Sur les groupes de substitutions. (91-92).

En ce qui concerne l'énumération de groupes d'ordre $8p$, l'auteur est d'accord, sauf sur un point unique, avec M. Levavasseur (*Comptes rendus*, t. CXXII, p. 516).

M. Miller communique une formule qui donne le nombre total N des groupes de substitution (transitifs ou intransitifs) dont l'ordre est le produit de deux nombres premiers p, q.

Si $p-1$ est divisible par q,

$$N = (k+1)(k+2) - m;$$

si $p-1$ n'est pas divisible par q,

$$N = \frac{1}{2}(k+1)(k+2) - m_1,$$

k étant la plus grande valeur de z qui satisfait à l'équation en nombres entiers positifs (x, y, z)

$$n = pqz + px + qy,$$

où n désigne le degré des groupes.

m est égal à 3, 2 ou 0, suivant que n est divisible par pq, par p ou q seulement, ou n'est divisible ni par p ni par q; m_1 est égal à 2 si n est divisible par p ou par q, à 0 si n n'est divisible ni par p ni par q.

Hadamard. — Sur la fonction $\zeta(s)$. (93).

Rectification portant sur un point secondaire d'une démonstration communiquée récemment par l'auteur.

Fouché (*Ed.* et *M.*). — Sur le déplacement de l'axe de rotation d'un corps solide dont une partie est rendue momentanément mobile par rapport au reste de la masse. (93-96).

Étant donné un système matériel sur lequel n'agit aucune force extérieure et mobile autour de son centre de gravité, ce mouvement s'effectuant d'abord comme si le système était solide, on peut, par un cycle d'opérations fermé, et en ne faisant intervenir que des forces intérieures au système, arriver à faire prendre à l'axe de rotation une position relative qu'il n'aurait jamais pu prendre si le système était demeuré invariable.

Un cas intéressant est celui où le système se compose de deux parties solides dont l'une, celle qu'on déplace, est un corps de révolution. La constante des quantités de mouvement restant invariable dans tous les cas, la force vive présente un minimum qui correspond au cas où le solide tourne autour du petit axe de l'ellipsoïde central. Dans ce cas, qui est celui de la Terre, il faudra dépenser du travail pour déplacer l'axe de rotation. Pour toute autre position initiale de l'axe instantané, on disposera d'une certaine quantité de force vive susceptible d'être transformée en travail.

Lecornu. — Sur l'équilibre d'élasticité d'un corps tournant. (96-98).

Lorsqu'un solide homogène de révolution tourne autour de son axe, le déplacement de chaque élément sous l'action de la force centrifuge est dirigé dans le plan méridien et indépendant de l'orientation de ce dernier. Si l'on désigne par x et y les distances initiales de l'élément à l'axe de rotation et à un plan fixe perpendiculaire à cet axe, par u et v les variations de x et y, par $4M$ le produit $\omega^2\rho$ du carré de la vitesse angulaire par la densité, par θ la dilatation cubique $\frac{u}{x} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$, enfin, par φ la différence $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, on trouve les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial x} - \mu\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + 4Mx = 0, \\[2ex] (\lambda + 2\mu)\dfrac{\partial\theta}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{\varphi}{x} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = 0. \end{cases}$$

Le problème de l'équilibre d'élasticité d'un pareil solide consiste à trouver des valeurs u et v satisfaisant aux équations (1) et telles que, pour tout élément de la surface libre, la tension normale et la tension tangentielle soient nulles.

M. Lecornu obtient une solution remarquable en prenant

$$(\lambda + \mu)u = kx - \frac{M(\lambda + 2\mu)}{8\mu}x^3 - \frac{M\lambda}{2\mu}xy^2,$$

$$(\lambda + \mu)v = -2k\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}y + \frac{M\lambda}{2\mu}x^2y + \frac{M\lambda^2}{3\mu(\lambda + 2\mu)}y^3.$$

Ces valeurs satisfont aux équations (1) et, de plus, elles donnent pour les tensions normales et tangentielles qui s'exercent soit dans le sens du rayon, soit dans le sens de l'axe

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\lambda + \mu}\left[2k\frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} - M\frac{7\lambda + 6\mu}{4}x^2 - \frac{M\lambda(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu}y^2\right],$$

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

$$T = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0.$$

La tension normale n et la tension tangentielle t sur un élément superficiel, perpendiculaire au méridien, et dont la normale forme un angle α avec l'axe, ont pour valeurs

$$n = N_1 \cos^2\alpha, \qquad t = N_1 \sin\alpha \cos\alpha.$$

Donc, la surface pour laquelle $N_1 = 0$ peut jouer le rôle de surface libre. C'est un ellipsoïde de révolution allongé: le rapport entre les carrés du diamètre équatorial et du diamètre polaire est, dans l'hypothèse $\lambda = \mu$, égal à $\frac{20}{39}$ ou sensiblement $\frac{1}{2}$.

N_3 et T étant nuls, si l'on découpe l'ellipsoïde en tranches parallèles à l'équateur, chacune de ces tranches est individuellement en équilibre. Ce fait permet à l'auteur de donner une idée des tensions qui prennent naissance par la rotation d'une meule.

Boussinesq. — Lois de deuxième approximation du régime uniforme dans les tuyaux circulaires et dans les canaux demi-circulaires. (141-147).

De Séguier. — Sur les sommes de Gauss. (166-168).

L'étude des sommes

$$\sum_s \left(\frac{s}{n}\right) e^{\frac{2h\pi i}{n}},$$

où n est quelconque et où s parcourt un système de restes selon le module n, se ramène à celle des sommes

$$\psi(h, D) = \sum_s \left(\frac{D}{s}\right) e^{\frac{2h\pi i}{|D|}} \qquad (h \text{ entier} > 0, < 0 \text{ ou } = 0),$$

où D est un discriminant et où s parcourt un système de restes positifs selon le module D.

Kronecker a déterminé ces sommes dans le cas où D est un discriminant fondamental, c'est-à-dire un nombre de l'une des formes P, $-4P$, $\pm 8P$, P étant un discriminant impair sans facteur carré.

Le P. de Séguier communique une formule qui donne $\psi(h, D)$ dans les cas où D est un discriminant quelconque, carré ou non carré.

Il détermine ensuite les sommes

$$\varpi(\alpha, D) = \sum_{s=1}^{s=|D|} \left(\frac{D}{s}\right) s^\alpha$$

selon le module D, ou du moins leur grand commun diviseur avec D.

Lévy (Alfred). — Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite. (168-171).

A toute substitution linéaire

$$x_i = \sum_{k=1}^{k=n} p_{ik}\xi_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut en adjoindre une autre

$$x_i^0 = \sum_{k=1}^{k=n} p_{ik}^0 \xi_k^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les coefficients et les variables sont imaginaires conjugués des coefficients et variables de la première.

Une forme bilinéaire $\sum a_{ik}x_i x_k^0$ à indéterminées conjuguées, dont le déterminant n'est pas nul, peut-elle être transformée en elle-même quand on effectue sur les variables les deux substitutions précédentes? Il faut et il suffit pour cela que les deux déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_{11} - \rho & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} - \rho \end{vmatrix}, \qquad \Delta^0 = \begin{vmatrix} p_{11}^0 - \rho & \cdots & p_{1n}^0 \\ p_{21}^0 & \cdots & p_{2n}^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1}^0 & \cdots & p_{nn}^0 - \rho \end{vmatrix},$$

où ρ est un paramètre arbitraire, aient des *diviseurs élémentaires* adjoints l'un à l'autre, de manière qu'ils soient de degré égal et s'annulent pour des valeurs réciproques.

L'auteur étudie particulièrement les formes quadratiques de M. Hermite $\sum c_{ik}x_i x_k^0$, caractérisées par le fait que les coefficients c_{ii} sont réels et les coefficients c_{ik}, c_{ki} imaginaires conjugués. Le cas le plus important est celui où les diviseurs élémentaires sont simples et où toute racine de $\Delta = 0$ est adjointe à la racine imaginaire conjuguée de $\Delta^0 = 0$. Alors, les deux substitutions transforment une forme quadratique définie (positive) de M. Hermite en elle-même.

Inversement, toute forme définie de M. Hermite n'est transformée en elle-même que par des substitutions dont les déterminants Δ, Δ_0 ont des diviseurs élémentaires simples et des racines dont le module est l'unité.

Complétant ensuite les résultats obtenus par M. Picard, l'auteur montre qu'à tout groupe linéaire d'ordre fini à n variables correspond une forme quadratique définie à indéterminées conjuguées, qui se transforme en elle-même quand on effectue les substitutions du groupe d'ordre fini sur les variables.

L'auteur termine en indiquant la substitution générale, à déterminant non nul, qui transforme en elle-même la forme quadratique définie $\sum x_i x_i^0$: c'est la généralisation des formules de Cayley pour la transformation orthogonale.

Fuchs. — Remarques sur une Note de M. Alfred Lœwy intitulée : *Sur les formes quadratiques définies à indéterminées conjuguées de M. Hermite.* (289-290).

Dans la Note en question, M. Lœwy énonce ce théorème qu'à tout groupe fini à n variables correspond une forme quadratique à indéterminées conjuguées qui est transformée en elle-même quand on effectue les substitutions du groupe d'ordre fini sur les variables.

M. Fuchs fait remarquer que ce théoreme est un cas particulier des résultats d'un Mémoire : *Sur une classe d'équations différentielles linéaires et homogènes*, qu'il avait publié peu de temps auparavant dans les *Sitzungsberichte* de l'Académie de Berlin.

Von Weber. — Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles simultanées. (292-294).

Partant d'un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires, complètement intégrable, l'auteur signale une infinité de cas où l'on pourra ramener l'intégration de ce système à celle de plusieurs systèmes d'équations différentielles ordinaires.

Thybaut. — Sur une classe de surfaces isothermiques dépendant de deux fonctions arbitraires. (295-297).

L'auteur rappelle d'abord un théorème qu'il a établi précédemment :

« Si l'on connaît p solutions de l'équation E_p

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha \partial \beta} = k\theta,$$

vérifiant la relation $\sum_p \theta_i^2 = 0$ et une $(p+1)^{\text{ème}}$ solution quelconque ω ; si l'on pose

$$A_i = \int \left(\theta_i \frac{d\omega}{d\alpha} - \omega \frac{d\theta_i}{d\alpha}\right) d\alpha - \left(\theta_i \frac{d\omega}{d\beta} - \omega \frac{d\theta_i}{d\beta}\right) d\beta,$$

la fonction $\omega' = \sum_p A_i \theta_i$ est une nouvelle solution de l'équation E_p. »

Cela posé, appelant *solution spéciale* une solution ω telle que $\omega' = m\omega$, m étant constant, M. Thybaut montre que, si l'on applique à une équation E_p la transformation de M. Moutard relative à une solution spéciale ω, on obtient une équation E_{p+1}.

En particulier, toute équation harmonique E_4 a des solutions spéciales parmi lesquelles se trouvent les solutions harmoniques. L'équation transformée est une équation E_5. Or, les cinq solutions dont la somme des carrés est nulle sont les coordonnées pentasphériques d'une surface isothermique rapportée à ses lignes de courbure (Darboux).

La méthode précédente permet donc de déduire des équations harmoniques une classe nouvelle de surfaces isothermiques.

De Jonquières. — Au sujet d'une précédente Communication relative à quelques propriétés des racines primitives et des racines secondaires des nombres premiers. (374).

L'auteur justifie trois propositions qu'il avait énoncées par induction dans sa dernière Note (22 juin 1896).

Painlevé. — Sur la transformation des équations de la Dynamique. (392-395).

M. Painlevé revient sur le problème de la transformation des équations de Lagrange.

Il considère exclusivement les systèmes d'équations de Lagrange où les forces Q_i ne dépendent que des paramètres $x_1, \ldots, x_n$ et où la force vive $\frac{ds^2}{dt^2}$ est une forme quadratique en $x'_1, \ldots, x'_n$, indépendante du temps. Soient

$$(A) \quad [ds^2, Q_i], \qquad (A_1) \quad [ds_1^2, Q'_i]$$

deux tels systèmes. Ces systèmes sont dits *correspondants* s'ils admettent les mêmes trajectoires.

Quand les forces Q_i ne sont pas toutes nulles, deux cas sont à distinguer, suivant que les géodésiques de ds^2 et de ds_1^2 coïncident ou non; (A) et (A_1) sont dits *correspondants de première espèce* dans le premier cas, *de seconde espèce* dans le second. Dans le premier cas, à tout système de force Q_i on peut associer des forces Q'_i telles que (A) et (A_1) se correspondent, et l'on passe de (A) à (A_1) par un changement de variables

$$dt = \lambda(x_1, \ldots, x_n)\, dt_1.$$

Le problème de la formation de tous les correspondants de première espèce d'un système donné (A) a été résolu récemment par M. Levi-Civita (*Ann. di Matematica* 1896). M. Painlevé résout le même problème pour les correspondants de deuxième espèce. Le calcul de tous les correspondants d'un système (A) donné n'exige jamais que l'intégration d'équations linéaires.

Appliquées au cas $n = 2$, les propositions établies par M. Painlevé permettent de former explicitement tous les correspondants de seconde espèce. Le résultat s'énonce ainsi :

Soit un système (ds^2, U) et soit (A′) un de ses correspondants de première espèce, (A'_1) un correspondant de première espèce de

$$\left[(U + h)\, ds^2, \frac{1}{U + h}\right];$$

les deux systèmes (A′) et (A'_1) sont correspondants de deuxième espèce, et l'on obtient par ce procédé tous les correspondants de deuxième espèce.

De là résulte la formation, pour $n = 2$, de tous les systèmes (A) dont les trajectoires admettent une transformation infinitésimale, et plus généralement de tous les systèmes (ds^2, Q_i), (ds^2, Q'_i) tels que les trajectoires du premier se déduisent de celles du second par un changement des variables $x_1, x_2, \ldots$.

Pour $n > 2$, les correspondants de première espèce de deux systèmes (T, U), $[(U + h)T, U]$ forment encore une classe remarquable de correspondants de deuxième espèce.

Siacci. — Sur une proposition de Mécanique. (395-396).

M. Siacci signale l'inexactitude de cette proposition, énoncée dans la *Mecanique analytique* (4e édit., t. I, p. 70) :

« De toutes les situations que prend successivement le système, celle où il a la plus grande et la plus petite force vive est aussi celle où il le faudrait placer d'abord pour qu'il restât en équilibre. »

C'est la réciproque de cette proposition qui est vraie.

Serret (P.). — Sur une double série récurrente de points toujours homocycliques et de cercles toujours en collinéation, attachés aux polygones d'ordre 3, 4, 5, ..., résultant de ν droites indépendantes, employées successivement dans un ordre donné. (396-399).

M. P. Serret retrouve, comme application de sa théorie des équilatères d'ordre quelconque, mais avec des propriétés nouvelles et par une analyse ne portant que sur des réalités concrètes, la même série si remarquable de points et de cercles rapportés par Salmon et obtenus en premier lieu par Clifford, grâce à la considération des points imaginaires de l'infini.

De Jonquières. — Au sujet des nombres premiers dont un nombre quelconque donné ne peut être racine. (405-406).

Serret (P.). — Sur une classe de propositions analogues au théorème Miquel-Clifford et sur les propriétés qui en résultent pour les polygones de 5, 6, 7, 11, 12 côtés circonscrits à l'hypocycloïde de module $\frac{1}{3}$. (415-418).

La plus importante de ces propositions donne la solution du problème suivant :

Trouver la condition que doit remplir le pentagone $T_1, T_2, \ldots, T_5$ pour que le cercle de Miquel qui lui correspond dégénère en droite.

Cette solution est que le pentagone consideré soit circonscriptible à l'hypocycloïde de module $\frac{1}{3}$. Or, une telle hypocycloïde est déterminée par quatre de ses tangentes : d'où la propriété de cinq tangentes à la courbe, que les foyers de trois quelconques des paraboles inscrites à quatre d'entre elles forment toujours trois points en ligne droite. Ceci permet, quatre tangentes à l'hypocycloïde étant données, d'en tracer une cinquième.

Serret (P.). — Sur l'emploi d'un cercle fixe, dérivé d'un groupe quelconque de sept tangentes d'une conique, pour définir *a priori* le cercle dérivé de sept droites quelconques. (442-443).

Stouff. — Sur les lois de réciprocité. (486-488).

On sait qu'une des démonstrations de la loi de réciprocité dues à Gauss repose sur le partage en deux classes des restes par rapport à un nombre donné.

M. Stouff cherche à généraliser cette démonstration pour trouver la valeur du symbole $\left[\frac{m}{f(\alpha)}\right]$, où m est un entier premier non complexe, α une racine d'ordre m de l'unité, $f(\alpha) = \sum_{i=1}^{i=3p} a_i \alpha^i$ un entier complexe premier.

Il démontre que ce symbole ne dépend que des restes des α_i par rapport à certaines puissances de m, puissances dont les exposants ne dépendent aussi que de m.

Delassus. — Sur les systèmes algébriques et leurs relations avec certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. (546-548).

Soit Σ un système différentiel à une inconnue z et à m variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et dont chaque équation $\Phi = 0$ a pour premier membre une fonction linéaire, homogène et à coefficients constants des dérivées partielles d'un même ordre de z.

Soit S le système algébrique, homogène et à m inconnues, obtenu en remplaçant dans toutes les équations Φ chaque dérivée $\frac{\partial^p z}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$ par le monome correspondant $x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$.

Il y a entre Σ et S des relations très étroites, celle-ci entre autres :

Dès que, par un procédé quelconque, on connaît les degrés des diverses multiplicités qui composent la solution générale de S, on connaît par là même le nombre et la nature des fonctions arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale de Σ.

Ou, d'une façon plus précise, en considérant les S comme des surfaces en coordonnées homogènes à $m-1$ dimensions :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale de Σ contienne $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-2}, \beta_{m-1}$ fonctions arbitraires à $m-1, m-2, \ldots, 2, 1$, variables respectivement, est que l'intersection complète des surfaces S se compose de multiplicités à $m-2, m-3, \ldots, 1, 0$ dimensions de degrés respectifs $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-2}, \beta_{m-1}$.

Borel. — Sur la région de sommabilité d'un développement de Taylor. (548-549).

L'auteur poursuit le développement de sa théorie de la sommation des séries divergentes.

« Étant donné un développement de Taylor, ordonné suivant les puissances de z, il est sommable dans toute région intérieure au polygone convexe qu'on obtient en joignant à l'origine chaque point singulier, en menant à chaque droite ainsi obtenue une perpendiculaire par le point singulier correspondant et en supprimant les portions du plan situées au delà de ces perpendiculaires par rapport au point $z = 0$. »

On peut utiliser cette proposition pour rechercher les points singuliers de la fonction.

En particulier, pour qu'une série de Taylor admette son cercle de convergence comme coupure, il est nécessaire et suffisant que sa région de sommabilité ne dépasse nulle part ce cercle.

Borel. — Sur l'extension aux fonctions entières d'une propriété importante des polynomes. (556-557).

Si G_i et H_j sont des polynomes tels qu'aucune des différences $H_i - H_j$ ne se réduise à une constante, l'identité

$$G_1(z)e^{H_1 z} + G_2(z)e^{H_2 z} + \ldots + G_n(z)e^{H_n z} = 0$$

n'est possible que si tous les G sont nuls.

Cette propriété subsiste si les G et les H sont des fonctions entières telles que, pour $|z| = r$, le module de $H_i - H_j$ dépasse $\varphi(r)$, et que, pour r suffisamment grand, on ait

$$\log\varphi(r) > |\log\psi(r)|^{\alpha},$$

$e^{\psi(r)}$ étant le maximum du module de tous les G et α un nombre réel plus grand que 1.

De là, M. Borel déduit une généralisation très étendue du théorème de M. Picard dont il a récemment donné une démonstration nouvelle.

Craig. — Sur une suite d'équations linéaires aux dérivées partielles provenant de la théorie des surfaces. (634-636).

Désignant par u, v les paramètres des lignes de courbure et par ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure principaux correspondant aux lignes $u = \text{const.}$ et $v = \text{const.}$, par R_1 et R_2 les rayons de courbure géodésique de ces lignes, on a

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\sqrt{E}}{\rho_1} = \frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{\sqrt{G}}{\rho_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\sqrt{G}}{\rho_2} = \frac{\sqrt{G}}{R_2}\frac{\sqrt{E}}{\rho_1}.$$

On déduit facilement de là que $\frac{1}{\rho_1}$ et $\frac{1}{\rho_2}$ sont solutions particulières des équations

$$(E_{0,1}) \quad \frac{\partial^2\varphi_{0,1}}{\partial u\,\partial v} - \frac{\sqrt{G}}{R_2}\frac{\partial\varphi_{0,1}}{\partial u} - \left(\frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\sqrt{G}}{R_2} + \frac{\sqrt{E}}{R_1}\right)\frac{\partial\varphi_{0,1}}{\partial v} = 0,$$

$$(E_{0,2}) \quad \frac{\partial^2\varphi_{0,2}}{\partial u\,\partial v} - \left(\frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\sqrt{E}}{R_1} + \frac{\sqrt{G}}{R_2}\right)\frac{\partial\varphi_{0,2}}{\partial u} - \frac{\sqrt{E}}{R_1}\frac{\partial\varphi_{0,2}}{\partial v} = 0.$$

Si maintenant on forme les deux suites de Laplace

$$(E_{-1,1}), \quad \ldots, \quad (E_{-i,1}), \quad (E_{0,1}), \quad (E_{1,1}), \quad \ldots, \quad (E_{i,1}), \quad \ldots$$

$$(E_{-1,2}), \quad \ldots, \quad (E_{-i,2}), \quad (E_{0,2}), \quad (E_{1,2}), \quad \ldots, \quad (E_{i,2}), \quad \ldots$$

on reconnaît, avec M. Craig, que les équations (E_{i1}) et $(E_{i\,1,-1})$ des deux suites sont équivalentes, c'est-à-dire admettent les mêmes invariants.

On a pour les invariants les relations

$$h_{i,-1,2} \quad h_{i,1} \quad \frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} \quad \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} \log \frac{G^{\frac{i}{2}}}{R_1^i} h_{1,1}^{i-1} h_{2,1}^{i\ 2} \ldots h_{i\ 1,1}$$

$$\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} - \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} \log \frac{G^{\frac{i}{2}}}{R_1^i} h_{0,2}^{i-1} h_{1,2}^{i\ 2} \ldots h_{i\ 2,2},$$

$$h_{i,-1,2} \quad h_{i,1} \quad \frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} - \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} \log \frac{E^{\frac{i}{2}}}{R_2^i} h_{-1,1}^{i-1} h_{2,1}^{i\ 2} \ldots h_{-(i-1),1}$$

$$\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} - \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} \log \frac{E^{\frac{i}{2}}}{R_2^i} h_{-2,2}^{i\ 1} h_{-3,2}^{i-2} \ldots h_{i,2}.$$

L'étude des équations (E_{01}) ou (E_{02}) est ramenée dès lors à celle des invariants h_i.

Painlevé. — Sur les singularités des équations de la Dynamique. (636-639).

Une singularité assez inattendue des équations de la Dynamique c'est que, le temps t tendant vers une certaine valeur t_1, le système S ne tend vers aucune position limite ni même vers l'infini.

Exemple : Un point libre de masse 1, mobile dans le plan des xy, est soumis à la force

$$X = (x + y)\omega^2, \qquad Y = (x - y)\omega^2.$$

Ce système comporte les mouvements

$$x = \sin \log (t_1 - t), \qquad y = \cos \log (t_1 - t).$$

En appliquant au domaine réel les résultats qu'il a obtenus pour les équations différentielles analytiques, M. Painlevé arrive à la proposition suivante :

Admettons qu'il n'existe pas de positions singulières de S à distance finie et que les forces dérivent d'un potentiel $U(x_1, \ldots, x_n)$ n'ayant qu'une valeur pour une position S. R désignant la distance maxima à l'origine des points de S pour une certaine position du système, admettons de plus que $\frac{U}{R^2}$ reste inférieur à un nombre fini A pour toute position de S. Quand t tend vers t_1 (quel que soit t_1), les x_i, x_i' tendent vers des valeurs finies déterminées; les $x_i(t)$ peuvent être développées en séries de polynomes

$$x_i(t) = \sum_{r=0}^{r=\infty} P_r^i(t)$$

convergentes pour t quelconque, séries dont les coefficients successifs se calculent en fonction des conditions initiales par de simples différentiations comme ceux d'une série de Taylor.

Guyou. — Horizon gyroscopique de l'amiral Fleuriais. (664-666).

L'*horizon gyroscopique* de l'amiral Fleuriais est un instrument d'une grande perfection destiné à suppléer à l'horizon de la mer par la mesure des hauteurs des astres par temps de brume et de nuit.

La théorie mathématique de l'instrument, donnée par M. Boule, montre que, par l'effet de la rotation de la Terre, la verticale du cône de précession décrit par l'axe du gyroscope est inclinée sur la verticale de la gravité d'un angle proportionnel au cosinus de la latitude. Le gyroscope Fleuriais fournit ainsi un moyen très simple de mettre en évidence les effets de la rotation de la Terre.

Stæckel. — Sur la déformation des surfaces. (677-680).

L'auteur rappelle d'abord un théorème général dû au géomètre russe Peterson :

Soient $S_1(x_1, y_1, z_1)$ et $S_2(x_2, y_2, z_2)$ deux surfaces applicables l'une sur l'autre; soient $p = \text{const.}$ et $q = \text{const.}$ les équations du système conjugué commun à S_1 et S_2; soient enfin P et Q deux fonctions de p et q qui satisfont aux équations différentielles

$$\frac{\partial P}{\partial q} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} (P - Q) = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial p} - \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} (Q - P) = 0;$$

alors, les équations

$$d\xi_1 = P \frac{\partial x_1}{\partial p} dp - Q \frac{\partial x_1}{\partial q} dq, \qquad d\xi_2 = P \frac{\partial x_2}{\partial p} dp - Q \frac{\partial x_2}{\partial q} dq,$$

$$d\eta_1 = P \frac{\partial y_1}{\partial p} dp - Q \frac{\partial y_1}{\partial q} dq, \qquad d\eta_2 = P \frac{\partial y_2}{\partial p} dp - Q \frac{\partial y_2}{\partial q} dq,$$

$$d\zeta_1 = P \frac{\partial z_1}{\partial p} dp + Q \frac{\partial z_1}{\partial q} dq, \qquad d\zeta_2 = P \frac{\partial z_2}{\partial p} dp - Q \frac{\partial z_2}{\partial q} dq$$

définissent deux surfaces $\Sigma_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ et $\Sigma_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ qui sont elles-mêmes applicables l'une sur l'autre.

M. Stæckel se sert de ce théorème pour montrer qu'à l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial p \, \partial q} = [2 k^2 \operatorname{sn}^2 (p - q, k) - 1] \theta$$

on peut faire correspondre par des quadratures une famille de surfaces applicables.

Ces surfaces ont des propriétés intéressantes. En se déformant, elles conservent le même système conjugué; ces lignes conjuguées sont des géodésiques.

Goursat. — Sur la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. (680-683).

Pour appliquer à une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes la méthode de M. Darboux (*Ann. de l'École*

Normale, 1870), il faut d'abord chercher s'il existe des combinaisons intégrables pour les équations différentielles des caractéristiques d'ordre supérieur. M. Goursat communique au sujet de ces combinaisons intégrables un certain nombre de propositions destinées à en faciliter la recherche.

Pépin (*le P.*). — Formes linéaires des diviseurs de $x^2 \mp A$. (683-686).

Démonstration nouvelle de trois théorèmes de M. de Jonquières.

De Saussure. — Sur une Géométrie de l'espace réglé. (734-737).

On peut considérer l'espace réglé comme la représentation de la surface ponctuelle d'une sphère imaginaire de rayon i. Si P est la plus courte distance de deux droites de l'espace, Q leur angle et I un symbole unité, on dira que $(P + QI)$ est le *distangle* et $\left(\frac{P + QI}{I}\right)$ le *codistangle* formé par ces droites, et ces quantités complexes seront considérées respectivement comme des mesures linéaires et angulaires de l'intervalle compris entre les deux droites. Pour déduire des résultats de ces définitions, il faut pouvoir soumettre le symbole I (qui est de la dimension d'une longueur) aux règles ordinaires du calcul. C'est ce qui est effectivement possible, comme le montre M. R. de Saussure.

Pépin (*le P.*). — Formes linéaires des diviseurs $x^2 \pm A$ (*suite*). (737-740).

Duplaix. — Sur la résistance des ponts sous le passage de convois périodiques, notamment de ceux prévus par le règlement du 29 août 1891. (740-745).

Un convoi périodique est constitué par une série de convois partiels identiques et disposés à la suite les uns des autres à des intervalles égaux λ.

La constitution particulière des convois périodiques facilite le calcul des moments maxima et des flèches qu'ils développent dans les poutres droites à une travée. A cet égard, les travées multiples de la période λ d'un convoi périodique illimité jouissent de propriétés très simples.

Dans ce cas, la valeur du moment de flexion dans les sections, correspondant aux points de division de la travée en périodes, est indépendante de la position du convoi.

Ce moment m est équivalent à celui que produirait, dans les mêmes sections, soit une charge fixe uniformément répartie et ayant par mètre carré une intensité égale au quotient du poids spécifique π du convoi par la période λ, soit un système de charges fixes et isolées, toutes égales à π et appliquées aux points de division de la travée en périodes.

Dans une section quelconque, le moment de flexion M est, à toute époque, égale à la somme : 1° du moment m; 2° du moment μ qui serait développé dans la section si l'on considérait la petite travée obtenue en détachant de la poutre la période qui renferme cette section.

Andoyer. — Sur l'extension que l'on peut donner au théorème de Poisson relatif à l'invariabilité des grands axes. (790-793).

En recherchant d'une façon précise sous quelle forme il est possible de généraliser les théorèmes de Lagrange et Poisson relatifs à l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires, M. Andoyer est arrivé à des résultats qui s'appliquent à un problème très général dont les différentes questions qui se posent en Mécanique céleste ne sont que des cas particuliers.

Lémeray. — Sur la convergence des substitutions uniformes. (793-794).

On sait que, $f(x)$ désignant une fonction holomorphe, les fonctions $f^2(x)$, $f^3(x)$, ..., obtenues par l'itération de la substitution $[x, f(x)]$, tendent vers une limite a, racine de l'équation $f(x) - x = 0$, si pour $x = a$ le module de la dérivée de $f(x)$ est inférieur à l'unité et si x est pris dans une région convenable autour de a.

M. Lémeray indique à quelles conditions la convergence a lieu lorsque le module de $f'(x)$ est juste égal à l'unité.

Craig. — Sur les surfaces à lignes de courbure isométriques. (794-795).

De Saussure. — Sur une Mécanique réglée. (796-799).

Les principes de Géométrie réglée que l'auteur a exposés dans sa précédente Communication s'appliquent sans modification à la Mécanique.

Fabry. — Sur les courbes algébriques à torsion constante. (865-867).

Une courbe algébrique à torsion constante τ est représentée par les équations

$$x = \tau \int \frac{l\,dk - k\,dl}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$y = \tau \int \frac{h\,dl - l\,dh}{h^2 + k^2 + l^2},$$

$$z = \tau \int \frac{k\,dh - h\,dk}{h^2 + k^2 + l^2},$$

où h, k, l sont trois polynomes en t, sans facteurs communs, tels que tous les résidus de x', y', z' soient nuls.

Σh^2 peut avoir une racine double $t = a$. Alors $\Sigma hh'$, $\Sigma hh''$, $\Sigma hh'''$ s'annulent pour $t = a$.

Réciproquement, si Σh^2, $\Sigma hh'$, $\Sigma hh''$, $\Sigma hh'''$ s'annulent pour $t = a$, $\Sigma h'^2$ n'étant pas nul, on voit de même que les trois résidus sont nuls.

D'autre part, Σh^2 ne doit avoir aucune racine triple, et, si la courbe est réelle, il doit y avoir une racine au moins quadruple.

Marotte. — Sur une application de la théorie des groupes continus à l'étude des points singuliers des équations différentielles linéaires. (867-870).

S'inspirant des idées de Galois et de M. Picard, l'auteur montre comment on peut définir, dans le cas général, un groupe continu algébrique de transformations linéaires dont les invariants différentiels caractérisent complètement la nature des singularités autour du point a.

Soit donc une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels en x et soit $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un système fondamental d'intégrales. La combinaison

$$V = u_1 y_1 + \ldots + u_n y_n,$$

où les u sont des fonctions rationnelles arbitraires, vérifie une équation linéaire à coefficients rationnels, d'ordre n^2,

$$(1) \qquad \frac{d^{n^2} V}{dx^{n^2}} + P_1 \frac{d^{n^2-1} V}{dx^{n^2-1}} + \ldots + P_{n^2} V = 0.$$

Il arrivera, en général, que certaines solutions de (1) vérifieront une équation

$$(2) \qquad f\left[(x), V, \frac{dV}{dx}, \ldots, \frac{d^p V}{dx^p}\right] = 0,$$

entière par rapport à V et à ses dérivées, et dont les coefficients sont des fonctions *déterminées* au point a, c'est-à-dire admettant a pour point ordinaire ou pour pôle.

Parmi toutes les équations f on considère celle qui est d'ordre moindre et de moindre degré en $\frac{d^p V}{dx^p}$. On démontre que l'intégrale générale de celle-là appartient à l'équation (1).

De plus, les p constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ qui figurent dans cette intégrale générale y entrent algébriquement. Soient $y_1, y_2, \ldots, y_n$ le système fondamental correspondant à une solution particulière V_0 et $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ le système fondamental correspondant à l'intégrale générale V. On a

$$\begin{aligned} Y_1 &= a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n &= a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n. \end{aligned}$$

Les quantités a dépendent algébriquement de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, et ces équations définissent un groupe algébrique à p paramètres.

Ainsi se trouve défini un groupe g_a attaché à la singularité a. Ce groupe possède les deux propriétés fondamentales suivantes, déjà relevées par M. Klein dans le cas particulier où tous les points singuliers de l'équation sont réguliers :

1° Toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, déterminée au point a, reste invariable quand on effectue sur $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les substitutions du groupe g_a;

2° Toute fonction rationnelle de $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ et de leurs dérivées, qui reste invariable par les substitutions du groupe g_a, est une fonction de x, déterminée au point a.

Les divers groupes g_a, g_b, ..., attachés aux points singuliers a, b, ... de l'équation différentielle, sont des sous-groupes du groupe de transformations G considéré par M. Picard.

Ce groupe G est le plus petit groupe algébrique contenant le groupe de monodromie et les groupes g_a, g_b, ...

Painlevé. — Sur les singularités des équations de la Dynamique et sur le problème des trois corps. (871-873).

L'auteur établit, touchant les positions singulières d'un système matériel en mouvement, des propositions générales dont nous ne relaterons que les conséquences relatives au problème des n corps.

Quand le temps croît à partir de $t = 0$, ou bien les n corps occupent à chaque instant des positions déterminées et distinctes avec des vitesses déterminées et finies;

Ou bien, quand t tend vers t_1, deux au moins des n corps tendent vers le même point déterminé de l'espace; il y a choc à l'instant t_1;

Ou bien, quand t tend vers t_1, ν (quatre au moins) des n corps ne tendent vers aucune position limite; le minimum des distances mutuelles de ces ν points tend alors vers zéro, sans qu'aucune de ces distances tende constamment vers zéro.

D'après cela, trois hypothèses sont possibles suivant les conditions initiales :

Ou bien les distances mutuelles des n corps restent toujours supérieures à une quantité positive α; les paramètres $x_i(t)$, qui déterminent leurs positions peuvent se développer sous forme de séries entières par rapport à $\tau = \frac{1 - e^{\lambda t}}{1 + e^{-\lambda t}}$, λ étant une constante;

Ou bien la limite inférieure des distances mutuelles entre 0 et t tend vers zéro quand t croît indéfiniment sans s'annuler jamais; les $x_i(t)$ se laissent développer en séries de polynomes

$$(1) \qquad x_i(t) = \sum P_i(t, x_1^0, \ldots, x_n^0, x_1'^0, \ldots, x_n'^0);$$

Ou bien cette limite inférieure tend vers zéro quand t tend vers t_1; les $x_i(t)$ peuvent être développés sous la forme (1) pour $t < t_1$, mais ne peuvent être calculés au delà.

Quand n est égal à 3, la dernière circonstance ne se présente que si deux au moins des trois corps se choquent à l'instant t_1.

Le problème des trois corps s'intègre donc à l'aide des séries (1) si l'on excepte les conditions initiales pour lesquelles deux des points se choquent au bout d'un temps fini t_1 en un point déterminé de l'espace.

Liouville (R.). — Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. (874-876).

Le mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini, sous l'action de forces nulles, est déterminé par un système d'équations différentielles de nature assez compliquée, dont on connaît cependant trois cas d'intégration indiqués par Clebsch.

M. R. Liouville indique deux cas bien plus étendus, comprenant les cas

particuliers découverts par Clebsch, et où le calcul de l'intégrale résulterait en principe d'une théorie très simple. Malheureusement le nombre des termes dont se compose l'intégrale, termes qu'il faut déduire les uns des autres, est si grand que le calcul direct paraît impraticable.

Poincaré. — Sur les solutions périodiques et le principe de la moindre action. (915-918).

La théorie des solutions périodiques peut dans certains cas être rattachée au principe de la moindre action.

Si l'on suppose trois corps a, b, c se mouvant dans un plan et s'attirant en raison inverse d'une certaine puissance de la distance, on peut imaginer une classe de trajectoires fictives de ces trois corps, c'est-à-dire ne satisfaisant pas aux conditions du mouvement, mais soumises aux conditions suivantes :

1° Les distances des trois corps a, b, c seront des fonctions périodiques de période $t_1 - t_0$;

2° Entre les époques t_0 et t_1, la droite bc aura tourné d'un angle donné ω_1; la droite ac d'un angle donné $\omega_1 + 2K_2\pi$; la droite ab d'un angle $\omega_1 + 2K_3\pi$ (K_2, K_3 entiers donnés).

Une classe de trajectoires fictives se trouve ainsi définie par trois constantes entièrement arbitraires t_0, t_1, ω_1 et par deux entiers arbitraires K_2 et K_3.

Or, l'action hamiltonienne

$$J = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

restant toujours positive admettra un minimum, et, en vertu du principe de la moindre action, la trajectoire qui correspondra à ce minimum devra être une trajectoire effective qui, d'après sa définition, correspondra à une solution périodique du problème.

M. Poincaré démontre que, dans chaque classe de trajectoires, il y en a une qui correspond à un minimum de F; il suffit de faire voir qu'en faisant varier d'une manière continue la trajectoire fictive, on ne peut la faire passer d'une classe à l'autre sans que J devienne infinie. Le raisonnement ne s'applique que si l'attraction est du même ordre de grandeur que l'inverse du cube de la distance ou d'un ordre plus grand. Dans tous les cas, il y aura une infinité de solutions périodiques. Dans le cas de la loi de Newton, on ne peut plus affirmer qu'il y a une solution périodique dans chaque classe.

Marotte. — Sur les singularités des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre. (933-936).

M. Drach a étendu les idées de Galois aux équations aux dérivées partielles dont les intégrales dépendent d'un nombre fini d'*éléments fondamentaux*, et a défini pour ces équations un groupe qui joue le même rôle que le groupe de transformations de M. Picard pour les équations linéaires.

L'étude des singularités des équations considérées par M. Drach et celle des singularités d'une équation linéaire ne peuvent-elles être rattachées aux mêmes principes? C'est en effet ce qui a lieu, comme le montre M. Marotte.

A tout domaine singulier (point ou courbe) d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre est attaché un groupe, fini ou infini, dont les invariants différentiels déterminent complètement la forme analytique des intégrales au voisinage du domaine singulier.

Cotton. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables. (936-938).

Il s'agit d'une classification des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. Cette classification repose sur la considération des deux invariants H et K, dont le calcul ne suppose pas intégrée l'équation des caractéristiques. Voici comment on formera ces invariants.

L'ensemble des termes du second ordre de l'équation peut être considéré comme l'ensemble des termes du second ordre d'un paramètre différentiel du deuxième ordre correspondant à un ds^2. Soit

$$\sum_{ij} a_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad (i, j = 1, 2)$$

ce ds^2, Δ son discriminant, et

$$\Delta_2(w) = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\Delta^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial w}{\partial x_j}\right)$$

le paramètre différentiel du second ordre (A_{ij} étant le coefficient de a_{ij} dans Δ). L'équation peut alors s'écrire

$$\Delta_2(w) + 2b_1\frac{\partial w}{\partial x_1} + 2b_2\frac{\partial w}{\partial x_2} + cw = 0.$$

En posant

$$l_1 = a_{11}b_1 + a_{12}b_2, \qquad l_2 = a_{21}b_1 + a_{22}b_2,$$

on aura

$$H = \frac{\partial l_2}{\partial x_1} - \frac{\partial l_1}{\partial x_2},$$

$$K = \sum_{ij} \Delta^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{ij}\Delta^{-\frac{1}{2}} l_j\right) + \sum_{ij} a_{ij} b_i b_j - c.$$

H et K sont des invariants relativement à la transformation de l'équation par changement de w en $\lambda w'$ et division du résultat par λ. Par un changement de variables, H se reproduit multiplié par le déterminant fonctionnel de la substitution, K reste le même $\left(\text{ainsi que } \frac{H}{\sqrt{\Delta}}\right)$. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation par un facteur $\rho(x, y)$ $\left(\text{le } ds^2 \text{ correspondant devenant } \frac{ds^2}{\rho}\right)$, H se reproduit identiquement, K est multiplié par ρ.

Dans l'équation réduite à la forme de Laplace

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

H et K ont les expressions suivantes

$$H = h - k, \qquad 2K = h + k,$$

h et k étant les invariants de M. Darboux (*Théorie des surfaces*, 2e Vol., Chap. II).

Bricard. — Sur un déplacement remarquable. (939-940).

Soient dans l'espace deux coniques quelconques C et C'. On établit entre ces deux courbes une correspondance homographique quelconque telle qu'à cinq points m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, pris sur la première, correspondent les cinq points m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5. Si C' se déplace de manière que m'_1, m'_2, m'_3, m'_4, m'_5 restent sur des sphères fixes de centres respectifs m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, tout point m'_6 de C' décrira une ligne appartenant à une sphère fixe dont le centre m_6 (homologue de m'_6) appartient à C.

Ce théorème général est susceptible de divers cas particuliers intéressants.

Mannheim. — Sur le paraboloïde des huit droites et les nappes des développées de surfaces. (983-986).

Entre les droites de courbure d'une surface et celles des nappes de sa développée, il existe une dépendance exprimée géométriquement par un paraboloïde que M. Mannheim a antérieurement nommé *paraboloïde des huit droites* et qu'il définit de la manière suivante :

Soient (S) une surface, (B) et (C) les deux nappes de sa développée. Des deux centres de courbure b, c, situés sur une normale A à (S), on mène les normales B, C à (B) et (C) : *ce sont des droites de courbure*. De chacun des centres de courbure d, e (situés sur B) et g, h (situés sur C), partent les droites de courbure D, E, G, H.

Les droites B, C, D, E étant supposées données, le paraboloïde (P) des huit droites se détermine ainsi : il a pour plan directeur un plan perpendiculaire à A; ses directrices sont dd' qui joint d au point où C est coupée par le plan (B, E) et ee' qu'on obtient de même au moyen du plan (B, D).

Si donc on donne les droites de courbure d'une surface et seulement celles de l'une de ses nappes, le paraboloïde (P) est déterminé; mais (P) ne suffit pas pour déterminer les droites de courbure de l'autre nappe.

M. Mannheim indique néanmoins ce qu'il permet de connaître relativement à cette dernière nappe.

Le Roy. — Sur le problème de Dirichlet et les fonctions harmoniques fondamentales attachées à une surface fermée. (986-988).

Supposant le principe de Dirichlet établi, l'auteur se propose d'obtenir l'expression de la fonction harmonique qui prend des valeurs données Φ sur la frontière S d'un domaine connexe T, au moyen d'une série de fonctions harmoniques simples. On suppose que la fonction Φ admet des dérivées de tout ordre et que le domaine T est limité par un nombre fini de surfaces composées d'une seule nappe analytique régulière.

Par des raisonnements semblables à ceux que M. Poincaré a employés dans une question analogue, M. Le Roy démontre l'existence de *fonctions harmoniques fondamentales* W_p, ou potentiels newtoniens de simples couches, vérifiant les relations

$$\frac{dW_p}{dx} = \frac{dW_p}{dx} = \xi_p W_p, \qquad \int_S W_p\, d\omega = 1, \qquad \int_S W_p W_q\, d\omega = 0,$$

dans lesquelles ξ_p est une constante faisant partie d'un ensemble dénombrable. On peut alors développer Φ en série de la forme

$$\Phi = \sum A_p W_p, \qquad A_p = \int_S \Phi W_p\, d\omega.$$

On voit que la solution se présente sous la forme d'un potentiel newtonien de simple couche.

Ce résultat peut être généralisé. On peut maintenant construire une fonction V, harmonique à l'extérieur de S, régulière à l'infini, vérifiant en tout point de S la relation

$$\frac{dV}{dx} = \frac{dV}{dx} = \frac{\partial V}{\partial t},$$

et se réduisant sur S à Φ pour $t = 0$. On a

$$V = \sum A_p W_p e^{\xi_p t}.$$

D'Ocagne. — Sur les équations représentables par trois systèmes linéaires de points cotés. (988-990).

Poincaré. — Sur une forme nouvelle des équations du problème des trois corps. (1031-1035).

Soient trois corps A, B, C s'attirant d'après la loi de Newton; soient x_1, x_2, x_3 les coordonnées de A, x_4, x_5, x_6 celles de B, x_7, x_8, x_9 celles de C; soit $m_1 = m_2 = m$ la masse de A, $m_4 = m_5 = m_6$ celle de B, $m_7 = m_8 = m_9$ celle de C; soit

$$F = \frac{m_4 m_7}{AB} + \frac{m_1 m_7}{AC} + \frac{m_1 m_4}{BC}, \qquad F = \sum \frac{x_i^2}{m} = 1.$$

Les équations du mouvement peuvent s'écrire sous la forme canonique

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y}, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}.$$

Il est permis, sans nuire à la généralité, de supposer le centre de gravité fixe, et l'on peut profiter de cette circonstance pour réduire le nombre des degrés de liberté. Des deux modes de réduction qui ont été proposés, l'un laisse une forme simple à la fonction perturbatrice, mais ne conserve pas aux intégrales la forme canonique; l'autre la leur conserve, mais donne à la fonction perturbatrice une forme plus compliquée.

C'est pourquoi M. Poincaré propose un troisième mode de réduction, consistant dans le changement de variables :

$$x'_1 = x_1 - x_3, \qquad x'_2 = x_2 - x_3, \qquad x'_3 = x_3 - x_4,$$
$$x'_4 = x_1 + x_3, \qquad x'_5 = x_5 + x_6, \qquad x'_6 = x_5 - x_6,$$
$$y'_i = m_i \frac{dx}{dt} \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Alors, la forme canonique des équations, ainsi que la forme des intégrales des aires, ne sera pas altérée, et la fonction F deviendra

$$F = \sum \frac{y'^2_i}{2m'_i} - U + \frac{y'_1 y'_4 + y'_2 y'_5 + y'_3 y'_6}{m_3}$$

en posant

$$m'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \qquad m'_4 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

La forme de la fonction perturbatrice sera, comme le montre l'auteur, tout aussi simple que dans le premier des modes de réduction dont il a été parlé.

Picard (*Ém.*). — Sur une classe de fonctions transcendantes. (1035-1037).

M. Picard a indiqué antérieurement une classe de transcendantes nouvelles. Partant d'une substitution birationnelle arbitraire relative à m lettres u, v, ..., w,

$$u' = R_1(u, v, \ldots, w),$$
$$v' = R_2(u, v, \ldots, w),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$w' = R_m(u, v, \ldots, w),$$

il a démontré l'existence d'une infinité de systèmes de m fonctions

$$f(z), \quad \varphi(z), \quad \ldots, \quad \psi(z),$$

uniformes dans tout le plan, n'ayant que des discontinuités polaires, admettant une période Ω et vérifiant les relations

$$f(z + \Omega') = R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\varphi(z + \Omega') = R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\psi(z + \Omega') = R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)].$$

Actuellement, l'auteur lève les diverses restrictions qu'il avait faites pour établir l'existence de ces transcendantes.

Borel. — Sur les séries de Taylor. (1051-1052).

Considérant une série de Taylor $\sum a_n z^n$, M. Borel appelle *fonction entière associée* la fonction $\sum \frac{a_n z^n}{n!}$. Pour une valeur fixe du module r de z, le mo-

dule de celle-ci atteint son maximum pour une valeur de son argument qui sera dite *argument principal*.

Cela posé, on a les théorèmes suivants :

1° Pour qu'une série de Taylor n'admette que des points singuliers isolés sur son cercle de convergence, il est nécessaire que, lorsque r augmente, l'argument principal de la fonction entière associée tende vers une ou plusieurs limites déterminées (chacune de ces limites est un point singulier de la fonction donnée sur son cercle de convergence).

2° Pour qu'une série de Taylor n'admette pas son cercle de convergence comme coupure, il est nécessaire que l'argument principal de la fonction associée, pour les valeurs de r qui dépassent un certain nombre r_0, soit constamment compris dans un intervalle fixe d'étendue inférieure à 2π.

De là résulte qu'en général le cercle de convergence est une coupure.

Le Roux. — Sur une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre. (1052-1054).

Il s'agit de l'équation

$$(1)\qquad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = \frac{1}{x-a}\frac{dz}{dx} + \frac{\varphi(x)}{x-a}\frac{dz}{dy} = 0.$$

Elle admet une intégrale dépendant d'un paramètre arbitraire

$$z(x, y, \alpha) = e^{\frac{y-y_0}{\alpha-a}} \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(x)\,dx}{\alpha - x}.$$

Cette intégrale possède la caractéristique singulière accidentelle $x = \alpha$. La caractéristique $x = a$, qui est singulière pour les coefficients, ne l'est plus pour $z(x, y, \alpha)$. L'existence d'une singularité accidentelle supprime ou modifie la singularité propre.

M. Darboux a fait voir que l'intégration générale des équations de Laplace revient au calcul d'une intégrale particulière, définie par des conditions initiales parfaitement déterminées. Cette fonction fondamentale est représentée, dans le cas des équations (1), par la formule

$$z(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{2i\pi}\int e^{\frac{y-y_0}{\alpha-a}\int_{x_0}^{x}\frac{\varphi(x)\,dx}{\alpha-x}} \frac{x_0 - a}{(a - x_0)(\alpha - a)}\,d\alpha,$$

où l'intégrale par rapport à α est évaluée dans le sens positif suivant un contour fermé simple renfermant la ligne $x_0 x$ sans la couper, mais ne contenant pas le point a.

Un cas particulier intéressant est celui où $\varphi(x)$ se réduit à une constante β. On a, dans ce cas,

$$z(x, y, \alpha) = e^{\frac{y-y_0}{\alpha-a}}\left(\frac{x-\alpha}{x_0-\alpha}\right)^{\beta}.$$

et, en supposant $\left|\frac{x-x_0}{x-a}\right| < 1$,

$$z(x, y, x_0, y_0) = \frac{x_0-a}{x-a}\sum\left(\frac{y-y_0}{x-a}\right)^n \frac{1}{1.2.3\ldots n} F\left(n+1, 1, 2, 1, \frac{x-x_0}{x-a}\right),$$

F désignant la série hypergéométrique.

Di Pirro. — Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique. (1054-1057).

L'auteur cherche et trouve tous les cas de mouvement dans lesquels il existe des intégrales homogènes orthogonales par rapport aux vitesses.

Il envisage un système matériel assujetti à des liaisons indépendantes du temps, les forces qui agissent sur ce système dérivant d'une fonction de force $U(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ où $q_1, q_2, \ldots, q_n$ sont les paramètres qui définissent la position du système.

Soit Φ le déterminant

$$\Phi = \begin{vmatrix} \varphi_{r1}(q_1, q_2, \ldots, q_r) & \varphi_{r2}(q_1, \ldots, q_r) & \ldots & \varphi_{r,n-r+1}(q_1, \ldots, q_r) \\ \varphi_{r+1}(q_{r+1}) & \varphi_{r+1,2}(q_{r+1}) & \ldots & \varphi_{r+1,n-r+1}(q_{r+1}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_{n1}(q_n) & \varphi_{n2}(q_n) & \ldots & \varphi_{n,n-r+1}(q_n) \end{vmatrix},$$

où $\varphi_{r1}, \varphi_{r2}, \ldots$ de la première ligne sont des fonctions arbitraires de $q_1, q_2, \ldots, q_r$, et les φ_{ks} des autres lignes des fonctions arbitraires de l'argument indiqué.

Soient

$$\Psi_s(q_1, \ldots, q_r), \quad (s = 1, 2, \ldots, r-1),$$
$$f_r(q_1, \ldots, q_r), \quad f_{r+1}(q_{r+1}), \quad \ldots, \quad f_n(q_n)$$

d'autres fonctions, également arbitraires, des arguments indiqués.

Cela posé, si l'expression de la force vive est de la forme

$$2T = \sum_{h=1}^{r-1} \Psi_h \frac{\Phi}{\Phi_{r1}} q_h'^2 + \sum_{k=r}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_{k1}} q_k'^2$$

et si la fonction des forces est définie par la formule

$$U = \frac{\Phi_{r1} f_r(q_1, \ldots, q_r)}{\Phi} + \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\Phi_{k1}}{\Phi} f_k(q_k),$$

il existe, outre l'intégrale des forces vives, $n-r$ autres intégrales homogènes quadratiques orthogonales de la forme $T_s - U_s = \text{const.}$, où

$$\left.\begin{aligned} T_s &= \frac{\Phi\Phi_{r,s-1}}{\Phi_{r1}^2}\sum_{p=1}^{r-1} \Psi_h q_h'^2 - \sum_{R=r}^{n} \frac{\Phi\Phi_{k,k-1}}{\Phi_{k1}^2} q_k'^2, \\ U_s &= \frac{\Phi_{r,s-1} f_r(q_1, \ldots, q_r)}{\Phi} - \sum_{k=r+1}^{n} \frac{\Phi_{k,s+1}}{\Phi} f_k(q_k) \end{aligned}\right\} (s = 1, 2, \ldots, n-r).$$

Pour $r = 1$, on retombe sur la classe indiquée par M. Stæckel.

A la suite de cette Communication, M. Appell fait remarquer que les résultats indiqués par M. di Pirro doivent être rapprochés de ceux de M. Lévi Civita qui a formé des classes de ds^2 admettant $(n-1)$, $(n-2)$, ..., 2 ou 1 intégrales quadratiques, qui d'ailleurs ne sont pas nécessairement réductibles à la forme orthogonale.

Poincaré. — Sur la méthode de Bruns. (1224-1228).

Bruns a démontré (*Acta mathematica*, t. XI) que le problème des trois corps n'admet pas d'autre intégrale algébrique que les intégrales connues. M. Poincaré signale certains cas d'exception au théorème de Bruns et rectifie certaines défectuosités de sa démonstration qui, d'ailleurs, n'en infirment pas la valeur.

Delassus. — Sur les transformations des systèmes différentiels. (1246-1248).

Dans une Communication antérieure, M. Delassus a indiqué une forme canonique des systèmes différentiels quelconques et un théorème général analogue à celui de Cauchy. Ce théorème, comme l'auteur le montre actuellement, permet de réunir sous un même point de vue plusieurs des résultats obtenus jusqu'à présent.

Parmi les propositions très générales auxquelles parvient l'auteur, en suivant cet ordre d'idées, il faut signaler celles-ci :

« Tout système canonique Σ permet de former une infinité de systèmes canoniques σ tels que, si l'on en connaît une intégrale particulière convenable, on puisse en déduire l'intégrale générale par des intégrations d'équations différentielles ordinaires. »

La connaissance de cette intégrale particulière pour un quelconque des systèmes σ permet d'intégrer tous les autres et Σ par des équations différentielles ordinaires.

« A tout système Σ dont on sait trouver l'intégrale générale correspond une infinité de systèmes σ, de plus en plus compliqués, que l'on sait intégrer complètement. »

Liapounoff. — Sur une série relative à la théorie des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques. (1248-1252).

On sait que l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\, y = 0,$$

où x est une variable réelle et $p(x)$ une fonction continue et périodique de x à période ω, a pour intégrale générale

$$y = C_1 z^{\frac{x}{\omega}} F_1(x) + C_2 z^{\frac{x}{\omega}} F_2(x),$$

C_1, C_2 étant deux constantes arbitraires et z une constante déterminée.

Dans la théorie de cette équation, le rôle principal appartient à une constante A

liée à ρ par l'égalité

$$\rho = A + \sqrt{A^2 - 1}.$$

On voit que, A étant une constante réelle dont le carré est plus petit que 1, toutes les solutions de l'équation (1) sont limitées, tandis que, dans les autres cas, il n'en est pas de même.

Pour le calcul approximatif de A, M. Liapounoff indique une méthode de développement en série qui le conduit à diverses propositions intéressantes relativement aux cas où A vérifie l'inégalité $A^2 < 1$.

Stekloff. — Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. (1252-1253).

M. Stekloff rappelle un cas d'intégrabilité indiqué par lui dans le tome XLII des *Mathematische Annalen* et qui ne semble pas rentrer dans ceux qu'a donnés récemment M. R. Liouville.

Avec les variables de Clebsch x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 les équations du mouvement d'un solide dans un liquide indéfini prennent la forme connue

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial T}{\partial y_2},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = x_3 \frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T}{\partial x_3} + y_2 \frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial T}{\partial y_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

où T désigne une forme quadratique définie positive de ces six variables. Ces équations admettent une quatrième intégrale algébrique, si T a la forme

$$2T = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2$$
$$+ 2a_{11} x_1 y_1 + 2a_{22} x_2 y_2 + 2a_{33} x_3 y_3 + A_1 y_1^2 + A_2 y_2^2 + A_3 y_3^2,$$

où

$$a_{11} = \sigma A_2 A_3, \qquad a_1 = \sigma^2 A_1 (A_2^2 + A_3^2),$$
$$a_{22} = \sigma A_3 A_1, \qquad a_2 = \sigma^2 A_2 (A_3^2 + A_1^2),$$
$$a_{33} = \sigma A_1 A_2, \qquad a_3 = \sigma^2 A_3 (A_1^2 + A_2^2),$$

σ étant une constante quelconque.

Depuis, M. Liapounoff a généralisé les conditions trouvées par M. Stekloff, et signalé un cas limite intéressant, caractérisé par

$$A_1 = A_2 = A_3 = A,$$

$$a_1 = \frac{(a_{22} - a_{33})^2}{A}, \qquad a_2 = \frac{(a_{33} - a_{11})^2}{A}, \qquad a_3 = \frac{(a_{11} - a_{22})^2}{A}.$$

D'Ocagne. — Sur l'emploi des systèmes réguliers de points cotés dans la représentation des équations. (1254-1255).

Le Roy. — Sur le problème des membranes vibrantes. (1258-1260).

Le problème des membranes vibrantes consiste à trouver une fonction con-

tinue $z(x, y, t)$ s'annulant sur un contour fermé C, vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

en tout point de l'aire plane A limitée par C, et telle que z et $\frac{\partial z}{\partial t}$ se réduisent, pour $t = 0$, à des fonctions données $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$.

M. Le Roy résout ce problème en faisant usage des fonctions $U_i(x, y)$ et des constantes ξ_i définies par M. Poincaré dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo* (1894).

Posant

$$a_i = \int_A \varphi U_i \, dw, \qquad b_i = \int_A \psi U_i \, dw,$$

il trouve que la fonction

$$z = \sum \left(a_i \cos \xi_i t + \frac{b_i}{\xi_i} \sin \xi_i t\right) U_i e^{-\xi_i \theta}$$

remplit les conditions prescrites lorsqu'on prend θ suffisamment petit, sauf qu'alors z et $\frac{dz}{dt}$, au lieu de se réduire rigoureusement pour $z = 0$ à des fonctions données, en approchent seulement autant qu'on veut.

Le problème des membranes peut donc être regardé comme résolu au point de vue physique.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XVIII, 1894 (1).

Tresse (*Ar.*). — Sur les invariants différentiels des groupes continus de transformations. (1-88).

Première Partie. — I. Considérant une multiplicité à n dimensions dans l'espace à $n + p$ dimensions, c'est-à-dire un système de fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut imposer à ces fonctions une série de conditions représentées par des équations aux dérivées partielles. De telles équations peuvent être en nombre infini, mais on peut toujours les considérer comme se déduisant d'un nombre fini d'entre elles par différentiation : suivant l'expression de l'auteur, tout système d'équations de cette espèce est forcément *limité*.

Il résulte, en particulier, de cette proposition que tout système d'équations aux dérivées partielles peut, par un nombre limité d'opérations, être transformé, soit en un système incompatible, soit en un système complètement intégrable.

II. Rappel des propriétés fondamentales des groupes. M. Tresse considère exclusivement ceux dont toutes les transformations vérifient un même système

(1) Voir *Bulletin*, t. XX_2, p. [illegible].

d'équations aux dérivées partielles entre les nouvelles variables, considérées comme fonctions des anciennes : système qui exprime les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une transformation appartienne au groupe. Ces équations, que l'on peut supposer en nombre limité (§ I), sont les *équations de définition* du groupe. Leur système reste invariant par les transformations du groupe, et par celles-là seulement.

Deuxième Partie. — I. Les conditions pour que deux multiplicités M, M′ (du même nombre de dimensions) soient *homologues* relativement au groupe, c'est-à-dire puissent être transformées l'une dans l'autre par une de ses transformations, s'expriment par des relations (E) entre : 1° les variables z, x qui définissent la multiplicité M et les dérivées partielles p des z par rapport aux x prises jusqu'à un ordre déterminé; 2° les variables analogues z', x' correspondant à la multiplicité M′ et les dérivées partielles (jusqu'au même ordre) p' des z' par rapport aux x'. On obtient ces relations en remarquant que les p' s'expriment par les z', x', z, x, p et les dérivées partielles des z', x' par rapport aux z, x, lesquelles peuvent s'éliminer entre les équations ainsi écrites et les équations de définition du groupe.

La propriété fondamentale de la notion de groupe (c'est-à-dire le fait que l'existence des relations (E) entre les multiplicités M et M′ d'une part, M′ et M″ de l'autre, entraîne l'existence des mêmes relations entre M et M″) permet d'établir que ces équations (E) peuvent, en général, être mises, par des opérations élémentaires, sous la forme

$$J = J',$$

J désignant une certaine fonction des z, x, p; J′ la même fonction des z', x', p'; en un mot, ces équations s'obtiennent en égalant, dans les deux multiplicités, les valeurs d'un certain nombre d'*invariants différentiels*.

Il y a exception lorsque la multiplicité M est *spéciale*, c'est-à-dire lorsqu'elle vérifie l'un ou l'autre de certains systèmes d'équations déterminés, lesquels sont invariants par les transformations du groupe, de sorte que la multiplicité M′ vérifie le même système spécial. Aux conditions ainsi écrites, on devra, pour exprimer que M et M′ sont homologues, joindre des conditions du même type que dans le cas général, c'est-à-dire obtenues en égalant les valeurs de certains invariants.

Ainsi, pour le groupe des déplacements plans, l'invariant différentiel le plus simple est la courbure; il cesse d'exister pour une catégorie de multiplicités spéciales, les droites isotropes.

II. Les mêmes résultats peuvent s'obtenir en partant des transformations infinitésimales du groupe, conformément aux méthodes de M. Lie. Les invariants sont les solutions de certains systèmes complets d'équations linéaires aux dérivées partielles formées à l'aide de ces transformations; les systèmes d'équations invariantes sont ceux qui admettent l'ensemble des transformations infinitésimales.

III. Lorsqu'on connaît un nombre suffisant d'invariants distincts, on peut en déduire d'autres d'un ordre différentiel plus élevé; il suffit de prendre les déterminants fonctionnels formés avec leurs dérivées totales par rapport aux variables indépendantes : le quotient de deux quelconques de ces déterminants fonctionnels donne encore un invariant.

Le procédé cesse de conduire à un résultat, lorsque les invariants initiaux ne sont pas distincts; aussi est-il préférable d'étudier, d'une manière générale, les *paramètres différentiels*, c'est-à-dire les opérations qui, appliquées à un invariant quelconque, donnent comme résultat un invariant : recherche qui peut être traitée comme une recherche d'invariants différentiels. La méthode ainsi obtenue n'est inapplicable que pour certaines multiplicités spéciales satisfaisant à des équations invariantes bien déterminées, au lieu que la première tombe en défaut pour des multiplicités satisfaisant à des équations qui dépendent de fonctions arbitraires.

Du théorème général démontré dans la première Partie résulte que tous les invariants peuvent se déduire d'un nombre limité d'entre eux par l'application répétée des opérations précédentes.

Application est faite à la déformation des surfaces.

Troisième Partie. — I. Les invariants s'obtiennent également par la considération de l'*élément réduit*. Un *élément* quelconque E, c'est-à-dire un système de valeurs des z, x, p (ces quantités étant dites les *coordonnées* de l'élément), étant donné, on nommera *élément réduit correspondant* celui des homologues de E qui satisfait à certaines conditions déterminées prises une fois pour toutes (et non invariantes par le groupe donné); par exemple, celles d'avoir le plus grand nombre possible de ses coordonnées égales à des constantes choisies arbitrairement. Les éléments homologues les uns des autres étant évidemment ceux qui ont le même élément réduit, les coordonnées non données de celui-ci donnent les invariants.

Il peut être utile d'opérer cette réduction en deux fois, en considérant d'abord l'élément réduit de E par un sous-groupe du groupe proposé; puis, réduisant à son tour cet élément réduit intermédiaire par rapport au groupe complet. Cette manière de procéder donne les invariants du groupe exprimés en fonction de ceux du sous-groupe.

II. Application au groupe des transformations conformes de l'espace (combinaison de tous les déplacements, homothéties, symétries et inversions possibles) et au groupe des transformations projectives; les deux invariants les plus simples obtenus pour ce dernier groupe sont les constantes caractéristiques de la surface tétraédrale osculatrice.

III. Étude de l'équation $y'' = a_0 y'^3 + a_1 y'^2 + b_1 y' + b_0$, où a_0, a_1, b_1, b_0 sont des fonctions de x et de y. Cette équation ne change pas de forme par une transformation ponctuelle quelconque : en particulier, la permutation de x et de y s'y traduit par une simple permutation des lettres a et b.

En cherchant les invariants de l'équation par le groupe des transformations ponctuelles, on est conduit, par quelques calculs simples, à former certaines combinaisons différentielles h et k. En égalant à zéro ces deux expressions, on a un système de relations invariantes; les équations spéciales qui vérifient ce système n'admettent pas d'invariant : ce sont celles qui peuvent être ramenées à la forme $y'' = 0$. Laissant de côté ce cas exceptionnel, on constate qu'on peut réduire l'équation de manière à avoir $h = 0$.

Les transformations qui n'altèrent pas cette condition forment un sous-groupe du groupe proposé, et, d'après ce qui précède, les invariants de ce sous-groupe (auxquels on parvient aisément) conduisent aux invariants cherchés.

Application à la recherche des conditions pour que l'on puisse ramener les coefficients a, b à ne contenir qu'une seule des deux variables.

Lindelof (*L.*). — Sur la théorie des caisses de pension (89-96).

Simplification apportée au calcul des dépenses, pour les caisses de retraite dans lesquelles le nombre des sociétaires reste constant (seul cas dans lequel le calcul puisse se faire avec rigueur). La méthode de M. Lindelöf permet d'évaluer les dépenses à prévoir pour les pensionnaires futurs sans passer par le calcul, plus ou moins incertain, du nombre de ces pensionnaires.

Padé (*H.*). — Sur les séries entières convergentes ou divergentes et les fractions continues rationnelles. (97-112).

Certaines séries entières divergentes peuvent être transformées en fractions continues convergentes (Laguerre); l'inverse pouvant d'ailleurs également se produire (Halphen). On est dès lors conduit à définir une fonction par les séries de fractions rationnelles approchées les plus générales possibles.

I. Soit

$$y = s_0 + s_1 x + s_2 x^2 + \ldots \qquad (s_0 \neq 0)$$

une série entière. p et q étant deux entiers quelconques, la fraction $\frac{U}{V}$, où U est un polynome de degré au plus égal à p, V un polynome de degré au plus égal à q, sera dite *fraction rationnelle approchée* correspondant au couple (p, q), si son développement a plus de termes communs avec la série y que celui de toute autre fraction rationnelle dont les termes aient leurs degrés inférieurs aux mêmes limites. Parmi les fractions rationnelles approchées, on peut distinguer, pour en former un Tableau (T), les *fractions normales,* définies par cette propriété de ne correspondre qu'à un seul couple d'entiers (p, q). Dans ce cas, les degrés des polynomes U et V sont précisément égaux à ces entiers et le nombre des termes communs avec la série y est au moins égal à $p + q + 1$.

La connaissance d'une fraction normale entraîne celle de toutes les fractions approchées *moins avancées* (ou, au plus, aussi avancées) qu'elle, c'est-à-dire telles que $p + q$ ait une valeur moindre (ou au plus égale). Donc, le Tableau (T) est entièrement défini, quand on se donne une suite de fractions normales de plus en plus avancées. Dès lors, il suffit qu'une seule suite de cette espèce converge vers une fonction déterminée pour que toute autre suite analogue, convergente ou divergente, et en particulier la série y puisse être considérée comme définissant la même fonction.

II. Addition et multiplication des séries divergentes, définies par le procédé précédent.

III. Après quelques remarques historiques, l'auteur montre quel intérêt il y aurait à reprendre, au point de vue où il vient de se placer, l'étude de quelques développements célèbres et, particulièrement, à généraliser, sous le même point de vue, les résultats obtenus par Halphen relativement à la fraction continue de Jacobi [développement de $\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$].

Tchebychew (*P. L.*). — Représentation approchée de la racine carrée d'une variable par des fractions simples. (113-132). (Traduit du russe en allemand par O. Bäcklund.)

Proposons-nous de trouver, pour $\sqrt{\frac{1}{x}}$, une valeur approchée de la forme

$$(1) \qquad A + \frac{B_1}{C_1 - x} + \frac{B_2}{C_2 - x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n - x},$$

c'est-à-dire d'écrire une expression de la forme précédente, telle que, dans l'intervalle compris entre $x = 1$ et $x = h > 1$, le logarithme du rapport

$$(2) \qquad y = \frac{A + \frac{B_1}{C_1 - x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n - x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}} = \sqrt{x}\left(A + \frac{B_1}{C_1 - x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n - x}\right)$$

s'écarte aussi peu que possible de zéro.

D'après un théorème démontré dans un Mémoire précédent [*Sur les questions de maxima et de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* (*Mémoires de l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg*, t. VII; 1858)], l'écart en question pourra toujours être diminué, s'il est atteint moins de $2n + 2$ fois dans l'intervalle considéré.

Donc, en désignant par l et $\frac{1}{l}$ les valeurs extrêmes de y, nous aurons à déterminer les constantes A, B_i, C_i, de manière que les équations

$$(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2) = 0, \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1 - x)(h - x) = 0$$

aient, dans l'intervalle $(1, h)$, au moins $2n + 2$ racines communes, dont au moins $2n$ doubles (celles qui ne sont égales ni à 1, ni à h). Or, ces équations, une fois rendues entières, ne sont que de degré $4n + 2$.

On devra avoir, par conséquent,

$$(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2) = C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1 - x)(h - x),$$

C étant une constante, ou

$$\sqrt{C}\,\frac{dy}{\sqrt{(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(h - x)}}.$$

Pour déterminer l, on observe que la dérivée $\frac{dy}{dx}$ s'annule $2n$ fois dans l'intervalle $(1, h)$ et ne s'annule plus en dehors de cet intervalle. Il vient donc

$$\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2)}} + \int_l^1 \frac{dy}{\sqrt{(l^2 - y^2)(1 - l^2 y^2)}} = (2n + 1)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(h - x)}} = 2(n + 1)r,$$

2 e Partie

ce qui donne l par la formule

$$l = 1 - 16 q^{n+1} \frac{\left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} q^{n(i+1)} \right|}{\left| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} q^{n(i+1)} \right|},$$

$$q = e^{-\pi r}.$$

On voit que l'approximation se resserre très rapidement lorsque n augmente.

Application est faite au calcul des intégrales de fonctions qui contiennent la racine carrée d'un polynome et, en particulier, des intégrales elliptiques.

Picard (*E*). — Sur une classe de transcendantes nouvelles (premier Mémoire). (133-154).

Soit

$$(1) \quad \begin{cases} u' = R_1(u, v, \ldots, w), \\ v' = R_2(u, v, \ldots, w), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w' = R_m(u, v, \ldots, w) \end{cases}$$

une substitution *birationnelle* quelconque, relative à m lettres $u, v, \ldots, w$. L'objet du Mémoire est de montrer qu'il existe une infinité de systèmes de m fonctions

$$f(z), \quad \varphi(z), \quad \ldots, \quad \psi(z)$$

uniformes dans tout le plan, n'ayant que des discontinuités polaires et jouissant des propriétés suivantes :

1° Elles admettent la période $\omega' i$;

2° On a, par le changement de z en $z + \omega$,

$$(2) \quad \begin{cases} f(z+\omega) = R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \varphi(z+\omega) = R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \psi(z+\omega) = R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)]. \end{cases}$$

I. Soient les m polynomes :

$$P_1(u, v, \ldots, w), \quad P_2(u, v, \ldots, w), \quad \ldots, \quad P_m(u, v, \ldots, w),$$

qui s'annulent tous pour $u = v = \ldots = w = 0$. On peut trouver une infinité de systèmes de m fonctions analytiques

$$f(z), \quad \varphi(z), \quad \ldots, \quad \psi(z)$$

de la variable $z = x + iy$, uniformes à droite de l'axe Oy, admettant la période $\omega' i$ et satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$(3) \quad \begin{cases} f(z+\omega) = P_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \varphi(z+\omega) = P_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(z+\omega) = P_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)]. \end{cases}$$

Pour le démontrer, on commence par réduire les polynomes P à leurs termes du premier degré, que l'on peut supposer ramenés, par une substitution linéaire convenable, respectivement à la forme

$$\varphi_1 u, \quad \varphi_2 v, \quad \ldots, \quad \varphi_m w.$$

Les équations fonctionnelles ainsi simplifiées admettent comme solutions des fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Ces solutions servent de point de départ à une série d'approximations successives qui convergent et, à la limite, donnent des fonctions satisfaisant aux équations (3).

Toutefois, la méthode suppose que l'on n'a, entre les constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$, aucune relation soit de la forme

$$\varphi_i = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega}}$$

(ν étant un entier positif ou négatif), soit de la forme

$$\mu_1^{\nu_1}\mu_2^{\nu_2}\ldots\mu_m^{\nu_m} = \mu_i$$

($\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m$ étant des entiers positifs tels que $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m > 1$).

II. La dernière de ces deux restrictions est inutile. Elle se lève comme celle qui se présente dans la théorie des équations à coefficients constants lorsque l'équation caractéristique a des racines multiples, en considérant le cas singulier où la relation en question a lieu comme un cas limite du cas général.

La première restriction subsiste donc seule comme essentielle.

III. Si maintenant, dans les équations (3), on remplace les polynomes P par m fractions rationnelles quelconques, le nouveau problème ainsi obtenu se ramène au précédent. Il admet donc aussi comme solutions des fonctions uniformes dans toute la partie droite du plan.

Enfin, si ces fractions définissent une substitution birationnelle, la substitution inverse permettra d'étendre au plan tout entier les fonctions trouvées, ce qui achève de résoudre le problème.

IV. M. Poincaré (*Journal de Mathématiques*, 1890) s'est proposé de trouver un système de n fonctions $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$, admettant un théorème de multiplication, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$\varphi_i(mu) = R_i[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)],$$

m étant une certaine constante, réelle ou imaginaire, telle que $|m| > 1$.

Ce problème est manifestement analogue au précédent, comme on le voit en posant $u = e^z$, $m = e^\omega$. Seulement, l'hypothèse faite que $u = 0$ n'est pas un point essentiel pour les fonctions φ entraînerait, une fois effectué le changement de variables en question, certaines relations d'égalité. Les deux questions sont donc distinctes; les développements en séries employés par M. Poincaré ne peuvent pas servir à résoudre le problème traité par M. Picard. Les approximations successives semblent donc ici fournir la seule méthode capable de conduire au résultat.

Hilbert (*D.*). — Contribution à la théorie du polynome de Legendre. (155-160).

L'auteur se propose de trouver la plus petite valeur, différente de zéro, que puisse prendre l'intégrale

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} [f(x)]^2 dx,$$

$f = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$ étant un polynome de degré $n-1$ *à coefficients entiers*, α, β deux nombres donnés. L'intégrale I est une forme quadratique par rapport aux coefficients, et son discriminant $D_{\alpha,\beta}$ est égal à $\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{n^2} D$, où $D = D_{-1,1}$.

Mais si l'on développe x^m en somme de polynomes de Legendre

$$x^m = c_m X_m + c'_m X_{m-1} + \ldots + c^m_m X_0$$

$$\left[c_m = \frac{m!}{1.3.5.\ldots(2m-1)}\right],$$

on trouve aisément (en vertu des formules connues $\int_{-1}^{+1} X_m X_n dx = 0$, $\int_{-1}^{+1} X_m^2 dx = \frac{2}{2m+1}$)

$$I_{-1,1} = \frac{2}{2n-1} b_1^2 + \frac{2}{2n-3} b_2^2 + \ldots + \frac{2}{2n-5} b_3^2 + \ldots,$$

ou

$$b_1 = c_{n-1} a_1,$$
$$b_2 = c'_{n-1} a_1 + c_{n-2} a_2,$$
$$b_3 = c''_{n-1} a_1 + c'_{n-2} a_2 + c_{n-3} a_3,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, par suite,

$$D = 2^{n^2} \frac{[1^{n-1} 2^{n-2} \ldots (n-1)^2 (n-1)!]^2}{1^{2n-1} 3^{2n-3} \ldots (2n-1)^2}.$$

La formule de Stirling montre que cette expression est de la forme $\eta_n 2^{-n^2}$, la quantité η_n tendant vers 1 pour $n = \infty$, et, par conséquent, on a

$$D_{\alpha,\beta} = \eta_n \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{n^2}.$$

Les propositions de Minkowsky sur les formes quadratiques à coefficients entiers montrent alors que l'intégrale I peut être rendue plus petite que

$$n \eta'_n \left(\frac{|\beta-\alpha|}{2}\right)^n \quad (\eta'_n = \sqrt[n]{\eta_n}).$$

Cette intégrale peut donc recevoir une valeur positive aussi petite qu'on veut, si $|\beta-\alpha| < 2$.

Volterra (*Vito*). — Sur les vibrations des corps élastiques isotropes. (161-230).

Extension de la théorie des caractéristiques aux équations

$$(A)\qquad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - a^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = Z,$$

$$(B)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - (b^2 - a^2)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = X, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - a^2\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) - (b^2 - a^2)\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right) = Y \end{cases} \qquad (b > a).$$

Les résultats obtenus permettent d'établir, pour les ondes cylindriques, une théorie semblable à celle que Kirchhoff a donnée du principe de Huygens.

1. Démonstration de formules fondamentales, analogues à la formule de Green, pour les équations (A) et (B). Ces formules conduisent à introduire les *quantités conjuguées* des fonctions w [pour l'équation (A)], u, v [pour le système (B)] : ce sont les quantités qui jouent un rôle analogue à celui que joue la dérivée normale dans la formule de Green.

2. Soit $\varphi(\tau, \xi, \eta)$ une intégrale de l'équation

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} = 0;$$

la fonction

$$w = \varphi[a(t - t_1), x - x_1, y - y_1]$$

sera (quelles que soient les constantes x_1, y_1, t_1) une intégrale de l'équation (A) pour $Z = 0$, et les couples

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial}{\partial y}\varphi[a(t - t_1), x - x_1, y - y_1], \\ v = \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi[a(t - t_1), x - x_1, y - y_1], \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{\partial}{\partial x}\varphi[b(t - t_1), x - x_1, y - y_1], \\ v = \dfrac{\partial}{\partial y}\varphi[b(t - t_1), x - x_1, y - y_1] \end{cases}$$

donneront des solutions des équations (B), pour $X = Y = 0$.

Or, l'équation (1) admet les solutions

$$\log\rho, \quad \tau\log\rho + \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

$$\log(\theta - \sqrt{\theta^2 - 1}),$$

$$\tau\left[\frac{\sqrt{\theta^2 - 1}}{\theta} - \log(\theta + \sqrt{\theta^2 - 1})\right] + \left(\theta - \frac{\tau}{\rho}\sqrt{\theta^2 - 1}\right),$$

$$\arcsin\theta,$$

$$\tau\left(\frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta\right),$$

$$\int_0^\theta \log(1 - \theta^2)\frac{d\theta}{\sqrt{1 - \theta^2}} - \log\rho\arcsin\theta,$$

$$\tau\left[\log\rho\left(\frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta} + \arcsin\theta\right) - \int_0^\theta \frac{\sqrt{1 - \theta^2}}{\theta}\log(1 - \theta^2)\,d\theta\right] + \left(\theta - \frac{\tau}{\rho}\right),$$

d'où l'on tire, pour les équations (A) et (B) sans seconds membres, une série de solutions, dites solutions *fondamentales*.

3. Calcul des quantités conjuguées aux solutions fondamentales.

4. Calcul des valeurs des solutions fondamentales et de leurs quantités conjuguées sur certaines surfaces spéciales, à savoir : les cônes de révolution ayant pour axes des parallèles à l'axe des t; les cylindres de révolution ayant pour axes ces mêmes parallèles; les plans perpendiculaires à ces droites.

5. On applique les formules fondamentales (Art. 1) à un solide S limité, d'une part, par un cône de révolution d'axe parallèle à l'axe des t, de sommet (x_1, y_1, t_1) et d'ouverture inférieure à $2 \operatorname{arc\,tang} \alpha$, et, d'autre part, par une surface quelconque σ, le solide S étant intérieur au cône; les deux fonctions considérées sont une solution quelconque w de l'équation (A) et une solution fondamentale (Art. 2) de l'équation sans second membre. Il faut commencer par retirer du solide S la partie intérieure à un petit cylindre de révolution ayant même axe que le cône.

En faisant tendre le rayon de ce cylindre vers zéro et l'ouverture du cône vers $2 \operatorname{arc\,tang} \alpha$, on obtient la valeur de w au point (x_1, y_1, t_1), exprimée en fonction des valeurs de la même quantité et de sa dérivée normale sur σ.

6. Recherche analogue pour le cas où le solide S et, par suite, la portion de surface σ, sont extérieurs au cône, l'ouverture de celui-ci tendant vers $2 \operatorname{arc\,tang} \alpha$ par valeurs supérieures.

7, 8. Recherches analogues à celles des deux articles précédents, pour les équations (B).

9. Supposons qu'on connaisse les valeurs d'une intégrale w de l'équation (A) (privée du second membre, pour simplifier) et celles de sa quantité conjuguée sur une surface σ. Dans quelle partie de l'espace cette fonction sera-t-elle déterminée?

Les résultats précédents montrent qu'on peut calculer la valeur de w en tout point A par lequel on peut conduire un cône (d'axe parallèle à celui des t et d'ouverture $2 \operatorname{arc\,tang} \alpha$) qui découpe, soit dans son intérieur, soit extérieurement, une portion de la surface σ dont le bord est formé exclusivement par l'intersection du cône avec la surface. En un mot, les cônes en question jouent le rôle de *surfaces caractéristiques*. On arrive d'ailleurs à des résultats analogues pour les équations (B). Dans ce dernier cas, d'ailleurs, les quantités conjuguées acquièrent, moyennant une détermination convenable des arbitraires qui y figurent, une signification mécanique simple.

Supposons enfin que la surface σ soit telle, que l'angle de sa normale avec l'axe des t ait pour tangente $\pm \frac{1}{\alpha}$; alors, la connaissance de w sur cette surface entraînera celle de sa quantité conjuguée et, par suite, fera connaître la valeur de w en tout point A jouissant de la propriété ci-dessus énoncée.

10. L'auteur montre que ses formules comprennent comme cas particulier l'intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)$, telle qu'elle a été donnée par Poisson et Parseval. Puis il examine ce qu'elles deviennent lorsque la surface σ est un cylindre parallèle à l'axe des t limité par un plan perpendicu-

laire aux génératrices, lorsqu'on considère la portion intérieure au cône caractéristique).

11. La méthode par laquelle Kirchhoff donne au principe de Huygens une forme rigoureuse ne s'étend pas aux ondes cylindriques. Cela tient, comme l'a montré M. Duhem, à ce que l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u = a^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ n'admet d'intégrale de la forme

$$\lambda f(r \pm at),$$

où λ soit fonction de r seul $\left(r \text{ désignant la quantité } \sum_{i=1}^{m} x_i^2 \right)$, que dans les cas où le nombre m des variables x est 1 ou 3.

Plus généralement, on peut se demander si cette équation admet des intégrales de la même forme, λ étant une fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_m$. La réponse est affirmative; seulement, une telle intégrale admettra toujours des singularités autres que le point $x_1 = x_2 = \ldots = x_m = 0$, et dans le voisinage immédiat de ce point. En effet, dans l'hypothèse où l'intégrale serait régulière, la formule de Green conduirait à une contradiction.

Dans ces conditions, ces intégrales ne peuvent servir à l'extension de la théorie de Kirchhoff; au contraire, cette extension est fournie par les intégrales précédemment trouvées.

12. Soit posée la question suivante : déterminer la fonction $U(x, y, t)$ de façon que la première variation de l'intégrale

$$V = \int_S F(U, U_1, U_2, U_3, x, y, t)\, dx\, dy\, dt$$

(U_1, U_2, U_3 étant les trois dérivées de U), étendue à un volume déterminé S, soit nulle.

On sait que cette question conduit à l'équation du second ordre

$$(2) \qquad \frac{\partial F}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial U_1} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial U_2} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial U_3} = 0,$$

en supposant toutefois que U_1, U_2, U_3 soient continus.

U restant continu, quelles seront les surfaces le long desquelles U_1, U_2, U_3 pourront éprouver des discontinuités?

On trouve que les valeurs des quantités U_i et $\frac{\partial F}{\partial U_i}$ des deux côtés de la surface devront vérifier la condition

$$\sum_i \left[\left(\frac{\partial F}{\partial U_i}\right)' - \left(\frac{\partial F}{\partial U_i}\right)'' \right] (U_i' - U_i'') = 0,$$

et que les cosinus directeurs du plan tangent à cette surface seront proportionnels aux quantités $U_i' - U_i''$.

Lorsque la fonction F a la forme

$$F = a^2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \right] - \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 + 2wZ,$$

l'équation (3) devient l'équation (A) et les surfaces de discontinuité sont celles qui font avec l'axe des t un angle égal à arctangα, autrement dit les enveloppes de cônes caractéristiques : résultat qui est en relation avec la théorie du choc dans un milieu élastique.

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur l'intégration de l'équation différentielle $y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$. (233-246). (Extrait d'une Lettre à M. Picard.)

M. Picard (*Journal de Math.*, t. V et *Acta Math.*, t. XVII) a fait connaître les principaux types d'équations de la forme indiquée pour lesquels l'intégrale est à apparence uniforme. M. Mittag-Leffler se propose de vérifier les prévisions de la théorie en effectuant les intégrations et de constater, en particulier, que les intégrales à apparence uniforme sont méromorphes.

En premier lieu, si l'on cherche la condition pour que l'intégrale générale ait un pôle double fixé d'une manière arbitraire dans le champ de la variable indépendante [c'est le cas de la fonction $\wp(x + x_0 | g_2, g_3)$, où x_0 et g_3 sont des constantes arbitraires], on constate que les coefficients A, E sont nuls et que l'équation peut se ramener, par une substitution linéaire, à la forme

$$(1) \qquad y'' = 6y^2 + \frac{3}{2}k^2 + 5ky.$$

Pour intégrer celle-ci, on introduira, conformément aux principes posés par M. Picard, une fonction de la forme

$$(2) \qquad z = y'^2 + y'(a_1 + a_2 y) + a_0 y + a_3 y^2 + a_4 y^3,$$

où les constantes peuvent être déterminées de manière que cette fonction n'ait point de pôles. Elle est alors donnée par une équation linéaire du premier ordre et conduit à l'intégrale de l'équation proposée

$$y = (D_e e^{kx})^2 \wp(e^{kx} - e^{kx_0} | 0, H) + \frac{k^2}{2}.$$

Supposant ensuite que les coefficients A, E ne soient pas nuls en même temps, on trouve un premier cas particulier, l'équation

$$y'' + 3yy' - y^3 = B(y' - y^2) + Cy + D,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad z'' + Bz' + Cz + Dz = 0;$$

puis un second, l'équation

$$y'' + 2yy' = B(y' + y^2) + D,$$

dont l'intégrale générale est

$$y = \frac{z'}{z}, \qquad Bz' + (He^{Bx} + D)z = 0 \quad (H = \text{const. arbitr.}).$$

et il reste à étudier l'équation

$$[illegible]$$

pour [illegible].

Si E est nul, on trouve encore une fonction ayant la forme (2) et dépourvue de pôles, conduisant à l'intégrale

$$[illegible] \quad (x, H = \text{const. arbitr.}),$$

l'équation étant

$$[illegible]$$

Enfin, les trois équations

$$[illegible]$$

trouvées pour $E \neq 0$, se ramènent à l'équation (1) et s'intègrent également à l'aide des fonctions elliptiques.

Hensel (*K.*). — Théorie des fonctions algébriques d'une variable (247-318). (Premier Mémoire, traduit de l'allemand par G. Brincard).

1. Considérant d'abord une fonction rationnelle d'une variable x, l'auteur y remplace x par $\frac{x_1}{x_2}$, de manière à exprimer la fonction rationnelle par des quotients de fonctions homogènes de x_1, x_2 ainsi qu'on le fait dans la théorie des formes; mais cette substitution est présentée d'une manière particulière; elle est déduite du changement de variables $x_1 = \frac{x}{x - u}$, $x_2 = \frac{1}{x - u}$, u étant un paramètre auxiliaire. Parmi les zéros ou les infinis d'une fonction quelconque de x_1, x_2, on convient de ne considérer que ceux qui sont *fixes*, c'est-à-dire indépendants de u; à ce point de vue, on peut dire qu'un polynome entier homogène en x_1, x_2 n'a aucun infini.

2. Soit y une fonction algébrique de x dont les n valeurs sont données par l'équation

$$[illegible]$$

où les A sont des fonctions rationnelles : l'auteur se propose d'étudier le *genre* de fonctions algébriques défini par cette équation, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions rationnelles de x et de y.

On peut représenter une telle fonction par un quotient de deux quantités qui restent toujours finies, en introduisant les variables x_1, x_2 du numéro précédent et posant

$$[illegible],$$

η étant une nouvelle variable et $A_0(x_1, x_2)$ le dénominateur commun de tous

les A. La quantité η ne possède aucun infini fixe. On considérera, par conséquent, les fonctions de x_1, x_2, η, homogènes lorsque η est considéré comme du degré m [celui de $A_0(x_1, x_2)$], c'est-à-dire satisfaisant à l'identité

$$f(tx_1, tx_2, t^m\eta) = t^\mu f(x_1, x_2, \eta);$$

μ sera le *degré* de la fonction.

3. Toute fonction du genre peut être mise, et cela d'une seule façon, sous la forme

$$w = u_0 + u_1\eta + \ldots + u_{n-1}\eta^{n-1},$$

$u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ étant des fonctions rationnelles de x_1, x_2. Plus généralement, il suffira de connaître n fonctions du genre

$$\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in},$$

telles qu'aucune d'elles ne soit égale à la somme des autres multipliées respectivement par des fonctions rationnelles de x_1, x_2, pour que toute autre fonction du genre puisse s'écrire

$$w = u_1\eta_{i1} + u_2\eta_{i2} + \ldots + u_n\eta_{in}.$$

Mais, si le système des fonctions $\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in}$ a été pris au hasard, la fonction w pourra être algébriquement entière, c'est-à-dire ne devenir infinie pour aucune valeur finie de x_1, x_2, η, sans que pour cela ses coefficients $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ soient entiers.

Au contraire, cette circonstance ne pourra se présenter si le système $(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in})$ a été convenablement choisi; dans ce cas, ce système reçoit le nom de système *fondamental*.

4. Un système fondamental peut être considéré comme défini par cette propriété que le degré N du produit $\eta_{i1}\eta_{i2}\ldots\eta_{in}$ est minimum. Lorsque deux systèmes sont fondamentaux, les degrés des fonctions qui les composent sont égaux chacun à chacun. En particulier, le degré total N est un invariant du genre considéré; ce nombre est supérieur à $n - 1$ et la différence p n'est autre que le *rang* du genre algébrique.

5. Si le système $(\eta_{i1}, \eta_{i2}, \ldots, \eta_{in})$ n'est pas fondamental, il existe au moins une fonction

$$w = u_1\eta_{i1} + u_2\eta_{i2} + \ldots + u_n\eta_{in}$$

qui est divisible par le facteur linéaire $\xi_1 = \alpha' x_1 - \alpha'' x_2$ (c'est-à-dire dont le quotient par ξ_1 est algébriquement entier sans que ses coefficients le soient). Il est donc essentiel de savoir reconnaître si une telle fonction existe ou non. Mais, au lieu d'étudier directement la divisibilité par ξ_1, il est préférable de considérer les diviseurs ξ_1^δ, δ désignant successivement toutes les valeurs fractionnaires comprises entre 0 et 1 et dont les dénominateurs sont moindres que n (ce que doit être le dénominateur dans l'exposant de la plus haute puissance de ξ_1 par laquelle une expression w est divisible). Pour cela, on range toutes ces fractions par ordre de grandeur croissante; δ_k, δ_{k+1} étant deux consécutives d'entre elles, si l'on a déterminé les ν expressions linéairement indépendantes du genre

$$e_1, e_2, \ldots, e_\nu,$$

qui sont divisibles par $\xi_1^{\delta k}$, on constate que les expressions w divisibles par $\xi_1^{\delta k+1}$ s'obtiennent en multipliant celles-là par des coefficients (constants, moyennant un changement de variables simples) assujettis à certaines relations linéaires, et l'on forme ces relations par des opérations élémentaires, à savoir, en exprimant que la quantité

$$(1) \qquad S(ww'\ldots w^{(i-1)})$$

[où $w', w'', \ldots, w^{(i-1)}$ sont des fonctions linéaires arbitraires des $e_1, e_2, \ldots, e_\nu$, c'est-à-dire des expressions arbitraires divisibles par $\xi_1^{\delta k}$, et $S(w)$ représente la somme des n valeurs de w] s'annule avec ξ_1.

7. Les résultats précédents donnent un moyen simple de caractériser les systèmes fondamentaux. Soit un système quelconque $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ de n fonctions indépendantes du genre, telles que le produit de deux quelconques d'entre elles puisse s'exprimer par une combinaison linéaire à *coefficients entiers* de ces mêmes quantités; tel est, par exemple, le système $(1, \eta_1, \eta_1^2, \ldots, \eta_1^{n-1})$. En cherchant les conditions pour qu'une expression w, formée à l'aide de ce système, soit divisible par $\xi_1^{\frac{1}{n}}$, on constate qu'il suffit de considérer l'expression (1) pour $i = 2$.

Or, cette expression est évidemment une forme bilinéaire par rapport aux coefficients qui figurent dans w et dans w'. On appellera *discriminant* du système $(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ le discriminant de cette forme bilinéaire, lequel est entier en x_1, x_2.

ξ_1 devra être un diviseur de ce discriminant, sans qu'il soit prouvé que cette condition est suffisante.

Si l'on remarque encore que le degré du discriminant est double du degré total N du système, on arrive à la conclusion suivante :

Le discriminant d'un système fondamental est celui dont le degré est le plus petit.

Il est le plus grand commun diviseur de tous les autres discriminants.

Hadamard (*J.*). — Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes (319-336).

Abel a démontré qu'il n'existe pas de fonction $\varphi(n)$ telle que la série à termes positifs $\sum^{\infty} u_n$ soit nécessairement convergente, si le produit $u_n \varphi(n)$ tend vers zéro pour n infini, et nécessairement divergente dans le cas contraire. Ceci revient à la proposition suivante : si peu divergente que soit une série, on peut multiplier ses termes successifs par des nombres tendant vers zéro, sans troubler la convergence.

Ainsi que l'a remarqué du Bois-Reymond, on a une conclusion tout analogue en permutant les mots *convergent* et *divergent*, ainsi que les mots *tendre vers zéro* et *augmenter indéfiniment*.

Il résulte aussi de ces recherches qu'une fonction indéfiniment croissante quelconque $F(n)$ étant donnée, on peut trouver deux séries, l'une convergente, l'autre divergente, telles que le rapport des termes correspondants soit $F(n)$.

On avait tout d'abord cru trouver un caractère général de convergence dans le *criterium logarithmique*, lequel repose sur la considération non plus d'une seule série, mais d'une infinité de séries de comparaison. Il y avait encore là une conception erronée; on sait que le criterium logarithmique est, comme les autres caractères précédemment connus, en défaut pour les séries dont la convergence (ou la divergence) est très lente.

Cette insuffisance n'est, en aucune façon, particulière au criterium logarithmique. D'une façon générale, étant donné un nombre *infini* de séries

$$S_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty)$$

plus lentement divergentes (convergentes) les unes que les autres, on peut toujours trouver une série encore plus lentement divergente (convergente) que chacune de celles-là.

Ceci revient à dire qu'étant donné une suite infinie de fonctions augmentant toutes indéfiniment, mais chacune plus lentement que la précédente, il existe toujours des fonctions qui, tout en étant encore indéfiniment croissantes, augmentent plus lentement que chacune des premières.

On peut même aller plus loin : étant données deux suites de fonctions

$$f_p(n), \qquad F_q(n) \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, \infty)$$

indéfiniment croissantes, les f de plus en plus lentement, les F de plus en plus vite, mais chaque F plus lentement que n'importe quel f $\left(\text{de manière que le rapport } \frac{f_p}{F_q} \text{ soit indéfiniment croissant avec } n\right)$, il existe toujours une infinité de fonctions qui croissent plus lentement que n'importe quel f et plus vite que n'importe quel F.

Par conséquent aussi, dans les mêmes conditions, on peut toujours déterminer les u_n de manière que toutes les séries $\sum u_n f_p(n)$ soient divergentes et toutes les séries $\sum u_n F_q(n)$ convergentes.

De ce qui précède résulte que, si l'on arrivait à former une suite de fonctions dont chacune croisse indéfiniment plus lentement (plus vite) que la précédente, et qui contienne des fonctions croissant plus lentement (plus vite) que n'importe quelle fonction indéfiniment croissante donnée, *une telle suite ne saurait être numérable.*

Koch (*H. von*). — Sur les intégrales régulières des équations différentielles linéaires. (337-420).

1. Extension de la théorie des systèmes d'équations du premier degré en nombre infini et à un nombre infini d'inconnues, développée précédemment (même Recueil, t. XVI), au cas où le nombre des équations est, pour ainsi dire, plus grand que celui des inconnues ; ou, pour parler plus exactement, où le déterminant des coefficients n'est pas de la forme normale, mais le devient après suppression d'un certain nombre de lignes.

Ce déterminant de la forme normale admet toujours (*voir* le Mémoire cité) un mineur d'ordre fini qui n'est pas nul. En partant de cette remarque, on

peut ramener la résolution du système infini à celle d'un nombre fini d'équations entre un nombre fini d'inconnues, et écrire les conditions pour qu'il y ait un nombre donné de solutions indépendantes.

2. Soit l'équation linéaire

$$(1) \qquad P(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_i \frac{d^{n-i} y}{dx^{n-i}} + \ldots + P_n y = 0,$$

privée de terme en $\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}$ et ayant pour coefficients des fonctions analytiques de x, développables en séries de la forme $P_i(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_{ij} x^j$. M. von Koch (Mémoire cité plus haut) obtient le développement des intégrales autour de l'origine en substituant pour y une série de la forme

$$(2) \qquad y = \sum_{j=-\infty}^{\infty} g_j x^{\rho+j}.$$

Les coefficients g_λ sont alors déterminés par les équations

$$(3) \qquad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \chi_{m\lambda}(\rho+j) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n),$$

où $\chi_{m\lambda}$ désigne, à un facteur exponentiel près, un polynome en ρ dont les coefficients dépendent linéairement des coefficients α qui figurent dans les développements des P_i.

Lorsque l'équation

$$(D) \qquad \chi(\rho) = (\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2) \ldots (\rho - \rho_n) = 0$$

n'a que des racines simples, les intégrales de l'équation donnée sont toutes de la forme (2); dans le cas contraire, il faut adjoindre, en général, des intégrales de la forme

$$(4) \qquad y = F_1(\log x) + F_2(\log x)\, y + \ldots + F_i(\log x)\, y^{i-1},$$

les F étant des expressions de la forme (2), intégrales qu'on obtient en différentiant les premières par rapport à ρ.

On dit, d'après M. Thomé, qu'une telle intégrale est *régulière* dans le voisinage de $x = 0$, si les F ne contiennent qu'un nombre fini de puissances négatives.

Dans le cas où les coefficients P de l'équation proposée ne contiennent eux-mêmes qu'un nombre fini de puissances négatives, M. Thomé a montré que, si m désigne le degré d'une certaine équation (équation déterminante), l'équation ne peut avoir plus de m intégrales régulières et que l'on peut toujours former m séries de la forme voulue satisfaisant *formellement* à cette équation; ces séries représentent donc des intégrales régulières pourvu qu'elles soient convergentes.

Comme, dans le cas général, les séries ainsi obtenues sont divergentes, il faut, pour que l'équation proposée ait des intégrales régulières, que les paramètres satisfassent à certaines relations.

Ces relations, qu'il avait été impossible de former jusqu'ici, peuvent toujours se trouver par la méthode indiquée par M. von Koch. Supposons, en effet, que l'origine n'est qu'un pôle pour les coefficients de l'équation; soit p la plus grande différence existant entre l'ordre de multiplicité de ce pôle pour un coefficient P_i et l'indice i de ce coefficient.

Si l'on substitue pour y un développement analogue à (2), mais dans lequel λ, au lieu de varier de $-\infty$ à $+\infty$, prend exclusivement des valeurs positives, le système (3) est remplacé par un de ceux qui ont été considérés au n° 1; le déterminant ne prend la forme normale qu'après suppression de p lignes (le cas de $p = 0$ est celui qui est bien connu depuis les recherches de M. Fuchs). D'après ce qui a été dit au n° 1, on écrira que le nouveau système admet, pour $\rho = R$, m solutions indépendantes (autrement dit que l'équation donnée admet m intégrales régulières appartenant à l'exposant R) par la considération d'un certain nombre de mineurs de ce déterminant, mineurs dont l'ensemble est désigné par M_0, et qui sont fonctions de ρ.

Le nombre des intégrales régulières appartenant à R est égal à l'exposant de la plus haute puissance de $\rho - R$ qui divise toutes les fonctions M_0.

Conformément aux résultats de M. Thomé, l'exposant R doit, tout d'abord, être racine d'une certaine équation algébrique $f(\rho) = 0$, l'équation déterminante de M. Thomé.

Quant aux quantités M_0, elles contiennent ρ et les α d'une manière transcendante, de sorte que l'on ne peut, dans le cas le plus général, décider, par un nombre fini d'opérations arithmétiques, si l'équation différentielle donnée a des intégrales régulières ou non.

Mais on peut former une série de conditions algébriques *suffisantes* pour l'existence d'intégrales régulières pour un exposant déterminé R quelconque : ces conditions dépendent d'un certain entier m et à la limite, lorsque m augmente indéfiniment, équivalent aux conditions nécessaires et suffisantes trouvées précédemment.

Application en est faite aux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \frac{a_3}{x^4}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{b_1}{x^2} + \frac{b_2}{x^3} + \frac{b_3}{x^4}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{c_0}{x^2} + \frac{c_1}{x^3} + \frac{c_2}{x^4}\right)y = 0,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \frac{a_3}{x^4}\right)\frac{dy}{dx} + \left(\frac{b_1}{x^2} + \frac{b_2}{x^3} + \frac{b_3}{x^4}\right)y = 0.$$

D'autre part, on peut trouver une série de conditions algébriques *nécessaires* dépendant, elles aussi, d'un entier m et qui, lorsque cet entier augmente indéfiniment, tendent également vers les conditions nécessaires et suffisantes.

Si l'équation n'a point d'intégrales régulières appartenant à l'exposant considéré, il existera assurément une valeur finie de m pour laquelle les conditions nécessaires ne seront pas vérifiées. Mais, dans le cas où il existe une telle intégrale, il pourra arriver qu'il soit impossible de s'en assurer en formant, jusqu'à une valeur finie, si grande qu'elle soit, de m, les conditions précédentes; les conditions nécessaires seront alors constamment vérifiées, les conditions suffisantes jamais.

3. Remarques générales sur les propriétés analytiques des fonctions qui interviennent dans les conclusions du n° 2.

Ces fonctions sont développables suivant les puissances des α. Les coefficients

de ces développements sont des fonctions de ρ, lesquelles s'expriment à l'aide de la fonction eulérienne.

Ces mêmes fonctions peuvent, d'autre part, se développer suivant les puissances de ρ, les coefficients étant développables suivant les puissances des α; les coefficients numériques qui figurent dans ces développements s'expriment rationnellement à l'aide d'une exponentielle ayant pour base la constante d'Euler et des nombres

$$\tau_k = 1 - \frac{1}{2^k} - \frac{1}{3^k} - \ldots \qquad (k = 2, 3, \ldots).$$

4. Cas où les P_i sont des fractions rationnelles.

Dans ces conditions, l'auteur cherche à exprimer, par des relations entre les seuls coefficients, qu'il existe une intégrale régulière; autrement dit, qu'il existe au moins une racine R de l'équation déterminante pour laquelle les M_0 s'annulent, ou, plus généralement, qu'il existe un nombre donné d'intégrales régulières. Ceci conduit à résoudre le problème suivant :

Étant donnés un polynome

$$\psi(\rho) = a_0 + a_1\rho + \ldots + \rho^m$$

et une fonction transcendante entière

$$F\rho = b_0 + b_1\rho + \ldots + b_m\rho^m + \ldots,$$

exprimer que ces deux fonctions ont un diviseur commun de degré donné S. La difficulté consiste à trouver des conditions valables lors même qu'une ou plusieurs des racines du polynome ψ seraient égales entre elles.

Une fois cette question auxiliaire résolue, on constate que les conditions cherchées s'expriment par un nombre fini de relations transcendantes entre les coefficients des P_i.

La nature transcendante de ces conditions fait qu'on ne peut décider par une suite finie d'opérations arithmétiques si elles sont vérifiées.

La supposition, faite par l'auteur, que l'équation est privée de terme en $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$, peut introduire des difficultés au point de vue de la recherche des intégrales régulières. Pour se passer de cette supposition, il faut introduire des déterminants infinis plus généraux, dont la convergence a été établie par l'auteur (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 janvier 1893).

Hadamard (*J.*). — Note additionnelle à l'article *Sur les caractères de convergence des séries à termes positifs et sur les fonctions indéfiniment croissantes*. (421).

Rectification de priorité au profit de du Bois-Reymond et de M. Pincherle.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

36e année : 1891 [1].

Vivanti (*G.*). — Sur l'établissement d'identités arithmétiques. (1-10).

Le développement d'une fonction, donnée dans l'intervalle (—1, +1), en série de fonctions sphériques est, quand il est possible, complètement déterminé. L'auteur obtient les identités dont il s'agit en égalant diverses expressions des coefficients de ce développement.

Müller (*R.*). — Sur la forme de la *courbe du couple* pour des bielles particulières. (11-20).

Grünfeld (*E.*). — Sur l'expression des solutions d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre, au voisinage d'un point singulier. (20-33).

L'auteur se propose d'étendre au système

$$A\frac{du_i}{dx} = a_{i1}u_1 + \ldots + a_{in}u_n \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où A est un polynome et où les a_{ik} sont uniformes, les résultats obtenus par M. Sauvage en supposant A du premier degré et les a_{ik} holomorphes, dans le voisinage du point racine de A que l'on étudie.

Weihrauch (*K.*). — Sur un déterminant algébrique dont les éléments admettent une loi de formation remarquable. (34-40).

Thomae (*J.*). — Sur les fonctions thêta dont les arguments forment un système de tiers de périodes. (40-44).

Zenger (*K.-W.*). — Lumière et électricité. (44-49).

Richter (*O.*). — Enveloppe des cordes d'une conique vues d'un point donné sous un angle droit. (49-56).

Mehmke (*R.*). — Quelques théorèmes sur la collinéation et la transformation affine dans l'espace, se rapportant à la courbure des courbes et des surfaces. (56-60).

---

(1) Voir *Bulletin*, 2e série, t. XXI, p. 107.

Ces théorèmes sont relatifs aux invariants, projectifs ou affines, des points de contact de deux courbes, de deux surfaces, d'une courbe et d'une surface, ou encore aux invariants de plusieurs points, voisins ou non, d'une courbe ou d'une surface pour les mêmes transformations.

Schendel (*L.*). — Une généralisation du développement du binome. (60-64).

Dietrichkeit. — Critères de divisibilité des nombres écrits dans le système décimal. (64).

Müller (*R.*). — Sur les points doubles de la courbe du couple. (65-70).

Continuation des recherches sur la bielle parues dans les Volumes 34 et 36 du même *Journal*.

Weihrauch (*K.*). — Sur certains déterminants goniométriques et sur des systèmes d'équations linéaires qui s'y rattachent. (70-77).

Binder (*W.*). — Sur les systèmes *absolus* d'éléments dans les courbes planes unicursales du troisième et du quatrième ordre. (78-98).

Ahrendt (*A.*). — Recherches analytiques sur la constitution d'un pinceau de rayons après une réfraction, lorsque la surface de séparation des deux milieux est quelconque. (99-115).

Haeuser (*G.*). — Remarque sur la théorie des systèmes d'équations différentielles linéaires. (116-123).

Applications de la méthode symbolique de Boole à des équations à coefficients constants.

Thomae (*J.*). — Sur les intégrales elliptiques de troisième espèce. (123-128).

L'auteur ramène l'intégration de la différentielle

$$\frac{c\,d\xi}{(\xi - \alpha)(\xi - \beta)\sqrt{(\xi - \xi_1)(\xi - x\xi_1)}}$$

à la formation d'intégrales de troisième espèce à paramètres réels, dans le cas où x est réel.

Müller (*R.*). — Sur les centres de courbure des trajectoires pour

les systèmes plans qui se déforment en restant semblables à eux-mêmes. (129-137).

Disteli (*M.*). — Sur une manière simple de représenter les formes des courbes planes du troisième ordre. (138-157).

L'auteur, partant de la transformation de Steiner, obtient les courbes du troisième ordre en généralisant les constructions relatives aux coniques qui découlent de cette transformation.

Mehmke (*R.*). — Méthode pratique pour le calcul des racines réelles d'équations algébriques ou transcendantes à coefficients réels et à une inconnue. (158-187).

La méthode peut être considérée en principe comme se rattachant à la règle de fausse position ou encore à la méthode d'approximation de Newton; c'est une application de ces deux méthodes que rend possible l'existence des tables de logarithmes et d'autres tables numériques.

Kosch (*F.*). — Sur la situation du centre de gravité d'un corps de révolution. (188-190).

Schlömilch. — Sur les points communs à une droite et à une conique. (190-191).

Richter (*O.*). — Sur les courbes bicirculaires du quatrième ordre. (191-192).

Müller (*R.*). — Sur la courbure des développées des trajectoires dans le mouvement des systèmes plans rigides. (192-205).

Considérant quatre positions infiniment voisines du système, l'auteur construit le centre de courbure de la développée d'une trajectoire et étudie les liaisons qui existent entre ces centres de courbure et les points du système mobile.

Mehmke (*R.*). — Sur deux propriétés caractéristiques des transformations ponctuelles linéaires relatives à la courbure des courbes et à la courbure totale des surfaces. (206-213).

Lorsque deux courbes qui se touchent en un point y ont le même plan osculateur (ou lorsque deux surfaces se touchent en un point), le rapport de leurs courbures demeure inaltéré si on les soumet à une transformation linéaire.

Ces théorèmes sont étendus au cas de n variables.

Wimmer (*B.*). — Sur une classe générale de transformations (1, 2) de l'espace. (214-230).

Ces transformations sont définies par les équations

$$\Sigma A_i y_i = 0,$$
$$\Sigma B_i y_i = 0,$$
$$\Sigma \Gamma_{ik} y_i y_k = 0,$$

où les A_i, B_i sont linéaires et les Γ_{ik} quadratiques en x_1, x_2, x_3, x_4.

Wittenbauer (*F.*). — Les pôles d'inflexion dans le mouvement absolu et dans le mouvement relatif. (232-242).

L'auteur, employant les méthodes du calcul barycentrique, expose la construction du pôle d'inflexion du mouvement absolu d'un système plan, qui possède un mouvement propre et qui, d'autre part, est entraîné par un ou plusieurs systèmes mobiles. L'inversion de ce problème conduit à la construction du pôle d'inflexion dans le mouvement relatif.

Gleichen (*A.*). — Sur l'application de la méthode des imaginaires aux problèmes d'équilibre et de mouvement dans un plan. (243-249).

Rieke (*A.*). — Essai sur l'équation $x^p + y^p = z^p$. (249-254).

Dietrichkeit. — Critères de divisibilité des nombres écrits dans le système décimal. (254-255).

Müller (*R.*). — Construction du centre de courbure de la développée d'une enveloppe des trajectoires dans le mouvement des systèmes plans rigides. (257-266).

Rodenberg (*C.*). — La détermination des courbes des points circulaires d'un quadrilatère articulé plan. (267-277).

L'auteur s'occupe de la construction du lieu des points d'un système mobile dont les trajectoires relatives à un autre système mobile ont des cercles de courbure stationnaires et résout le problème sous certaines conditions.

Saalschütz (*L.*). — Sur un cas spécial de la série hypergéométrique du troisième ordre. (278-295), (321-327).

Ce Travail qui se rattache à une formule sommatoire donnée par l'auteur pour une suite finie (*Zeitschrift*, 35e année) a pour but de rechercher dans quels cas la suite considérée sans être finie peut être exprimée à l'aide d'une suite finie et des fonctions Γ.

Il recherche également les cas où la série hypergéométrique peut s'exprimer d'une manière finie avec la fonction Γ.

Kleiber (*J.*). — Contribution à la théorie cinématique des systèmes articulés. (296-301). (328-338).

Schendel (*L.*). — Mélanges mathématiques. (302-308).

Stoltz (*K.*). — Contribution à la théorie des surfaces algébriques à centre. (308-311).

Dietrichkeit. — Sur les invariants des équations différentielles linéaires. (311-315).

Dietrichkeit. — Critères de divisibilité des nombres écrits dans le système décimal. (316-317).

Heymann (*W.*). — Remarque sur le passage des coordonnées ponctuelles aux coordonnées tangentielles dans les équations différentielles. (317-320).

Sporer (*B.*). — Sur une transformation des courbes algébriques et sur des théorèmes de J. Steiner qui s'y rattachent. (339-348).

Thieme (*H.*). — Sur un complexe orthogonal de Reye. (349-355).

Ce complexe est formé des droites de l'espace qui sont également distantes de deux points donnés.

Doehlmann (*K.*). — Sur les domaines en involution d'une transformation plane de Cremona et plus particulièrement d'une transformation quadratique. (336-378).

Hauck (*G.*). — Sur l'idée de la projection d'une droite. (379-381).

Bachmann. — Théorème arithmétique. (381-382).

Soit p un nombre premier impair et q une racine primitive (mod p); si l'on pose

$$q^{p-1} - 1 = pQ \tag{1}$$

et

$$Q = c_{p-2}q^{p-2} + \ldots + c_2 q + c_1 \tag{2}$$

où les c sont positifs et inférieurs à q et où l'on complète la suite en introduisant des coefficients nuls s'il y a lieu, une permutation circulaire des coefficients

dans (1) donne successivement les multiples de Q

$$1Q, \quad 2Q, \quad \ldots, \quad kQ, \quad \ldots, \quad (p-1)Q$$

de telle manière que kQ est obtenu après h permutations si l'on a

$$h = \text{ind.}\, k.$$

Lohnstein (*Th.*). — Une méthode pour la résolution numérique d'une équation algébrique. (383-384).

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift.

Curtze (*Maximilian*). — Commentaire au *Tractatus de numeris datis* de Jordanus Nemorarius. (1-41-81-121).

Rudio (*F.*). — Sur la convergence d'un produit infini particulier considéré par Viète. (139).

L'auteur établit la formule de Viète

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

et la formule plus générale, due à Euler, relative à un arc quelconque

$$S = \frac{\sin S}{\cos\frac{S}{2}\cos\frac{S}{4}\cos\frac{S}{8}\cdots}.$$

37e année; 1892.

Vivanti (*G.*). — Sur les transformations de contact qui laissent invariable le rapport des courbures totales au point de contact, pour deux surfaces tangentes. (147).

L'auteur, généralisant une proposition de M. R. Mehmke (*Zeitschrift*, 36e année), établit que les transformations considérées sont simplement les transformations projectives.

Ritter (*E.*). — Mouvement d'une particule matérielle chargée d'électricité sous l'action d'un centre fixe, en admettant la loi de Weber. (8-24).

Sporer (*B.*). — Quelques théorèmes sur les polygones réguliers. (25-34).

Grübler (*M.*). — Sur les *courbes des points circulaires* d'un plan glissant sur lui-même. (35-56).

Soient E_1, E_2, E_3, E_4 quatre positions quelconques d'un plan E qui se meut dans un plan E_0, Burmester a démontré que les points A de E dont les positions correspondantes A_1, A_2, A_3, A_4 appartiennent à un cercle, se trouvent sur une courbe du troisième ordre passant par les six points qui se correspondent à eux-mêmes dans les quatre plans pris deux à deux et par les points circulaires à l'infini. Les centres de ces cercles forment également une courbe du troisième ordre de E_0 qui possède des propriétés analogues. Ce sont ces courbes que l'auteur étudie.

Speckmann (*G.*). — *Dorsten* (*H. von*). — Observations sur les critères de divisibilité dans le système décimal de M. Dietrichkeit. (58).

Beyel. — Deux théorèmes sur la collinéation plane. (59-60).

Brunn (*H.*). — Sur l'ordre de grandeur d'une série de moyennes. (60-63).

Haas (*K.*). — Critères de divisibilité des nombres. (63-64).

Sporer (*B.*). — Théorèmes de J. Steiner sur le centre de gravité du système des points communs à une droite et à une courbe algébrique. (65-78).

Kleiber (*J.*). — Sur une manière d'obtenir, pour un nombre quelconque de formes quadratiques, un système complet d'invariants. (80-89).

Extension des méthodes de Gordan au cas de n variables.

Heymann (*W.*). — Manière élémentaire de traiter les équations trinomes et quadrinomes. (90-105).

Brunn (*H.*). — Considérations topologiques. (106-116).

Muth (*P.*). — Sur des couples de tétraèdres. (117-122).

Étude de deux tétraèdres à la fois inscrits et circonscrits l'un à l'autre : Soient A, B, C, D, α, β, γ, δ les sommets des deux tétraèdres nommés de telle sorte que α soit dans le plan BCD, ... ; $24 = 4!$ dispositions sont possibles.

Möbius (*Crelle*, t. 3 et 10) a étudié celle définie par les quatre plans

$$\alpha\beta\gamma D, \quad \beta\gamma\delta A, \quad \gamma\delta\alpha B, \quad \delta\alpha\beta C;$$

Steiner (*systematischen Endwickelungen*) celles que l'on déduit de la précédente par permutations circulaires des quatre lettres A, B, C, D. L'auteur étudie les vingt autres par la méthode de Steiner : il y a une seule solution dans chacun de ces cas *lorsque* α *et* γ *sont arbitraires* alors que dans les cas considérés par Steiner il en existe une infinité.

Helm (*G.*). — Remarque sur une construction dioptrique. (123-125).

Ruoss. — Une contradiction dans la Théorie de l'Électricité d'Edlund. (125-126).

Schönemann. — Généralisation du théorème de Pythagore. (127).

Speckmann (*G.*). — Critères de divisibilité dans le système décimal. (128).

Müller (*R.*). — Sur le mouvement d'un système plan rigide dont on donne cinq positions infiniment voisines. (129-150).

Mie (*G.*). — Sur le théorème fondamental d'existence des intégrales d'équations aux dérivées partielles. (152-171), (193-212).

I. Sur les systèmes infinis d'équations différentielles.

II. Systèmes d'équations aux dérivées partielles regardés comme des systèmes aux différentielles totales de classe infinie.

III. Applications.

Richter (*P.-B.*). — Extension de la règle de Guldin. (172-177).

Jahnke (*E.*). — Sur une nouvelle méthode pour le développement de la théorie des fonctions sigma de plusieurs arguments. (178-185).

L'auteur expose les principales simplifications de cette théorie qui résultent des relations remarquables, établies par Weierstrass et M. F. Caspary, entre les fonctions thêta de plusieurs arguments et les coefficients d'une substitution orthogonale.

Mehmke (*R.*). — Sur la courbure géodésique d'une courbe tracée sur une surface et sur sa variation lorsque l'on transforme la surface. (186-189).

Par une transformation ponctuelle la courbure géodésique est transformée *linéairement*. L'auteur démontre ce théorème et l'étend à des transformations de surfaces déduites des transformations de contact.

Kraus (*J.*). — Addition à la remarque *Théorème arithmétique* de Bachmann. (*Zeitschrift*, 36e année, p. 383).

Sporer (*B.*). — Contruction d'une tangente en un point d'une courbe du troisième degré. (191).

Müller (*R.*). — Construction des points de Burmester pour un quadrilatère articulé plan. (213-217).

Rodenberg. — Contribution à l'étude systématique des mouvements plans d'un système rigide. (218-256).

Pirogow (*N.-N.*). — Sur le viriel des forces. (257-290).

Brunn (*H.*). — Théorème sur les déterminants orthosymétriques et des déterminants voisins formés avec les fonctions symétriques fondamentales de n éléments. (291-297).

Philippoff (*M.*). — Nombres symboliques et nombres doubles. (299-304).

Application à l'Algèbre élémentaire des représentations symboliques adoptées par Gauss dans la théorie des formes quadratiques.

Mehmke (*R.*). — Petites contributions aux applications des méthodes de Grassmann. (305-310).

Rodenberg. — Note additionnelle au travail de l'auteur *Sur le mouvement plan des systèmes rigides* (*Zeitschrift*, 37e année, p. 218).

Beyel. — Intersection d'une droite et d'une conique; tangentes à la conique issues d'un point. (316).

Kurz (*A.*). — Le minimum de déviation dans les prismes. (317-318).

Kurz (*A.*). — Le troisième arc-en-ciel. (318-320).

Kraus (*J.*). — Nouveaux fondements d'une théorie générale des nombres. (321-340).

Soit α un entier quelconque; tout nombre entier peut s'écrire dans un système de base α; l'auteur se propose de développer d'une façon systématique les propriétés des nombres entiers qui sont indépendantes du choix de la base α.

Sporer (*B.*). — Théorèmes de J. Steiner sur les milieux des segments déterminés sur une droite par une courbe algébrique. (340-366).

Rodenberg. — Sur le système des trois centres de courbure qui se présente dans le mouvement relatif de trois systèmes plans rigides. (366-374).

Saalschütz (*L.*). — Formules de récurrence réduites pour les nombres de Bernoulli. (374-378).

Ruoss. — Sur la théorie de la courbure de Gauss. (378-381).

Hossfeld (*C.*). — Sur un théorème stéréométrique de Schlömilch. (382).

Dörr (*J.*). — Critères de divisibilité dans le système décimal. (383-384).

Historisch-literarische Abtheilung der Zeitschrift.

Wappler (*E.*). — Remarques sur la *Rhythmomachie*. (1).

Tannery (*Paul*). — Psellus sur Diophante. (41).

Gutzmer (*A.*). — Souvenir à Paul Günther. (46).

Heiberg (*J.-L.*). — Les manuscrits employés par Guillaume de Mœrbek. (81).

Nesselmann (*G.-H.-F.*). — Additions à Diophante. (121, 161).

Wittstein (*A.*). — Ce que nous savons sur les anciennes sphères terrestres ou célestes. (201).

Supplément.

Suter (*H.*). — La nomenclature des mathématiciens dans le *Fihrist de Ibn Abî Jackûb an-Nadîm*. (1).

Wittstein (*A.*). — Fragments astronomiques tirés de la littérature orientale. (89).

Burkhardt (*H.*). — Les débuts de la théorie des groupes et Paolo Ruffini. (119).

Isenkrahe (*C.*). — Sur la réduction de la pesanteur à l'absorption et sur les lois que l'on en déduit. (161).

VERSLAG DER ZITTINGEN VAN DE WIS-EN NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam. In-4° (1).

Tome III; mai 1894-avril 1895.

Schols (*Ch.-M.*). — Examen de la division des cercles azimutaux des théodolites, employés dans la triangulation des Pays-Bas. (2-10).

L'auteur récuse la méthode basée sur la comparaison entre elles des douze parties d'un degré, cette méthode ne faisant connaître que l'inexactitude relative de ces parties sans porter sur leurs valeurs absolues. Il la remplace par la mesure d'un même angle de $\pm 45°$ au moyen de différentes parties du limbe. Ainsi, pendant tout l'été, il obtint des résultats auxquels on pouvait se confier. Cependant, vers l'automne, il trouva que l'angle mesuré diminuait continuellement. Une dilatation inégale de la table de marbre qui porte les deux collimateurs, enfoncée en partie dans la muraille, fut reconnue en être la cause. Cet inconvénient n'étant pas à éviter, l'auteur arrange les observations d'après le temps, de manière à éliminer la source d'erreur. Son examen porte sur six théodolithes.

Schoute (*P.-H.*). — Rapport intime entre deux divisions homogènes de l'espace, celle en cubes et celle en *tétrakaidékaèdres*. (15-16).

Le tétrakaidékaèdre est limité par huit hexagones réguliers dont les plans prolongés forment un octaèdre régulier et par six carrés dont les plans prolongés forment un cube. La division homogène de l'espace en ces corps à quatorze faces a été indiquée par Lord Kelvin (*Nature*, 8 et 15 mars 1894). On passe de l'une de ces divisions à l'autre à l'aide du théorème d'après lequel un cube est coupé suivant un hexagone régulier par un plan central perpendiculaire à une diagonale corporelle.

De Vries (*J.*). — Sur les équations algébriques dont les racines se rangent en triples. (64-67).

---

(1) Voir *Bulletin*, XIX$_2$, p. 221.

L'auteur s'occupe des arrangements en triples, de manière que chaque combinaison de deux racines n'y figure qu'une fois. La relation entre les trois racines d'un triple se réduit à $x_1 x_2 x_3 = 1$ ou à $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Les équations sont nécessairement de l'ordre $n = 6m + 1$ ou $n = 6m + 3$ (3, 7, 9, 13, 15, ...). Le cas $n = 3$ est évident; les cas $n = 7$ et $n = 9$ ne sont pas réalisables. Deux arrangements différents pour $n = 13$. Rapport des résultats obtenus avec des configurations de points situés sur une cubique plane.

Wind (*C.-H.*). — Sur le phénomène de Kerr. (82-89).

Kuenen (*J.-P.*). — La condensation d'un mélange de gaz. (90-99).

De Vries (*J.*). — Involutions fondamentales sur des courbes planes du cinquième ordre à quatre points doubles. (115-117).

Sur une quintique plane quadrinodale, le faisceau de coniques, défini par les points doubles (Δ), marque l'involution quadrique unique que la courbe possède. Les jonctions des couples enveloppent une conique ψ_2, tangente en cinq points à la courbe originale φ_5. Avec les points (Δ) les cinq points de contact forment les points de base d'un faisceau de cubiques qui détermine aussi l'involution quadratique fondamentale F_2. Chaque conique, ayant avec ψ_2 un contact double, marque sur φ_5 deux quintuples dont chacun définit avec (Δ) un faisceau cubique capable d'engendrer F_2. Les triples d'intersection de φ_5 avec les jonctions des couples de F_2 constituent une involution F_3, déterminée aussi par tout faisceau de cubiques passant par (Δ) et deux couples de F_2. Les couples de F_2 se rangent deux à deux dans les groupes d'une involution quadruple, définie par deux des points (Δ) et deux points fixes de φ_5 (six involutions F_4). Par les six points doubles de F_2 passent quatre quartiques ayant trois des points (Δ) comme points doubles; les deux autres intersections de chacune d'elles avec φ_5 déterminent, avec les trois points (Δ) correspondants, un système de quartiques trinodales où chaque courbe supporte trois couples de F_2. Les triples des points qui forment des couples de F_2 avec un triple de F_3, forment une involution fondamentale nouvelle ξ_3 que l'on peut engendrer encore par un faisceau de cubiques nodales. La conique ψ_2 peut dégénérer en un point double s où se croisent deux tangentes doubles de φ_5; alors chaque droite par s porte deux couples de F_2, et trois couples quelconques se trouvent sur une cubique contenant les points s et (Δ).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Approximation de la valeur du rayon de courbure moyen de la Terre à la latitude de Java, au moyen de l'excès sphérique du polygone qui renferme le réseau triangulaire de cette île. (125-130).

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur l'absence des phénomènes critiques d'un mélange, ou la modification de ces phénomènes, à

cause de l'existence d'un pli longitudinal de la surface φ à de hautes températures. (133-137).

De Vries (*J.*). — Ueber eine gewisse Gruppe ebener Curven (Sur un groupe de courbes planes). (139-144).

Il s'agit d'une courbe plane φ du $(n+m)^{\text{ième}}$ ordre, douée de m^2 points doubles (Δ) qui forment la base d'un faisceau de courbes C^m. Elle peut être engendrée par une correspondance $(2, 1)$ entre ce faisceau et un système Σ d'indice 2, de courbes C^{n-m}. Les groupes de $n^2 - m^2$ points de φ qui forment avec (Δ) la base d'un faisceau de courbes C^n, se rangent en couples marqués par une courbe $C^{2(n-m)}$ qui touche l'enveloppe de Σ en $2(n-m)^2$ points situés sur une C^{n-m}. D'ailleurs, cette enveloppe elle-même est une courbe $C^{2(n-m)}$ sur laquelle les deux groupes coïncident de sorte qu'elle touche φ en $n^2 - m^2$ points. A tout système Σ correspond une involution, liée d'autre part à l'involution fondamentale marquée par le faisceau de courbes C^m. Pour $m = 1$ et $m = 2$ la courbe φ est générale. Dans le cas $m = 2$, $n = 3$ on retombe sur quelques-unes des propriétés communiquées dans le Mémoire précédent.

De Vries (*J.*). — Ueber gewisse räumliche Configurationen (Sur des configurations dans l'espace). (154-161).

L'auteur part de la configuration $(8^4, 8_4)$ de Mœbius (*Journal de Crelle*, t. 3, p. 273) étudiée en détail par M. Neuberg en 1884. En composant deux configurations $(8^4, 8_4)$, il trouve une configuration $(16^5, 16_5)$ décomposable de cinq manières différentes en deux configurations $(8^4, 8_4)$. Il démontre que cette configuration $(16^5, 16_5)$ trouvée par M. C. Andréeff (*Comm. de Kharkof*, t. II, p. 95) et toutes les configurations $[(2^{n-1})^n, (2^{n-1})_n]$ qui s'en déduisent, sont des configurations régulières.

Van der Waals (*J.-D.*). — L'interprétation cinétique du potentiel thermodynamique. (205-219).

L'égalité du potentiel thermodynamique de deux phases coexistantes d'une même substance mène à des équations qui expriment l'égalité des nombres de molécules échangées par les deux phases (loi de Kamerlingh Onnes). L'auteur démontre cette loi, d'abord pour le cas d'une substance unique, ensuite pour un mélange de deux substances. Enfin il fait voir que, dans le dernier cas, la matière dont la transmission dans la seconde phase exige le plus grand travail est en abondance dans la première phase.

Traduction française dans les *Archives néerl.*, t. XXX, p. 137.

Schoute (*P.-H.*). — Sur le nombre des types de cristaux du système régulier dans l'espace ε^n à n dimensions. (282-284).

L'auteur représente un cristal du système régulier dans ε^n par le symbole $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ où les segments a déterminés par les êtres limitants ε^{n-1} sur les axes sont rangés par ordre de grandeur croissante. En faisant suivre a_{n-1} du symbole $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ par a_n il y a deux cas à distinguer. Si a_n est

infiniment grand. a_n l'est tout de même : si a_{n-1} a une valeur finie, on obtient trois types différents de ε^n en posant $a_n = a_{n-1}$, $a_n = a_{n-1}$ et fini, a_n infini. Ainsi, chaque type de ε^{n-1} mène à trois types de ε^n ou à un seul, selon que a_{n-1} est fini ou infini. Si donc x_n et y_n représentent les nombres des types ε^n à élément dernier fini et infini, on trouve les relations récurrentes

$$x_n = 2x_{n-1} \quad \text{et} \quad y_n = x_{n-1} + y_{n-1}$$

ou

$$x_n = 2x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n - y_n = x_{n-1} - y_{n-1}.$$

Pour $n = 2$ on a

$$x_2 = 2, \quad y_2 = 1,$$

donc on trouve

$$x_n = 2^{n-1}, \quad y_n = 2^{n-1} - 1$$

et pour le nombre total $2^n - 1$.

Lebret (*A.*). — La dissymétrie du phénomène de Hall dans le bismuth par rapport à différentes directions dans le champ magnétique. (292-298).

Tome IV : mai 1895-avril 1896.

Kapteyn (*J.-C.*). — Sur la distribution des vitesses cosmiques. (1-18).

L'auteur attribue l'insignifiance des résultats obtenus jusqu'à présent par rapport à la constitution de l'univers à la défectuosité des hypothèses, en partie invraisemblables, en partie sensiblement fausses, dont on s'est servi. Il cherche à démontrer qu'au contraire un petit nombre d'hypothèses admissibles permet de déduire des observations une première approximation : 1° de la loi de distribution des vitesses linéaires absolues; 2° de la loi de variation de l'accumulation des étoiles avec la distance au Soleil; 3° de la loi de distribution des étoiles de différente clarté absolue. Jusqu'ici l'auteur s'est occupé principalement de la première loi. Il la fait dépendre des trois hypothèses suivantes : *a*. Dans le mouvement des étoiles, il n'y a pas de préférence pour une direction déterminée; *b*. La loi de distribution des vitesses est indépendante de la distance à notre système solaire; *c*. La fonction de la probabilité d'une vitesse linéaire de grandeur donnée n'admet qu'un seul maximum. De la première hypothèse on ne saura se défaire qu'autant que l'on dispose de méthodes pour déterminer exactement des parallaxes annuelles inférieures à 0″,01. La seconde hypothèse obtiendrait une grande vraisemblance, si l'on avait démontré que la vitesse linéaire *moyenne* ne varie pas avec la distance au Soleil. La troisième hypothèse est nécessaire pour l'approximation de la fonction de probabilité $f(s)$ de la vitesse linéaire s.

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur les caractères qui décident de l'allure de la courbe de plissement dans le cas d'un mélange de deux substances. (90-30, 82-93).

Dans le cas d'un mélange de deux substances dont la température et la pression ont été déterminées de manière que les deux phases coexistantes se correspondent en composition et en densité, on donne le nom de *courbe de plissement* à la ligne qui fait connaître la relation entre ces valeurs de température τ et de pression p pour des degrés variables x et $1-x$ de composition. Ce nom fait allusion à la circonstance qu'un mélange se trouve dans la condition indiquée, si par son volume V et par sa composition x, $1-x$ il occupe la place du point de plissement sur la surface ψ. Quoique, à présent, il n'est pas encore possible de déduire l'équation de cette courbe, la théorie en donne l'équation différentielle dans la forme

$$\frac{dp}{d\tau}\,\frac{\partial^2 V}{\partial x^2_{p,\tau}} = -\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2_{p,\tau}},$$

où η représente l'énergie. De cette équation différentielle on déduit les particularités les plus saillantes de la courbe. L'auteur en étudie deux points particuliers. Au premier point, la courbe touche et y termine le lieu des points de tension maximum, au second la tangente est parallèle à l'axe des pressions.

Dans la seconde partie, l'auteur donne une nouvelle déduction de l'équation différentielle de la courbe de plissement et démontre que la courbe de tension a une pente plus faible que la courbe de plissement, si $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2_{p,\tau}}$ est négatif. Ensuite il trace le chemin que l'on aura à suivre pour parvenir à la connaissance de p, V, τ à l'état critique en fonction de x.

Traduction française dans les *Archives néerl.*, t. XXX, p. 266 et 278.

Kuenen (*J.-P.*). — Influence de la pesanteur sur les phénomènes critiques de substances simples et de mélanges. (41-53).

Dans certains cas la pesanteur peut troubler les phénomènes critiques des mélanges. Par exemple, entre deux températures voisines, de part et d'autre de la température du point de plissement, la condensation rétrograde de première et de seconde espèce ne se manifestent pas complètement, parce que sous la compression le ménisque disparaît avant qu'une des deux phases ait entièrement disparu. Cependant, ces phénomènes des mélanges sous l'influence de la pesanteur se déduisent tout de même entièrement de la théorie de M. Van der Waals.

De Vries (*J.*). — Théorèmes d'addition d'intégrales elliptiques. (96-103).

En suivant le chemin tracé par Abel, l'auteur trouve les relations entre les limites supérieures de quatre intégrales elliptiques de première espèce, à l'aide de la parabole variable $y = ax^2 + bx + c$. Pour $c = 1$ le théorème d'addition de trois intégrales se présente. Pour la somme de trois intégrales de seconde espèce il trouve $-k^2 x_1 x_2 x_3$, les limites supérieures x_1, x_2, x_3 étant liées par les mêmes relations que celles des intégrales de première espèce. Même la somme de trois intégrales

$$\int_0^{x_i} \frac{dx}{(x^2-n^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

de troisième espèce se réduit à une expression simple.

De Vries (*J.*). — Ueber eine gewisse Klasse ganzer Functionen (Sur une certaine catégorie de fonctions entières). (133-144).

En désignant par Y_n la fonction de y qui disparaît pour $y = 2\cos\frac{2k}{2n+1}\pi$ ($k = 1, 2, \ldots, n$), l'auteur démontre que la suite des fonctions de Sturm de l'équation $Y_n = 0$ est formée par les fonctions Y'_k ($k = n, n-1, \ldots, 2, 1$). La fonction Y_n satisfait à l'équation connue $Y_n - yY_{n-1} + Y_{n-2} = 0$. La fonction la plus générale qui vérifie cette équation de récurrence est

$$(ay + b)Q_{n-1} - cQ_{n-2}$$

où la fonction entière Q_n s'évanouit pour $y = 2\cos\frac{k}{n+1}\pi$, ($k = 1, 2, \ldots, n$). Cette solution comprend aussi les fonctions U_n et V_n dont les racines sont $2\cos\frac{2k+1}{2n+1}\pi$ et $2\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$). Enfin, l'auteur prouve que pour les fonctions Q_n, U_n, V_n la suite des fonctions de Sturm se forme de la même manière que pour Y_n. Quelques relations entre des produits de cosinus de la forme $\cos\frac{m}{n}\pi$.

Lorentz (*H.-A.*). — Le théorème de M. Poynting sur l'énergie du champ électromagnétique et deux propositions générales sur la propagation de la lumière. (176-187).

L'auteur applique les équations fondamentales de la théorie de Maxwell à un système quelconque de corps, conducteurs ou diélectriques, isotropes ou anisotropes, entourés de tous côtés par l'éther et soumis à des forces électromotrices. Si, pour un certain état de mouvement A, on désigne par $\mathfrak{s}$ le courant électrique, par $\mathfrak{E}$ la force électrique, par $\mathfrak{H}$ la force magnétique, par $\mathfrak{B}$ l'induction magnétique et que l'on distingue par des accents les quantités correspondantes pour un second état A', on arrive à l'équation

$$(1)\qquad \int(\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}}')\,d\tau + 4\pi\int(\mathfrak{E}'\mathfrak{s})\,d\tau = \int\begin{vmatrix} \mathfrak{H}_x & \mathfrak{H}_y & \mathfrak{H}_z \\ \mathfrak{E}'_x & \mathfrak{E}'_y & \mathfrak{E}'_z \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} d\sigma.$$

Dans cette formule, où $(\mathfrak{H}\dot{\mathfrak{B}}')$ et $(\mathfrak{E}'\mathfrak{s})$ représentent les sommes $\sum\left(\mathfrak{H}_u\frac{\partial\mathfrak{B}'_u}{\partial t}\right)$ et $\sum(\mathfrak{E}'\mathfrak{s})$ pour $u = x, y, z$, il est question de l'espace τ situé à l'intérieur d'une surface fermée quelconque σ; les indices x, y, z servent à indiquer les composantes des vecteurs et λ, μ, ν représentent les cosinus directeurs de la normale extérieure de la surface. On revient à l'équation de M. Poynting (*Phil. Trans.*, London, t. CLXXV, p. 343) en prenant pour A et A' un même état de mouvement. Si, au contraire, A et A' sont différents, on peut établir une seconde relation en changeant entre elles les quantités qui se rapportent à A et A'; cette nouvelle équation étant soustraite de l'équation (1), on obtient une formule trouvée par M. Volterra (*Acta math.*, t. XVI, p. 189) sous une forme légèrement différente. Ici, cette formule est appliquée à l'étude de la pro-

pagation de la lumière. En désignant par *source élémentaire lumineuse* un espace infiniment petit ω dans lequel agit une force électromotrice de direction constante et dont la grandeur peut être représentée par $p \cos \frac{2\pi}{T}(t - q)$, où q a la même valeur dans toute l'étendue de ω, par *direction et phase* d'une source celle de la force électromotrice, par *intensité* d'une source la valeur de l'intégrale $\int p\, d\tau$ étendue à l'espace ω, par *couple de sources* un système de deux sources infiniment voisines l'une de l'autre de directions et d'intensités égales, mais de phases opposées, on a :

1° Une source de la direction h, placée dans un point P, produit dans un autre point P′ du système, un courant électrique dont la composante suivant la direction quelconque h' est égale à la composante suivant la direction h du courant que produirait en P une source placée en P′ et ayant la direction h' et la même intensité et la même phase que la première source.

2° Les vibrations qui sont produites à l'intérieur d'une surface fermée par des sources extérieures quelconques peuvent être considérées comme provenant d'une distribution déterminée de sources et de couples de sources sur la surface elle-même.

Le premier théorème est au fond la même chose qu'une loi de réciprocité bien connue qui a été énoncée, entre autres, par Von Helmholtz dans son *Optique physiologique*. Le second théorème est une extension du principe de Huygens.

Kapteyn (*W.*). — Sur un problème *d'analysis situs*. (199-202).

Supposons qu'on ait divisé une surface de degré de connexité p en D polygones curvilignes limitant chacun une portion de la surface, que le nombre des côtés soit G et celui des sommets H. Alors, on a la relation $D + H - G = 2(1 - p)$, connue sous le nom de *théorème de L'Huillier*. Pour la démontrer, l'auteur prend pour modèle une surface fermée à p trous, symétrique par rapport à un plan. Ce plan coupe les p ouvertures suivant p circonférences égales dont les centres forment les sommets d'un polygone régulier et la surface suivant une circonférence concentrique à ce polygone. La surface admet deux plans tangents singuliers, parallèles au plan de symétrie; chacun de ces deux plans touche la surface suivant une circonférence et p de ses rayons. En remplaçant les côtés des polygones par des lignes géodésiques, on a, d'après Gauss,

$$\int\int \frac{d\sigma}{RR'} = P_n - (n - 2)\pi,$$

où P_n représente la somme des angles, n le nombre des côtés, R et R′ les rayons principaux de courbure de la surface et $d\sigma$ l'élément du polygone. La sommation du second membre donnant $\Sigma P_n = 2\pi H$, $\Sigma(n - 2)\pi = 2(G - D)\pi$, on aura

$$\int\int \frac{d\sigma}{RR'} = 2\pi(D + H - G),$$

où l'intégrale qui représente la valeur sphérique de la surface, s'étend à toute la surface. Pour déterminer cette intégrale, on peut diviser la surface en

$p+1$ parties, la première partie étant la partie extérieure entre les deux circonférences situées dans les deux plans tangents, les autres étant les parties congruentes situées entre les secteurs correspondants de ces plans. Pour la première partie, où les rayons R et R′ ont le même signe, la valeur sphérique est 4π; pour chacune des p parties congruentes, les rayons ayant des signes opposés, la valeur sphérique est -4π. Il s'ensuit la relation indiquée. Toutefois, pour $p=0, 1, 2$ on doit modifier un peu le raisonnement précédent.

De Vries (*J.*). — Sur les coordonnées bipolaires. (219-224).

Dans l'examen des courbes à l'aide du système de coordonnées bipolaires de rayons vecteurs p, q, issus de deux pôles fixes P, Q, l'introduction d'un troisième rayon vecteur r dont le pôle R se trouve sur la droite PQ, offre quelquefois des avantages. En représentant PQ, PR, QR par f, g, h, on a, d'après le théorème de Stewart,

$$hp^2+gq^2=fr^2+fgh.$$

Ainsi, l'ovale de Descartes $\alpha p+\beta q=\gamma f$ aux deux foyers P, Q est représenté en même temps par une des équations $\gamma p-\beta r=\alpha g$, $\gamma q+\alpha r=\beta h$, si le troisième foyer R (théorème de Chasles) est déterminé par la condition

$$\alpha^2 g-\beta^2 h=\gamma^2 f;$$

et, à l'aide de ces trois équations, on trouve encore l'équation tripolaire

$$\alpha gq-\beta hp+\gamma fr=0.$$

Ici, l'auteur étudie les angles φ et ψ que la tangente d'une courbe $F(p, q)=0$ forme avec les rayons vecteurs p et q. Il trouve

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}=\frac{(p^2+q^2-f^2)\,dp-2pq\,dq}{2pq\,dp-(p^2+q^2-f^2)\,dq}$$

et en déduit que deux courbes dont les éléments sont distingués les uns des autres par les indices 1 et 2 se coupent en un point commun

$$(p_1, q_1)=(p_2, q_2)=(p, q),$$

sous un angle droit sous la condition

$$2pq(dp_1\,dp_2+dq_1\,dq_2)=(p^2+q^2-f^2)(dp_1\,dq_2+dp_2\,dq_1).$$

Comme application de cette formule, il fait voir que deux cartésiennes confocales se coupent sous un angle droit. Ainsi le système $\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}=\frac{\gamma}{f}$ de courbes méridiennes des niveaux potentiels de deux quantités de matière α, β dans les pôles P, Q a pour trajectoires orthogonales le système $\alpha\cos\theta_1+\beta\sin\theta_2=\delta$ de courbes de force, où θ_1 et θ_2 sont les angles que les rayons vecteurs p, q font avec la droite PQ.

Schoute (*P.-H.*). — La surface romaine de Steiner. (224-230).

2e Partie.

Etude de la surface

$$a y^2 z^2 + b z^2 x^2 + c x^2 y^2 + 2 d x y z t = 0.$$

Réduction de l'équation à

$$y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 = 2 k x y z.$$

L'équation

$$\Sigma q r (q^2 r^2 + r^2 p^2 + p^2 q^2) x = 2 k p^2 q^2 r^2$$

du plan tangent au point $x = pt$, $y = qt$, $z = rt$. Décomposition du premier membre de l'équation

$$x y z \Sigma [q r (q^2 r^2 + r^2 p^2 + p^2 q^2) x] - p^2 q^2 r^2 \Sigma y^2 z^2 = 0$$

du cône à sommet O passant par l'intersection de la surface avec son plan tangent en deux facteurs de la forme

$$a y z + b z x + c x y, \quad a' y z + b' z x + c' x y$$

avec les conditions $a a' = b b' = c c'$.

Correspondance involutive des deux cônes quadratiques à sommet commun O dont les deux coniques d'intersection de la surface avec un quelconque de ses plans tangents sont des directrices.

L'équation de la surface peut prendre une des quatre formes suivantes :

$$(y z + z x + x y)^2 = 2 x y z (x + y + z + k),$$
$$(-y z + z x + x y)^2 = 2 x y z (x - y + z + k),$$
$$(y z - z x + x y)^2 = 2 x y z (-x + y + z + k),$$
$$(y z + z x - x y)^2 = 2 x y z (x + y - z + k).$$

Donc, les quatre plans

$$x + y + z + k = 0, \qquad x + y - z + k = 0,$$
$$x - y + z + k = 0, \qquad -x + y + z + k = 0$$

touchent la surface suivant des coniques qui, d'après l'identité

$$(x + y + z)^2 = 2 (y z + z x + x y) + k^2 = x^2 + y^2 + z^2 + k^2$$

et trois identités analogues, se révèlent comme des cercles. Démonstration que ces quatre circonférences forment toute la courbe parabolique de la surface. L'équation

$$\Sigma (x_1^4) - 4 \Sigma (x_1^3 x_2) + 6 \Sigma (x_1^2 x_2^2) + 4 \Sigma x_1^2 x_2 x_3 - 10 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$$

en coordonnées homogènes normales par rapport au tétraèdre régulier des plans tangents singuliers.

Le lieu des centres des coniques de la surface est une autre surface de Steiner représentée par $y^2 z^2 + z^2 x^2 + x^2 y^2 + k x y z = 0$.

De Vries (J.). — Sur une relation entre un hyperboloïde réglé et un système confocal d'ovales de Descartes. (252-259).

Bull. des Sciences mathem., 2e série, t. XXII. (Mai 1898.) R.7

1. L'auteur continue l'ordre d'idées de la Communication précédente. Il combine l'équation $\alpha p + \beta q = \gamma f$ d'un ovale de Descartes, où f désigne la distance des origines P, Q de p, q, à la relation $hp^2 + gq^2 = fr^2 + fgh$ (théorème de Stewart), où r est un troisième rayon vecteur issu d'un point R de PQ. Il démontre le théorème de Chasles que R peut être choisi de manière à représenter un troisième foyer de la courbe, en envisageant les rayons vecteurs p, q, r comme les coordonnées rectangulaires d'un point de l'espace. Alors, il s'agit d'un plan $\alpha p + \beta q = \gamma f$ et d'un hyperboloïde $\frac{p^2}{fg} + \frac{q^2}{fh} - \frac{r^2}{gh} = 1$. Donc, la possibilité de représenter la même courbe par une équation linéaire en (p, r) ou en (q, r) est démontrée aussitôt que l'on a fait voir que les deux équations en p, q, r peuvent appartenir à une droite de l'hyperboloïde : car alors, les équations cherchées en (p, r) et (q, r) ne sont autre chose que les deux autres projections de cette droite. En posant $fg = a^2$, $fh = b^2$, $gh = c^2$, l'hyperboloïde se représente par

$$\frac{p^2}{a^2} - \frac{r^2}{c^2} = 1 - \frac{q^2}{b^2}$$

avec la condition

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Un de ses deux systèmes de génératrices est donc

$$\frac{p}{a} \sin 2\psi - \frac{q}{b} \cos 2\psi = 1,$$

$$\frac{p}{a} \operatorname{cosec} 2\psi - \frac{r}{c} \cot 2\psi = 1,$$

$$\frac{q}{b} \sec 2\psi + \frac{r}{c} \operatorname{tang} 2\psi = 1.$$

Si $\alpha p + \beta q = \gamma f$ est identique à la première de ces trois équations, les deux autres deviennent $\gamma p - \beta r = \alpha g$, $\gamma q + \alpha r = \beta h$.

2. L'autre système de droites de l'hyperboloïde représente un second système d'ovales de Descartes aux mêmes foyers P, Q, R. Ce système se compose des trajectoires orthogonales du système $\alpha p + \beta q = \gamma f$.

3. Si deux des foyers coïncident, la relation indiquée devient illusoire. Alors, les courbes sont des limaçons de Pascal qui n'admettent qu'une équation bipolaire linéaire unique. De même, les courbes $p + \lambda q = f$ et $-p + \mu q = f$ se coupent orthogonalement.

4. L'intersection de l'hyperboloïde avec un plan quelconque $r = \lambda p + \mu q$ mène aux cassiniennes à quatre foyers P, Q, R, S situés sur une droite. Cas particulier de la lemniscate, où R et S se réunissent dans le centre de la courbe.

Schoute (*P.-H.*). — Les courbes gauches les plus simples situées sur la surface romaine de Steiner. (272-285).

1. Soit P un point d'intersection d'une courbe gauche située sur la surface S^4 de Steiner et un des plans coordonnés, et représentons par p et π la tangente et le plan osculateur de cette courbe en ce point. Alors on trouve :

a. Chaque point P qui ne coïncide pas avec l'origine se trouve sur un des trois axes.

b. En général, la tangente p est une droite quelconque par P, située en un des deux plans tangents π_1, π_2 à S^4 en P et non située en un des deux plans coordonnés par l'axe qui contient P, de manière que P est point d'intersection simple de la courbe avec chacun de ces deux plans tangents coordonnés. Si p coïncide avec l'axe, le plan osculateur π coïncide avec un des deux plans tangents; alors, P compte pour deux points d'intersection de la courbe avec chacun des deux plans coordonnés. Et, si l'axe passe par trois ou plusieurs points consécutifs de la courbe, le nombre des points d'intersection des deux plans coordonnés en P avec la courbe est toujours le même pour ces deux plans.

c. En général, la tangente à l'origine à une branche qui y passe se trouve dans un des trois plans qui forment le cône osculateur de S^4 en ce point, c'est-à-dire en un des trois plans coordonnés, sans qu'elle coïncide avec l'un des axes. Alors, ce point représente deux points d'intersection avec un des trois plans et un seul point d'intersection avec chacun des deux autres. Si la tangente coïncide avec l'axe, le plan osculateur coïncide avec un des plans coordonnés. Alors l'origine représente successivement 3, 2, 1 points d'intersection avec les plans coordonnés. Si l'axe passe en l'origine O par m points de la courbe, ces nombres 3, 2, 1 sont à remplacer par $m+1$, m, 1.

d. Si P est point multiple, on trouve que les lois indiquées s'appliquent à chacune des branches de la courbe qui y passent.

2. Supposons que la courbe R^n de l'ordre n sur S^4 possède

p_1, p_2, p_3 branches par O, qui touchent les plans coordonnés en dehors des axes,
q_1, q_2, q_3 branches par O, qui touchent les axes coordonnés,
r_1, r_2, r_3 points, différents de O, sur les axes.

Considérons le cône de l'ordre $n - \Sigma p - \Sigma q$ qui projette R^n du point O comme centre et son intersection de l'ordre $4(n - \Sigma p - \Sigma q)$ avec S^4. Cette courbe, dont O est un point multiple de l'ordre $3(n - \Sigma p - \Sigma q)$, se décompose en R^n et les axes coordonnés comptés successivement $2(q_1 + r_1)$, $2(q_2 + r_2)$, $2(q_3 + r_3)$ fois. On a donc

$$4(n - \Sigma p - \Sigma q) = n + 2(\Sigma q + \Sigma r)$$

ou, si nous comptons les branches par O,

$$3(n - \Sigma p - \Sigma q) = \Sigma p + \Sigma q + 2(\Sigma q + \Sigma r),$$

ou enfin, si l'on cherche le nombre des points d'intersection avec un des plans coordonnés

$$(1) \qquad 3n = 4\Sigma p + 6\Sigma q + 2\Sigma r.$$

3. A l'aide de la relation (1) on trouve les résultats suivants :

a. La surface S^4 ne contient pas de courbe gauche d'ordre impair.

b. La surface S^4 ne contient pas de biquadratique gauche $R^4(2, 2)$ sans point double.

c. Les courbes non planes les plus simples de S^4 sont les courbes $R^4(3, 1)$.

4. On obtient une courbe $R^4(3, 1)$ sur S^4 en coupant S^4 par un cône K^4 dont les axes coordonnés sont des arêtes doubles. Le système de ces cônes, et donc

aussi le système des courbes $R^4(3, 1)$, est un système quintuplement infini. La quadrique unique passant par une de ces $R^4(3, 1)$ ne passe pas par O et contient donc encore une autre $R^4(3, 1)$ de S^4. Donc les quadriques arrangent les $R^4(3, 1)$ de S^4 en couples. Les cônes K^4, représentés par

$$a_i(y^2z^2 + b_i(z^2x^2 - c_i(x^2y^2) + (yz(b_ic_ix - c_ia_iy - a_ib_iz) = 0,$$

pour $i = 1$ et $i = 2$, appartiennent à des courbes correspondantes $R^4(3, 1)$ sous les conditions $a_1a_2 = b_1b_2 = c_1c_2$.

5. Le système quintuplement infini des courbes $R^4(3, 1)$ de S^4 contient trois systèmes quadruplement infini de courbes à un point double sur un des axes et trois systèmes triplement infini de courbes à un point double en O. Ces courbes R^4 à point double sont nécessairement des courbes $R^4(2, 2)$.

Lorentz (H.-A.). — L'équilibre des radiations calorifiques dans le cas des corps biréfringents. (305-311).

L'éther contenu dans un espace qui est entouré d'une enveloppe parfaitement noire et maintenue à une température constante, sera parcouru dans tous les sens par des rayons calorifiques ou lumineux et deviendra par cela même le siège d'une certaine énergie. Un état semblable existera à l'intérieur d'un corps diathermane quelconque M, placé dans cet espace et, dans l'hypothèse que ce corps soit isotrope, on a calculé depuis longtemps le rapport qui s'établira entre la *densité* de l'énergie (quantité d'énergie par unité de volume) qui se trouvent dans le corps M d'une part et dans l'éther ambiant de l'autre. L'auteur a considéré le cas où le corps est biréfringent. L'état interne qui se trouve en équilibre avec les radiations de l'éther doit alors être indépendant de la direction de la surface. C'est ce qu'exige la Thermodynamique et ce qu'on peut vérifier en se basant sur les lois fondamentales de l'Optique. Parmi tous les rayons qui s'entrecroisent à l'intérieur du corps M, on peut isoler par la pensée ceux qui satisfont aux conditions suivantes :

1° Que la période des vibrations soit comprise entre T et $T + dT$;

2° Que la normale des ondes soit située à l'intérieur d'un cône déterminé, à ouverture infiniment petite $d\omega$;

3° Que la direction des vibrations soit l'une des deux qui sont compatibles avec la direction que l'on a choisie pour les rayons eux-mêmes.

L'auteur démontre que l'état est stationnaire aussitôt que la densité de l'énergie, en tant qu'elle dépend du groupe de rayons ainsi défini, peut être représentée par $A \frac{V_0}{V^3} \frac{d\omega}{8\pi}$, A étant la densité dans l'éther de l'énergie qui correspond aux temps d'oscillation indiqués, V_0 la vitesse de propagation dans l'éther et V la *vitesse des ondes* pour les rayons considérés.

Tome V : mai 1896-avril 1897.

Van de Sande Bakhuyzen (H.-G.). — Détermination de l'erreur de projection de l'appareil de Repsold pour la mesure des clichés astro-photographiques. (7-79).

Kapteyn (W.). — Sur la construction d'une courbe de troisième classe, déterminée par ses trois foyers réels, son point satellite et une tangente. (146-150).

On construit une conique tangente pour tangente en la considérant comme la podaire négative d'un cercle. Cette idée est appliquée par l'auteur à la construction d'une courbe de troisième classe.

Soient α_i, β_i ($i = 1, 2, 3$) les coordonnées des foyers donnés A_1, A_2, A_3 et représentons par p, q celles du point satellite S, où concourent les troisièmes tangentes qui passent par A_1, A_2, A_3. Alors

$$(u\alpha_1 + v\beta_1 + w)(u\alpha_2 + v\beta_2 + w)(u\alpha_3 + v\beta_3 + w) = \lambda^2(u^2 + v^2 + up + vq + w)$$

est l'équation tangentielle de la courbe. Le coefficient λ^2 se détermine à l'aide de la tangente donnée. En représentant la podaire

$$[(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) + (y - \beta_1)(y - \beta_2)][(x - \alpha_1)(x - \alpha_3) + (y - \beta_1)(y - \beta_3)]$$
$$= \lambda^2[(x - \alpha_1)(x - p) + (y - \beta_1)(x - q)]$$

par rapport à A_1 par $U_2 U_3 = V$, on voit qu'elle s'obtient en cherchant les points de rencontre des cercles homologues des faisceaux

$$U_2 = k, \qquad k U_3 = V, \qquad (k \text{ variable})$$

dont la construction est facile. Après avoir construit cette podaire, la construction de la courbe de troisième classe elle-même n'offre plus de difficulté.

On obtient les asymptotes de la courbe en cherchant les points de contact des tangentes de la podaire qui passent par A_1. Les tangentes t_2, t_3, t, menées aux cercles fixes décrits sur A_1A_2, A_1A_3, A_1D comme diamètres par un point quelconque de la podaire satisfont, quant à leurs longueurs, à la relation $t_2 t_3 = \lambda t$.

La polaire est une courbe bicirculaire dont les foyers singuliers réels sont les milieux des côtés A_1A_2 et A_1A_3 du triangle $A_1A_2A_3$.

Van der Waals (J.-D.). — Contribution à la connaissance de l'équation de l'état. (150-153).

L'auteur s'occupe de la quantité b qui figure dans l'équation fondamentale

$$\left(p + \frac{b}{v}\right)(v - \nu) = \text{const.}$$

D'après les recherches de MM. Korteweg et Lorentz elle représente quatre fois le volume des molécules dans le cas d'un volume v très grand. De quelle manière ce facteur ($\frac{4}{1}$) dépend du volume est un problème non encore examiné. D'abord Clausius semble avoir trouvé le facteur 8; plus tard il le remplace par $2\frac{1}{2}$. Clausius réduit le mouvement d'une molécule à celui d'un point matériel en assignant à toutes les autres molécules une sphère d'action concentrique d'un rayon de la double valeur; alors il s'agit du mouvement d'un point matériel à travers un espace diminué de huit fois le volume des molécules. D'après des recherches antérieures, on obtient une valeur deux fois trop

grande par la supposition que ces molécules, huit fois plus grandes, sont en repos; donc, après le calcul, il faut prendre la moitié du coefficient trouvé. Cela posé, l'auteur déduit une première valeur approchée

$$b = b_\infty \left(1 - \frac{17}{32}\frac{b_\infty}{V}\right)$$

de la quantité en question, en ayant égard aux secteurs sphériques communs des sphères d'action de deux molécules très voisines l'une de l'autre; dans cette expression b_∞ représente la valeur de b pour un volume V infiniment grand. Même, il prévoit une formule plus générale

$$b = b_\infty \left[1 - \frac{17}{32}\frac{b_\infty}{V} + \varepsilon_1\left(\frac{b_\infty}{V}\right)^2 + \varepsilon_2\left(\frac{b_\infty}{V}\right)^3 + \ldots\right]$$

en tenant compte de l'intersection de trois et de plusieurs sphères d'action et fait appel aux géomètres pour l'évaluation des coefficients $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur un théorème général relatif au mouvement d'un fluide visqueux. (168-175).

Soient τ un espace limité par la surface fermée σ et entièrement rempli du fluide, α, β, γ les cosinus des angles entre OX, OY, OZ et la normale extérieure n de t, ρ la densité, μ le coefficient de viscosité, M et M′ deux états différents de mouvement. Soient, pour le premier de ces états, u, v, w les composantes de la vitesse, $X\,d\tau$, $Y\,d\tau$, $Z\,d\tau$ celles de la force extérieure agissant sur l'élément $d\tau$, $X_n\,d\sigma$, $Y_n\,d\sigma$, $Z_n\,d\sigma$ celles de la force exercée sur l'élément $d\sigma$, soit par un corps étranger avec lequel le fluide est en contact, soit par le fluide qui se trouve à l'extérieur de sa surface. Désignons par u', v', w', $X'\,d\tau$, ... les quantités analogues pour l'état M′. Alors on trouve la relation

$$\begin{aligned}
&\int (u'X_n + v'Y_n + w'Z_n)\,d\sigma - \int (uX'_n + vY'_n + wZ'_n)\,d\sigma \\
&\quad = 2\int \left[\left(u'\frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u'}{\partial t}\right) + \ldots\right] d\tau - \int [(u'X - uX') + \ldots]\,d\tau \\
&\quad + 2\int \left\{u'\left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z}\right]\right. \\
&\qquad \left. - u\left[\frac{\partial(u'^2)}{\partial x} + \frac{\partial(u'v')}{\partial y} + \frac{\partial(u'w')}{\partial z}\right] + \ldots\right\} d\tau.
\end{aligned}$$

Dans les cas où les états M et M′ sont stationnaires et que les forces X, Y, Z et X′, Y′, Z′ sont nulles, cette équation se réduit à

$$\int (uX_n + vY_n + wZ_n)\,d\sigma - \int (uX'_n + vY'_n + wZ'_n)\,d\sigma = 0,$$

formule qui peut servir à déterminer, pour un point quelconque P de l'espace considéré, les vitesses u_p, v_p, w_p en fonction des quantités qui se rapportent à la surface σ. A cet effet, on exclut du champ d'intégration une sphère infiniment petite décrite autour de P et l'on prend pour M′ le mouvement bien connu qui s'établit dans un fluide illimité, si l'on impose les conditions $u' = v' = w' = 0$ à l'infini et $u' = \text{const.}$, $v' = w' = 0$ à la surface de la sphère.

Le résultat s'exprime par la formule

$$u_p = \frac{3}{4\pi}\int \frac{x}{r^3}(ux + vy + wz)(\alpha x + \beta y + \gamma z)\,d\sigma$$
$$+ \frac{1}{8\pi\mu}\int\left[\left(\frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r}\right)X_n + \frac{xy}{r^3}Y_n + \frac{xz}{r^3}Z_n\right]d\sigma.$$

Ici, u_p représente la vitesse u en P; des formules analogues donnent v_p et w_p. Dans ces expressions x, y, z sont les coordonnées d'un point Q de σ par rapport à P et r indique la distance PQ.

Ce résultat permet de résoudre le problème suivant :

Un liquide remplit la partie de l'espace située du côté positif du plan YOZ, ce plan coïncidant avec une paroi fixe le long de laquelle le fluide ne peut pas glisser. De quelle manière un mouvement stationnaire sera-t-il *réfléchi* par ce plan?

Pour y parvenir, l'auteur cherche d'abord la relation entre deux états de mouvement (u_1, v_1, w_1, p_1), (u_2, v_2, w_2, p_2) de ce demi-espace, où l'on a dans tous les points du plan YOZ les relations $u_1 = u_2$, $v_1 + v_2 = 0$, $w_1 + w_2 = 0$. Il trouve

$$u_2 = u_1 + 2x\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial x}, \qquad w_2 = -w_1 - 2x\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial z},$$
$$v_2 = v_1 - 2x\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{x^2}{\mu}\frac{\partial p_1}{\partial y}, \qquad p_2 = p_1 + 2x\frac{\partial p_1}{\partial x} - 4\mu\frac{\partial u_1}{\partial x}.$$

Ensuite il en déduit en quelques lignes la solution du problème posé.

Enfin, l'auteur s'occupe du cas où un corps solide se trouve à l'intérieur de la surface σ, ce corps étant en repos ou bien animé d'un mouvement donné compatible avec un état stationnaire du fluide.

Gegenbauer (*L.*). — Deux théorèmes généraux sur des chaînes de Sturm. (185-193).

Si la fonction entière $f_n(x)$ satisfait à l'équation

$$f_n(x) + (a_n x + b_n) f_{n-1}(x) + c_n f_{n-2}(x) = 0$$

et si sa dérivée satisfait à une équation analogue

$$f'_n(x) + (\alpha_n x + \beta_n) f'_{n-1}(x) + \gamma_n f'_{n-2}(x) = 0,$$

les fonctions

$$f_n(x),\quad f'_n(x),\quad f'_{n-1}(x),\quad f'_{n-2}(x),\quad \ldots$$

forment une série de fonctions de Sturm à certains facteurs numériques près.

Avec la même restriction, une seconde série de fonctions de Sturm est formée par

$$f_n(x),\quad f_{n-1}(x),\quad f_{n-2}(x),\quad f_{n-3}(x),\quad \ldots,$$

pourvu que les racines d'une certaine équation quadratique se trouvent en dehors de l'intervalle qui comprend les racines de $f_n(x) = 0$.

Ces deux théorèmes généraux contiennent comme cas particuliers les résultats de M. J. de Vries. L'auteur en donne plusieurs applications. Si $D^p_x f$ désigne

la dérivée λ^{e} de f par rapport à x, ces applications ont trait aux cas

$$e^{x^2} D_x^{\lambda}(e^{-x^2}), \qquad \frac{(-1)^{\lambda} e^{x^2}}{\Pi(\lambda)\,\Pi(m-\lambda)\,x^{\lambda}} D_x^{\lambda}(e^{-x^2} x^{m-\lambda})$$

et aux coefficients $C_{\lambda}^{\lambda}(x)$ du développement de $(1-2\alpha x-\alpha^2)^{-\lambda}$ suivant les puissances ascendantes de α.

De Vries (J.). — Démonstration géométrique de quelques théorèmes arithmétiques. (218-224 et 284-289).

En évaluant de différentes manières le nombre des points dont les coordonnées rectangulaires s'expriment par des nombres entiers, et qui sont situés à l'intérieur d'un contour plan fermé ou dans une figure à trois dimensions limitée par des surfaces, l'auteur arrive à plusieurs relations entre des fonctions numériques. Ainsi, il trouve, à l'aide d'une figure plane,

$$\sum_{x=1}^{x=m} E\left(\frac{m}{x}\right) = \sum_{x=1}^{x=m} \psi(x),$$

où $E(a)$ représente le plus grand entier compris en a et où $\psi(x)$ indique le nombre des diviseurs de x, et

$$\sum_{x=1}^{x=m} x E\left(\frac{m}{x}\right) = \frac{1}{2} \sum_{x=1}^{x=m} E\left(\frac{m}{x}\right) E\left(\frac{m}{x}+1\right), \qquad \ldots$$

Dans une seconde Communication, l'auteur revient sur le même sujet. Ainsi il trouve encore des valeurs pour $\psi(2n-1)$, $\psi(2n)$, $\Psi(2n-1)$, $\Psi(2n)$, ..., où $\Psi(a)$ représente la somme des diviseurs de a. Il termine son étude par la déduction de la relation

$$\sum_{x=2}^{x=p-1} \sum_{z=1}^{z=x-1} E\left(\frac{pz}{x}\right) = \frac{1}{4}(p-1)(p-2).$$

Siertsema (L.-H.). — Les coefficients de température de baromètres anéroïdes de Naudet. (233-241).

Lorentz (H.-A.). — Sur l'entropie d'une masse gazeuse. (252-261).

La fonction H, introduite par M. Boltzmann dans la théorie cinétique des gaz, a la propriété de tendre vers un minimum en vertu des chocs entre les molécules. Il est donc naturel d'admettre que H multiplié par un coefficient constant représente l'entropie. C'est ce que l'on vérifie aisément dans le cas d'un état stationnaire en comparant la valeur de H avec celle de l'entropie. Pour élucider cette question, M. Lorentz considère un gaz qui, tout en changeant d'état, s'éloigne à chaque instant, infiniment peu, d'un état stationnaire. En calculant d'une manière directe la valeur de dH, correspondant au temps

dt, il trouve $2k\,dH = 3\,dQ$, — dQ étant la quantité de chaleur communiquée au gaz et k représentant l'énergie cinétique moyenne d'une molécule. Or, cette dernière étant égale au produit de la température absolue par un facteur constant μ, il s'ensuit que l'entropie est représentée par $-\frac{2}{3}\mu H$.

Schoute (*P.-H.*). — Sur la position des foyers ordinaires d'une cubique plane circulaire de genre premier. (261-269).

Démonstration géométrique de douze théorèmes, en partie connus, en partie nouveaux, sur les cubiques circulaires et les quartiques bicirculaires, dont voici les principaux :

1. Les seize foyers ordinaires se trouvent quatre à quatre sur quatre cercles coorthogonaux dont les centres forment les sommets d'un quadrangle orthocentrique.

2. Il y a deux espèces de cubiques circulaires C^3 et de quadriques bicirculaires C^4. Les courbes de première espèce se composent de deux branches (ovale et serpentine pour les C^3, deux ovales pour les C^4); leurs quatre foyers réels sont concycliques. Les courbes de seconde espèce n'admettent qu'une branche unique (serpentine pour les C^3, ovale pour les C^4); chacun de leurs foyers réels se trouve sur un des trois cercles d'Apollonius du triangle dont les trois autres foyers réels sont les sommets.

3. Les courbes C^3 au même quadrangle orthocentrique forment un faisceau.

4. Les courbes C^4 au même quadrangle orthocentrique et qui passent par un point donné forment un faisceau. Toutes les courbes C^4 au même quadrangle orthocentrique forment donc un réseau.

L'énoncé du dernier théorème contenait une erreur; ici, il a été corrigé d'après un Mémoire ultérieur (*Archives du musée Teyler*, 2e série, t. V) du même auteur.

De Vries (*J.*). — Les accélérations d'un système plan. (281-282).

Si O, ω, $\frac{d\omega}{dt}$ représentent le centre instantané des accélérations, la vitesse angulaire et l'accélération angulaire, et que l'on détermine les points A, B de manière que les droites OA et OB soient perpendiculaires l'une à l'autre et que les quotients $\frac{OA}{OB}$ et $\frac{d\omega}{dt} : \omega^2$ soient égaux, l'accélération d'un point quelconque P est la résultante des accélérations $\omega^2 PA$ et $\frac{d\omega}{dt} PB$, dont la première est dirigée suivant PA et la seconde suivant la perpendiculaire en P sur PB. Donc, O est point double des deux systèmes plans semblables parcourus par A et B. Le cercle décrit sur AB comme diamètre est le lieu des points dont l'accélération est dirigée vers A. Si M et N représentent les points correspondant au centre instantané de rotation L, à mesure que L est point A ou point B, les cercles décrits sur LM et LN comme diamètres sont les cercles connus de Brisse.

Gegenbauer (*L.*). — Sur le résultant des numérateurs de deux réduites consécutives d'une certaine fraction continue régulière. (289-292).

Le déterminant de la forme quadratique

$$\int_\alpha^\beta (a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots + a_{n-1} x^n)^2 \chi(x)\, dx$$

des n quantités a_i est le réciproque du résultant des numérateurs des réduites des rangs $n-1$ et n de la fraction continue qui donne le développement de

$$\int_\alpha^\beta \frac{\chi(z)\, dz}{x-z},$$

où $\chi(z)$ est algébrique et positif pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites α et β.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Compte rendu de la thèse de M. S. Krüger S. J. intitulée : *Formes ellipsoïdales d'équilibre d'une masse fluide homogène en rotation.* (316-322).

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur la question si l'état moléculaire de la substance solvante exerce de l'influence sur le montant de l'abaissement de la pression de la vapeur causé par les sels résolus. (342-350).

La théorie développée à mainte reprise par l'auteur se base sur l'exactitude des principes de l'équilibre indiqués par M. Gibbs, notamment sur le théorème, sans doute rigoureux, qu'une quantité de substance à une température donnée se place dans un espace donné de manière que l'énergie libre soit minimum. Puis, pour trouver l'énergie libre des mélanges, elle accepte le paradoxe de Gibbs en admettant qu'on trouve l'entropie d'un mélange de matières gazeuses raréfiées, contenu dans un espace, en prenant la somme des entropies qui correspondent aux divers cas de ce même espace contenant chacune de ces substances l'une après l'autre. Aussi ce principe est au-dessus de tout doute, la correspondance entre la théorie et les expériences offrant un support inébranlable pour les résultats des spéculations. La variation de la pression de la vapeur à un degré extrême de raréfaction est donnée par la formule $(1-x)\, dp + p\, dx = 0$, où x représente le pourcentage du nombre des molécules de la substance dissoute par rapport au nombre total des molécules, pourvu que la matière solvante et la matière dissoute consistent en molécules invariables. De plus, si la matière dissoute admet une décomposition en ions, tandis que la matière solvante garde l'invariabilité de ses molécules, on trouve que l'abaissement peut atteindre à la limite la valeur double. L'auteur se demande ici si la supposition de la variabilité des molécules de la matière solvante peut mener à un facteur limite différent de deux. Il étudie, en particulier, le cas d'un mélange de x molécules de la matière dissoute sur $1-x$

molécules de la matière solvante, où y des x molécules se sont décomposées en $2y$ ions, tandis que $2z$ des $1 - x$ molécules se sont transformées en z molécules doubles. A ce cas correspond l'équation différentielle

$$-\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} = \frac{2x}{2x - y} + \frac{x}{1 - x + 2z}$$

qui ramène au facteur deux dans le cas d'un x infiniment petit, quand $\frac{y}{x} = 1$ d'après la formule de la dissociation.

Van der Waals (*J.-D.*). — Particularités de la forme de la courbe de fusion. (385-388).

De Vries (*G.*). — Les équations du mouvement des cyclones. (401-408).

L'auteur cherche à démontrer que l'on peut arriver à une solution en faisant des suppositions simplifiantes. D'après ces résultats, ses suppositions faites, il n'est plus permis de choisir la vitesse. Donc la supposition nouvelle du Dr Pockels (*Meteorologische Zeitung*, 1893) est à rejeter.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Charles Mathieu Schols. Nécrologie. (415-418).

Wind (*C.-H.*). — Sur l'influence des dimensions de la source de lumière sur les phénomènes de diffraction et sur la diffraction des rayons X. (448-455).

Van der Waals (*J.-D.*). — L'équilibre d'une substance solide composée en présence de gaz et de fluide. (482-491).

Si l'on échauffe une substance solide simple se trouvant dans un espace vide jusqu'à la température de fusion, on trouve à une même température et à une même pression les trois états réunis. En chauffant encore, l'état solide disparaît; en refroidissant, l'état gazeux fait défaut. Cette température unique de réunion des trois états s'appelle le *point triple*. Dans cette Communication, l'auteur s'occupe de la question si un corps composé admet aussi un point triple. Pour démontrer que, même dans le cas d'une substance dont les deux composantes se retrouvent dans la vapeur, il n'y a pas toujours un point triple, il se sert des propriétés géométriques de la surface ψ (*Archiv. néerl.*, t. XXIV).

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam. Eerste sectie. In-4° (1).

Tome III: 1896.

Kapteyn (W.). — Sur les points remarquables d'un triangle. (n° 3, 31 p.).

Ce Mémoire forme un trait d'union entre la Géométrie vectorielle et la Géométrie du triangle. Un des sommets et un des côtés adjacents du triangle forment l'origine et l'axe réel des vecteurs. Dans cet ordre d'idées, un point est déterminé par la valeur correspondante du vecteur complexe et les équations des lieux présentent la particularité qu'elles ne changent pas quand on y remplace simultanément la variable et les constantes par leurs valeurs conjuguées. Comme introduction, l'auteur applique ce système de coordonnées à l'étude de la droite, du cercle et des coniques. Ensuite il déduit les formules de transformation permettant de trouver le vecteur complexe d'un point donné dont on connaît les coordonnées homogènes normales et réciproquement, et la relation entre les vecteurs complexes de deux points inverses. Après cette introduction, il calcule les vecteurs complexes des points remarquables et s'occupe des équations des droites, des cercles et des coniques remarquables énumérés dans le *Premier inventaire de la Géométrie du triangle* de M. E. Vigarié (*Association française*, Congrès de Toulouse, 1887). La comparaison de ces résultats entre eux conduit à des résultats nouveaux, en rapport avec des recherches de M. E. Beltrami [*Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche* (*Mem. di Bologna*, 1869)] et de M. F. Morley [*On the covariant geometry of the triangle* (*Quart. Journ. of Math.*, 1891)]. Ainsi, il trouve que les points de Brocard sont les centres isodynamiques du triple formé par le point de Lemoine et les deux centres isodynamiques du triangle (Morley), etc.

Dojes (P.-H.). — La théorie du rayonnement en rapport avec les idées de Fourier. (n° 4, 24 p.).

La recherche de l'auteur a trait aux sujets auxquels Kirchhoff, Clausius, etc. ont appliqué la seconde loi de la Théorie mécanique de la chaleur. A côté du principe de l'équilibre de la température, il s'est servi de l'hypothèse particulière du rayonnement de Fourier. Ainsi, il admet que chaque élément de volume d'un corps émet des rayons en toute direction et que ces rayons, absorbés en partie par les couches enveloppantes, arrivés à la surface unie, obéissent à leur passage dans le milieu environnant, aux lois ordinaires de la réfraction. Pour un corps terminé par un plan perpendiculaire à une dimension et d'une étendue considérable, il calcule l'énergie émise pendant l'unité de temps, par un élément de la surface, en des directions limitées. L'expression qu'il trouve contient deux constantes qui ne dépendent pas de la température

(1) Voir *Bulletin*, XIX, p. [illegible].

et de la durée des oscillations : l'auteur les appelle les *coefficients d'émission et d'absorption spécifiques du corps*. De plus, l'expression contient l'angle du rayon réfringé, l'indice de réfraction et un coefficient qui détermine la partie de l'énergie qui est réfléchie. Quant à l'influence du milieu environnant, l'expression est d'accord avec un résultat de Clausius.

Ensuite, l'auteur s'occupe de deux substances rayonnantes et absorbantes, situées de part et d'autre d'un plan. L'égalité des quantités d'énergie émises fait voir que le quotient des deux nouveaux coefficients multiplié par le carré de la vitesse de propagation a la même valeur pour les deux substances.

Enfin, l'auteur étudie un corps rayonnant en contact avec un milieu diathermane comme l'éther. Il trouve que la densité de l'énergie rayonnante dans l'éther ne dépend que de la température des corps et que deux milieux diathermanes en équilibre avec le même corps rayonnant admettent la même quantité d'énergie en des cubes dont les arêtes sont égales aux vitesses de propagation, etc.

Zwiers (H.-J.). — Recherches sur l'orbite de la comète périodique de Holmes et sur les perturbations de son mouvement elliptique. (n° 5, 162 p.).

Van Overeem Jr. (M.). — Les points remarquables du polygone inscriptible. (n° 7, 27 p., 1 pl.).

L'auteur donne d'abord les définitions suivantes :

a. Si l'on divise les sommets d'un polygone V_n à n sommets en deux groupes, V_a et V_b, chacun de ces deux groupes est dit le *polygone résiduel de l'autre*.

b. Le centre de gravité des sommets d'un polygone figure comme centre de gravité de ce polygone.

c. La droite qui passe par le centre O du cercle circonscrit et par le centre de gravité G d'un polygone inscriptible V_n, est appelée la *droite d'Euler de ce polygone*.

d. Imaginons sur la droite d'Euler OG du polygone inscriptible V_n des points A, B, C, ... de manière que l'on ait, en faisant attention aux signes,

$$OA : OB : OC : \ldots : OG = \frac{1}{n} : \frac{1}{n-1} : \frac{1}{n-2} : \ldots : \frac{1}{1}.$$

Alors les points A, B, C, ... s'appellent les *n points remarquables de* V_n. Ils sont désignés par le symbole P_n^m, où m se rapporte au rang dans la suite A, B, C, ..., G et où n a trait au nombre des côtés de V_n. Ainsi, P_3^1, P_3^2, P_3^3 représentent successivement le centre de gravité, le centre du cercle d'Euler et l'orthocentre d'un triangle.

Cela posé, l'auteur énonce, par exemple, les théorèmes suivants :

1. Les $(n-1)$ points remarquables des polygones résiduels des n sommets du polygone inscriptible V_n forment les sommets de $(n-1)$ polygones inscriptibles V_n^m tous homothétiques à V_n. Le point P_n^m est centre de similitude de V_n et V_n^m. Le cercle circonscrit à V_n^m est indiqué par O_n^m; P_n^{m+1} en est le centre.

2. La droite $P_a^p P_b^q$ qui joint le point P_a^p d'un polygone à a sommets faisant partie de V_n, au point P_b^q du polygone résiduel $(a + b = n)$, passe par le point P_n^{p+q-1} du polygone V_n et s'y partage en deux segments $P_a^p P_n^{p+q-1}$ et $P_n^{p+q-1} P_b^q$ qui sont entre elles comme $b + 1 - q$ et $a + 1 - p$.

Pour démontrer ces théorèmes, l'auteur prouve d'abord quelques propriétés du centre de gravité. Après les avoir démontrées il les applique successivement aux cas $n = 4, 5, 6$.

Kluyver (*J.-C.*). — Sur une surface minima à connexion double. (n° 9, 42 p., 2 pl.).

On donne deux définitions différentes des surfaces minima. Quelquefois on les désigne comme des surfaces qui jouissent de la propriété qu'en chacun de leurs points la somme des rayons principaux de courbure est zéro; quelquefois on les désigne comme des surfaces d'aire minima entre des courbes limitantes données. Pourtant ces définitions ne sont pas équivalentes. Comme on sait, chaque surface d'aire minima possède la propriété caractéristique des rayons principaux de courbure; mais, réciproquement, chaque surface qui jouit de la propriété des rayons principaux de courbure, ne présente pas encore le caractère d'un minimum analytique.

L'auteur s'occupe du problème connu de la surface minima entre les deux contours de deux faces opposées d'un parallélépipède rectangulaire. En suivant la méthode de la représentation conforme de Riemann, Weierstrass et M. Schwarz et développée récemment par M. Darboux, il exprime en fonction de deux paramètres indépendants les coordonnées des points d'une surface quelconque satisfaisant aux conditions des contours limitants et jouissant de la propriété caractéristique des rayons principaux de courbure. Ainsi, il trouve le théorème suivant :

« Afin que la surface soit possible, il faut que la distance des plans des deux rectangles limitants ne surpasse pas une certaine limite. Et quand cette distance est au-dessous de cette limite, il y a toujours deux solutions. »

Alors la question se pose, laquelle des deux solutions présente le caractère d'un minimum analytique. Ce point délicat se décide à l'aide du raisonnement géométrique par lequel Moigno et M. Lindelöf ont distingué l'une de l'autre les deux solutions caténoïdales du problème analogue des deux cercles.

Ensuite l'auteur considère un cas particulier et les dégénérations de la surface étudiée. Le cas particulier se présente quand les rectangles sont des carrés; pour ce cas, M. Kluyver retombe sur des résultats de M. Schwarz. Sous le nom de *dégénérations*, l'auteur comprend les surfaces que l'on obtient quand on fait croître indéfiniment la longueur des rectangles limitants; il en décrit deux. D'abord il suppose que du parallélépipède une face seulement s'éloigne à l'infini; ensuite il fait disparaître de cette manière deux faces opposées. Les deux surfaces correspondantes ont été trouvées par M. Scherk.

Enfin, l'auteur étudie les surfaces conjuguées d'Ossian Bonnet que l'on obtient en déformant les surfaces minima trouvées.

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE, seconde série [1].

Tome I: 1895.

Bierens de Haan (*D.*). — Franciscus Johannes van den Berg. (1-10). Biographie. (1-5) et liste des travaux. (6-10).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur des systèmes de coordonnées pour des cercles dans le plan et pour des sphères de l'espace. (11-44).

Ce Mémoire met un trait d'union entre deux travaux de M. G. Loria (*Mem. di Torino*, série 2, t. XXXVI et *Atti di Torino*, t. XX) et une petite étude de M. P.-H. Schoute (*Wiener Sitzungsber.*, XCIV). D'après M. Loria une sphère quelconque de l'espace est représentée par l'équation $\sum_1^5 k_i U_i = 0$, où les cinq équations $U_i = 0$ indiquent cinq sphères fixes indépendantes données; d'après M. Schoute un cercle quelconque du plan est représenté par

$$U = \lambda a_1^2 + \mu b_1^2 - \nu c_1^2 = 0,$$

si $a_1^2 = 0$, $b_1^2 = 0$, $c_1^2 = 0$ sont les équations des cercles infiniment petits dont les sommets du triangle de référence sont les centres et si $U = 0$ indique le cercle circonscrit à ce triangle.

L'auteur étudie l'extension du système de M. Schoute à l'espace et la spécialisation du système de M. Loria pour le plan. En particulier, il calcule les coordonnées du centre et le rayon du cercle (λ, μ, ν) et de la sphère $(\varkappa, \lambda, \mu, \nu)$ en fonction de ces paramètres.

Van den Berg (*F.-J.*). — Chapitres algébriques supplémentaires des Ouvrages sur l'Analyse élémentaire. (45-54).

Compte rendu détaillé du livre hollandais publié sous ce titre par M. C.-L. Landré : 1. Progressions arithmétiques d'ordre supérieur. 2. Séries diverses. 3. Convergence et divergence des séries infinies. 4. Fonctions symétriques. 5. Élimination. 6. Une classe d'équations solubles algébriquement. 7. Division du cercle. 8. Impossibilité de la résolution algébrique de l'équation générale de degré supérieur à quatre. 9. Conclusion.

Ekama (*H.*). — Lieux géométriques déduits de systèmes de courbes. (55-67).

Lieux des points sur les courbes $F(x, y) = a$, où x ou y est maximum. Lieu des points d'inflexion. Cas des lemniscates confocales. Trajectoires obliques.

Van Wettum (*Th.-B.*). — Sur le quotient de deux vecteurs dans l'espace et sur un quaternion. (68-75).

[1] Voir *Bulletin*, t. XIX, p. 58.

L'auteur a pour but de démontrer que la théorie algébrique qui forme la base de la théorie des quaternions est artificielle, sinon fausse, et que le *verseur* dépend de quatre variables indépendantes et non de trois.

Van Elfrinkhof (*L.*). — L'équation $V_\rho \Phi_\rho = 0$. (76-87).

L'étude de l'équation $V_\rho \Phi_\rho = 0$, surtout dans des cas spéciaux, fait suite à un travail antérieur (*Nieuw Archief*, t. XIX) sur l'équation $\varphi\rho = \gamma$ et a pour but d'en achever la théorie. Cas général. Racines égales. Cas où l'une des fonctions Ψ s'annule. Méthode de M. Laisant. Fonctions conjuguées.

Van Elfrinkhof (*L.*). — Sur des matrices qui représentent une rotation et sur des quaternions. (88-100).

L'auteur livre une seconde critique sur les travaux de M. van Wettum (*Nieuw Archief*, t. XVII, XVIII, XIX) et se propose de démontrer que les matrices du troisième ordre étudiées par M. van Wettum ne sont pas en contradiction avec les principes de Hamilton. Ensuite, il fait connaître une matrice du quatrième ordre qui est parfaitement d'accord avec les verseurs et qui permet de démontrer rapidement tous les principes du Calcul des quaternions.

Bes (*K.*). — Solution de l'équation différentielle de Jacobi. (101-105).

L'auteur transforme l'équation en un système de trois équations simultanées et en donne d'abord la solution et ensuite l'extension à un système de n équations simultanées.

De Vries (*H.*). — Sur la congruence des droites dont les projections sur le plan horizontal et le troisième plan de projection coïncident. (107-126).

Les droites en question sont les sécantes doubles d'une cubique gauche dégénérée qui se compose de la droite $x = -y = z$ et de la conique d'intersection du cône orthogonal $y^2 = xz$ et du plan à l'infini; elles forment donc la congruence (0, 1) de toutes les droites de ce dernier plan et une congruence (1, 2).

La construction des deux droites de la congruence a été donnée par M. E. Waelsch (*Monatshefte*, t. III, p. 92). Ici, l'auteur donne une solution plus simple. De plus, il étudie la surface réglée des droites de la congruence qui rencontrent une droite donnée et indique une généralisation du problème due à M. Fiedler (*Monatshefte*, t. III, p. 193).

De Vries (*H.*). — Sur les sécantes doubles d'une courbe gauche qui passent par un point fixe. (127-136).

Nouvelle démonstration analytique de la formule connue

$$h = \frac{1}{2} mn(m-1)(n-1)$$

qui se rapporte à l'intersection R^{mn} des surfaces F^m et F^n. Démonstration synthétique à l'aide de la courbe $R^{m(n-1)}$ qui forme avec R^{mn} l'intersection complète de la surface F^n avec le cône projetant de R^{mn}. Déduction synthétique de la surface $F^{(m-1)(n-1)}$ qui figure dans la démonstration analytique. Dans le cas $n = 2$, $m =$ quelconque, les $m(m-1)$ sécantes doubles se trouvent sur un cône d'ordre $m - 1$. Étude des cas spéciaux $m = n = 2$ et $m = 3$, $n = 2$.

Godefroy (*A.-N.*). — Déduction élémentaire des équations des surfaces cubiques réglées. (137-162).

Les surfaces considérées sont les lieux géométriques de la droite qui joint un point quelconque (x_0, y_0) d'une directrice $\varphi(x, y) = 0$, située dans le plan $z = 0$, avec le point de l'axe des z indiqué par la relation $z = f(x_0, y_0)$. La directrice est : 1° une conique qui passe par l'origine; 2° une cubique à point double à l'origine. La fonction $f(x, y)$ est successivement x, y, $x \pm y$, mx, ny, $mx + ny$, $ax + by$, $\frac{ay}{x}$, $\frac{bx}{y}$, ... En particulier, l'auteur s'occupe de la surface cubique réglée de Cayley et de ses diverses générations.

Kempe (*A.*). — La division de l'angle en $2^n + 1$ parties égales. (163-171, 1 pl.).

La division d'un angle se fait à l'aide d'une série de courbes auxiliaires A, B, C, ... La courbe A est un cercle (M) à centre M qui touche un des côtés de l'angle au sommet O. La courbe B est le limaçon que l'on obtient en prolongeant les rayons vecteurs OP du cercle (M) par le segment constant MP. En général, d'une courbe auxiliaire on passe à la suivante en prolongeant les rayons vecteurs OP par les segments variables MP.

Mantel (*W.*). — Résidus de suites récurrentes après division par un nombre premier p. (172-184).

Application de la théorie développée par M. Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*, Section 3, Chapitre III). La suite 0, 0, 0, 1, ... à échelle

$$C_n - 4C_{n-3} + 5C_{n-4} = 0$$

donne une période de 80 termes pour $p = 3$ et de 336 termes pour $p = 7$. Extension du théorème de Fermat à des polynomes $f(x)$ d'ordre n. Démonstration. Suites récurrentes à échelle réductible par rapport au module p. Propriétés se rapportant aux fractions décimales périodiques. Solution de la question (48) de l'*Intermédiaire*.

Kapteyn (*W.*). — Sur les triangles de M. Schwarz. (185-200).

Déduction élémentaire des relations entre les côtés et les angles, trouvées par M. Poincaré à l'aide de la Géométrie non euclidienne. Transformation d'un triangle quelconque en un autre dont le centre du cercle fondamental est un des sommets. Les substitutions elliptique, parabolique, hyperbolique. Rapport avec les projections stéréographiques de triangles sphériques. Autre déduction

de la formule fondamentale. Solution de cinq problèmes posés par M. X. Stouff (*Annales de l'École Normale*, 1888).

Jekel (*A.*). — Nouvelle démonstration du théorème de Taylor. (201-205).

Rasch (*J.-W.*). — Application de la théorie des probabilités au tirage pour le recrutement militaire. (206-210).

Réfutation de la solution d'un problème posé et résolu par J.-B. Liagre (*Calcul des probabilités, etc.*, 1re édition, p. 35). Au lieu du résultat $\frac{49}{60}$ l'auteur trouve $\frac{2}{3}$.

Krediet (*C.*). — Un problème de Mécanique. (211-212).

Krediet (*C.*). — Un théorème de Mécanique élémentaire. (213-214).

Kempe (*A.*). — La division d'un angle en un nombre quelconque de parties égales. (215-216).

Nouvelle série de courbes auxiliaires qui effectue la division en $2^n - 1$ parties égales. Extension de la division à un nombre quelconque de parties à l'aide du théorème de Fermat.

Van Thyn (*A.*). — Sur un problème de Jacobi. (217-226).

Démonstration élémentaire du théorème de Poncelet sur les polygones à la fois inscrits à une conique et circonscrits à une autre, pour le cas de deux cercles. Deux théorèmes sur les polygones du cas général. Démonstration dans le cas de deux ellipses.

Tome II; 1896.

Kluyver (*J.-C.*), *Korteweg* (*D.-J.*), *Schoute* (*P.-H.*). — David Bierens de Haan. (1822-1895), nécrologie. (11 p.).

Korteweg (*D.-J.*). — Liste des travaux de D. Bierens de Haan. (16 p.).

Moors (*B.-P.*). — Jaugeage des tonneaux néerlandais. (1-113, 1 pl.).

Exposé et déduction des formules dont on se sert dans le jaugeage, instruction pour les jaugeurs.

ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, publiées par la Société hollandaise des Sciences à Harlem et rédigées par M. J. BOSSCHA [1].

Tome XXVIII; 1895.

Schreinemakers (*F.-A.-H.*). — Déductions graphiques tirées des isothermes de dissolution d'un sel double et de ses constituants. (1-27).

Schreinemakers (*F.-A.-H.*). — Sur la courbe de transformation de deux sels doubles. (28-49).

Bakhuis Roozeboom (*H.-W.*). — Étude d'ensemble sur les états d'équilibre des solutions de deux ou trois corps avec des phases solides, etc. (78-120).

Van der Waals (*J.-D.*). — Théorie thermodynamique de la capillarité dans l'hypothèse d'une variation continue de densité. (121-209) [2].

Julius (*V.-A.*). — Sur les fonctions de Bessel de deuxième espèce. (221-225).

L'auteur, ayant besoin de connaître la valeur vers laquelle convergent les fonctions de Bessel de deuxième espèce, s'est servi d'une formule, donnée en 1868 par E. Lommel dans ses *Studien über die Bessel'schen Functionen*. Cette formule est fautive. Déduction d'une expression exacte qui s'accorde d'ailleurs avec la seconde formule de Lommel (*Math. Annalen*, t. IV, p. 103; 1871).

Julius (*V.-A.*). — Sur les ondes lumineuses sphériques et cylindriques. (226-244).

La modification de phase qui accompagne le passage d'une onde sphérique par un foyer, ou bien le passage d'une ligne focale par une onde cylindrique, est expliquée à l'aide de la théorie de l'élasticité.

Tome XXIX; 1896.

Bakhuis Roozeboom (*H.-W.*). — Représentation graphique des systèmes hétérogènes formés de un à quatre corps, etc. (69-80).

---

(1) Voir *Bulletin*, XIX_2, p. 250.
(2) Voir *Bulletin*, XIX_2, p. 235.

Meerburg (J.-H.). — Sur la polarisation électrolytique. (162-197).

Bosscha (J.). — Christian Huygens. (352-412).

Discours prononcé dans l'Aula de l'Université d'Amsterdam, le 8 juillet 1895, à l'occasion du deuxième centenaire de la mort de Huygens.

Tome XXX; 1897.

Kamerlingh Onnes (H.). — Théorie générale de l'état fluide. (101-136).

Extrait d'un Mémoire antérieur (1).

Van der Waals (J.-D.). — L'interprétation cinétique du potentiel thermodynamique. (137-153) (2).

Van der Waals (J.-D.). — Sur les caractères qui décident de l'allure de la courbe de plissement dans le cas d'un mélange de deux substances. (266-277) (3).

Van der Waals (J.-D.). — Sur les conditions critiques, ou de plissement, d'un mélange. (278-290) (4).

HANDELINGEN van het Nederlandsch Natuur-en Geneeskundig Congres (5).

3e Congrès. 1891: Utrecht.

Korteweg (D.-J.). — Questions en rapport avec la création de la Sous-Section. (110-112).

Schoute (P.-H.). — Les corps réguliers dans l'espace polydimensional. (112-118).

(1) Voir *Bulletin*, XIX, p. 231.
(2) *Voir* plus haut, p. 91.
(3) *Voir* plus haut, p. 92.
(4) *Voir* plus haut, p. 90.
(5) Mémoires du Congrès néerlandais de Physique et de Médecine. Dès 1891 l'Association comprend une Sous-Section de Mathématiques.

Déduction des polystères réguliers de l'espace à quatre dimensions à l'aide des angles dièdres des corps réguliers de l'espace ordinaire. Déduction des angles dièdres de ces polystères réguliers indiqués dans le Tableau suivant :

5.	8.	16.	24.	120.	600.
75°31′21″	90°	120°	120°	144°0′12″	164°28′30″

Les trois figures régulières des espaces de cinq et de plus de cinq dimensions et la déduction des trois figures de l'espace E_{n+1} de celles de l'espace E_n. Extension de la loi d'Euler dans la forme $t_1 - t_2 + t_3 - t_4 \ldots + (-1)^n$. Détermination du caractère des polystères de E_4 à l'aide de leurs projections, d'après la méthode de M. V. Schlegel. Les modèles de Brill de Darmstadt. Littérature.

Cardinaal (*J.*). — La construction d'une cubique plane et du cylindroïde de Cayley. (118-120).

L'auteur rappelle la génération d'une cubique plane comme lieu du point d'intersection des rayons homologues de deux faisceaux projectifs, un faisceau de rayons du premier ordre et un faisceau de rayons du second ordre, ou bien un faisceau de rayons du premier ordre et un faisceau de coniques. En considérant la cubique engendrée par l'intersection du plan de la figure et d'une surface cubique réglée, il développe deux générations de cette surface. Il applique la première à la construction du cylindroïde de Cayley et indique l'importance de cette surface par rapport à des sujets de Mécanique (Théorie de Ball).

Kapteyn (*W.*). — Déduction simple de fonctions doublement périodiques. (120-126).

Les fonctions doublement périodiques ont été trouvées par Abel et Jacobi en étudiant l'inversion de l'intégrale $\int_0^u \frac{du}{\sqrt{G^2(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta)}} = z$. L'auteur les déduit par l'intégration directe de l'équation différentielle correspondante

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = G^2(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)(u-\delta).$$

Il cherche à satisfaire à l'équation

$$\left(\frac{du}{dz}\right)^2 = C_0 + C_1 u + C_2 u^2 + C_3 u^3 + C_4 u^4$$

à l'aide de la substitution

$$u = \frac{A_1}{z-a_1} + \frac{A_2}{z-a_2} + \ldots + \sum \frac{A_r}{z-a_r} = \frac{A_r}{z-a_r} \quad R_r(z).$$

Équations entre les inconnues et les cinq coefficients C_i. Simplification de la solution de ces équations.

Escher (*B.-J.*). — Remarques sur la Communication précédente. (126-128).

L'auteur donne une autre déduction en rapport avec la manière dont Halphen introduit dans son *Traité des fonctions elliptiques* la fonction p de Weierstrass. Il est d'avis que cette introduction, très belle d'ailleurs, possède une lacune, en ce que Halphen déduit des fonctions elliptiques la périodicité double de la fonction p. Il donne une nouvelle déduction de cette périodicité, indépendante de la théorie des fonctions elliptiques, basée sur le théorème suivant :

« Afin qu'une fonction soit définie univoquement à l'aide d'une équation différentielle du premier degré, il faut que l'on connaisse la valeur initiale de la variable t et celle de la fonction u. Dans le cas d'une équation différentielle du second ordre, il faut de plus que l'on choisisse entre les deux valeurs correspondantes de la dérivée. »

De Vries (*J.*). — Configurations combinatoires dans le plan. (128-130).

L'auteur continue ces études des *Math. Annalen* (t. XXXIV, p. 227 et t. XXXV, p. 501) en s'occupant des configurations T_n représentées par le symbole $Cf\left|\binom{n}{2}_n, \binom{n}{3}_n\right|$. Cette configuration T_n est déterminée univoquement par deux polygones à $n-2$ sommets en perspective. Ainsi, une T_5 est engendrée de six manières différentes à l'aide de deux pentagones inscrits l'un à l'autre. Dans chaque T_{2n+1} il se présente des configurations plus simples composées d'un cycle de polygones à $2n+1$ côtés, de manière que chacun de ces polygones est inscrit dans le précédent et circonscrit au suivant. Déduction de configurations plus simples par l'omission de points et de droites.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur des courbes planes autopolaires. (130-134).

Étude sur les courbes qui peuvent coïncider avec leurs courbes polaires réciproques par rapport à une conique à choisir à volonté. Le rapport étant projectif, l'auteur cherche d'abord les courbes qui jouissent de la propriété indiquée par rapport à un cercle; plus tard, il généralise les résultats obtenus à l'aide de la projection centrale. Première méthode : on cherche à déterminer les coefficients d'une équation générale, par exemple,

$$y^m = Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + Kx + L,$$

de manière que cette courbe coïncide avec sa courbe polaire réciproque par rapport à $x^2+y^2=a^2$. Résultat : la parabole semi-cubique et ses projections centrales. Étude du cas des coniques. Relation avec les coniques harmoniquement conjuguées de Steiner. Deuxième méthode en rapport avec les équations $x = f(\alpha)\sin\alpha + f'(\alpha)\cos\alpha$, $y = -f(\alpha)\cos\alpha + f'(\alpha)\sin\alpha$. Applications.

Kluyver (*J.-C.*). — Application de l'homographie à la Mécanique. (135).

Sachant comment sept systèmes de forces font mouvoir un corps invariable libre, on peut trouver par une construction géométrique comment ce corps se mouvra sous l'influence d'un autre système de forces quelconque donné. Application des *dynames* de M. R.-S. Ball.

Schouten (*G.*). — La méthode graphique dans la Mécanique. (136-138).

A mainte reprise l'auteur s'est servi d'une méthode bien simple pour analyser plusieurs problèmes de Mécanique. En voici l'idée fondamentale. Si y est fonction de x et que cette fonction se divise dans les deux parties $f_1(x)$ et $f_2(x)$, de manière que l'on ait $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ et si l'on construit les courbes $y = f_1(x)$ et $y = \mp f_2(x)$ par rapport aux mêmes axes de coordonnées, les points d'intersection de ces courbes font connaître les valeurs de x qui correspondent à $y = 0$. Première application : vitesse radiaire dans le mouvement central. La fonction en $x = \frac{1}{r^2}$ (r = distance au centre) se compose de deux parties dont la première correspond à la courbe potentielle, tandis que la seconde est une droite; les points d'intersection correspondent aux apocentres et aux péricentres de la trajectoire. Seconde application : le roulement exact d'un corps de révolution.

Molenbroek (*P.*). — La représentation géométrique des points imaginaires de l'espace. (138-140).

L'auteur représente un point imaginaire $(x_1 + ix_2, y_1 + iy_2, z_1 + iz_2)$ par le lieu des points réels à distance zéro de ce point. Ce lieu est un cercle de centre $P_1(x_1, y_1, z_1)$, de rayon $\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$, situé dans le plan par (x_1, y_1, z_1) perpendiculaire à la droite qui joint l'origine au point $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Distinction entre les deux points imaginaires conjugués à l'aide de cycles (cercles parcourus dans l'un ou l'autre sens).

Ces idées de l'auteur, développées dans les *Nouv. Annales*, oct. 1891, ne sont pas nouvelles. Elles se sont présentées en 1872 à Laguerre. Toutefois la déduction en est nouvelle.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — La décomposition des nombres en une somme de carrés. (140-144).

Esquisse historique. Diophante, le géant de l'antiquité. Les deux théorèmes de Fermat en rapport à la décomposition en deux carrés. Extension et démonstration de ces théorèmes par Euler et Lagrange. La *Théorie des nombres* de Legendre et les *Disquisitiones arithmeticæ* de Gauss. Décomposition en 2, 3 et 4 carrés. La remarque de Eisenstein par rapport à la décomposition en 8 carrés. Les *Fundamenta nova* de Jacobi. H.-J.-St. Smith et sa solution complète de la décomposition en 5 et en 7 carrés. Résumé des résultats obtenus.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur les particularités de premier ordre

d'exception qui se présentent à l'apparition et à la disparition d'un pli. (144-149).

Quand le plan tangent double d'une surface roule sur elle, les deux points de contact (connodes) A_1 et A_2 se meuvent sur la ligne connodale. Si le plan à l'infini n'a pas de position particulière par rapport à la surface, ce roulement mène à l'un des trois cas suivants :

1° Les deux connodes coïncident pour devenir imaginaires (point de plissement). Si ce cas se présente en roulant d'un côté il se présente aussi en roulant de l'autre côté. Les points de contact limitent un *pli fermé*.

2° Les deux connodes reviennent dans leurs positions principales : *pli annulaire double*.

3° Les deux connodes A_1 et A_2 changent de place : *pli annulaire simple*.

Ces trois espèces de plis ont le même degré de généralité.

Le but de cette Communication est d'examiner la variation, l'apparition et la disparition des plis sur une surface dont l'équation se change d'une manière continue. Il se borne aux particularités qui s'expriment par une seule relation entre les coefficients de l'équation. Les deux espèces de points de plissement (voir *Bulletin*, XIX_2, p. 250), etc. Idées générales sur les particularités *réelles* d'une surface, etc.

4e Congrès, 1893 ; Groningue.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Jean Bernoulli, professeur à Groningue de 1695 à 1705. (148-149).

Kapteyn (*W.*). — Deux théorèmes de M. Poincaré. (149-154).

Si l'on transforme un point z du plan complexe en un point t à l'aide de la substitution $t(cz+d) = az+b$, condition $ad-bc=1$, on trouve que les expressions

$$\text{I.} \quad \int \frac{\text{mod}\, dz}{1-r^2}, \qquad \text{S} \quad \iint \frac{r\,dr\,d\theta}{(1-r^2)^2}$$

jouissent de la propriété d'être invariantes. Démonstration de ces théorèmes énoncés par M. Poincaré (*Acta math.*, t. I). Calcul de S dans le cas d'un polygone à côtés circulaires, rectangulaires à un cercle de rayon 1 ; on trouve que S ne dépend que du nombre des côtés et de la somme des angles polygonaux.

Kluyver (*J.-C.*). — La réduction des intégrales elliptiques. (154-157).

Comment reconnaître les cas particuliers dans lesquels l'intégrale

$$\int \varphi(x, y)\, dx.$$

ou y^2 représente un polynome cubique ou quartique en x, n'est qu'une intégrale pseudo-elliptique? Introduction historique : L'intégrale

$$\int \frac{x^2\,dx}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}}$$

étudiée par Euler. Les recherches systématiques d'Abel (*Œuvres*, t. I, p. 104) sur des intégrales de la forme $\int \frac{\varphi\,dx}{y}$, en rapport avec des fractions continues périodiques. Les études de Tchebycheff, l'introduction de l'argument elliptique par Weierstrass, son criterium. Démonstration de M. Hermite que ce criterium s'applique aux cas d'Euler. Introduction de la fonction $\wp$ de Weierstrass par Halphen.

Caractère général : Si l'introduction de l'argument elliptique à l'aide des formules d'inversion d'Halphen donne $\int \varphi(x, y)\,dx = \int f(u)\,du$, cette intégrale est pseudo-elliptique s'il est possible de déterminer quelques arguments $v_1, v_2, \ldots, v_n$, de manière que l'on ait

$$f(u+v_1)+f(u+v_2)+\ldots+f(u+v_n)=0.$$

Démonstration et application au cas

$$\int \frac{x^2+\frac{1}{6}}{\sqrt{x^4+x^2+x+\frac{1}{4}}}\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\log\frac{2(x^2+y)+1}{2(x^2-y)+1}+\frac{1}{6}\log\frac{2(x^2-y)+1}{2(x^2-y)-1}-\frac{1}{12}\log\frac{x^2+y}{x^2-y}.$$

Van Elfrinkhof (*L.*). — L'équation $V_\rho \varphi_\rho = 0$. (157-161).

Extrait d'un Mémoire antérieur (*Nieuw Archief*, série 2, t. I, p. 76) [1].

Michaelis (*G.-J.*). — L'influence du frottement sur le mouvement tourbillonnaire. (161-165).

Frottement intérieur, potentiel de rotation, potentiel de flexion, dispersion de l'énergie. Le mouvement stationnaire rectiligne dans un tuyau cylindrique est un exemple du mouvement fini admettant un potentiel de flexion; expériments de M. Reynolds. Théorie de M. Basset.

De Vries (*J.*). — Les groupes isodynamiques et métaharmoniques. (165-167).

Centres, cercle, sphère, quadruple et quintuple isodynamiques. Groupe harmonique. Sextuple et octuple métaharmoniques.

---

[1] *Voir* plus haut, p. 112.

Van Dorsten (*R.-H.*). — Nouvelles méthodes de la représentation géométrique des quantités imaginaires. (167-172).

Introduction historique : Argand, Cauchy, Hamilton, Grassmann; M. Marie, G. Tarry, Laguerre; nouvelle *Théorie des acceptions* de l'abbé George, publiée par Évrard, en rapport avec les idées de Mouchot.

Molenbroek (*P.*). — Les méthodes de transformation par rapport aux mouvements finis d'un fluide sans frottement. (173-174).

Introduction historique : Lagrange, Weber, Helmholtz, Kirchhoff, Planck. Nouvelle transformation à l'aide de quaternions.

Landré (*C.-L.*). — Arrondissage des tables mortuaires. (174-176).

Formule de Makeham. Calcul basé sur l'hypothèse que les différences de la mortalité forment une suite géométrique.

Scheltema (*C.-L.*). — Les applications principales de la Statique graphique et son importance pour l'enseignement de la Mécanique élémentaire. (176-180).

Polygone de forces et de tiges. Le plan des moments de Culmann. L'ellipse d'inertie de figures planes. Construction de la courbe élastique. Courbes d'influence. Planimètres et intégraphes.

Quint (*N.*). — Le développement de la théorie des tourbillons et son état actuel. (180-184).

Étude historique contenant l'indication de la littérature du sujet.

Cardinaal (*J.*). — Une surface développable de la quatrième classe. (184-187).

Étude synthétique de la surface développable circonscrite à une surface quadrique le long de son intersection avec une surface d'ordre p; cette surface est dans l'espace la figure corrélative de la courbe d'intersection. Déduction des nombres caractéristiques de la courbe d'intersection et de la surface développable. Application au cas de la courbe gauche rationnelle du quatrième ordre.

5e Congrès, 1895, Amsterdam.

Schoute (*P.-H.*). — Éloge de Descartes sur Amsterdam. (223-224).

Neuberg (*J.*). — Sur un cas particulier de l'homologie. (225-231).

Soit S un plan quelconque du plan du triangle ABC; soient A_1, B_1, C_1 les projections de S sur BC, CA, AB; soient A_2, B_2, C_2 les points de BC, CA, AB séparés harmoniquement de A_1, B_1, C_1 par les sommets du triangle et soit s la droite $A_2B_2C_2$; alors il s'agit de l'homologie à centre S et à axe s dans laquelle les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ se correspondent l'un à l'autre. Le rapport d'homologie est égal à -2. Applications diverses menant à des correspondances géométriques et à des résultats de la Géométrie du triangle.

Zeeman (*P.*). — Transformation des équations de la Dynamique. (232).

Allersma (*T.-J.*). — Les axes d'inertie d'un triangle. (233-237).

Construction des axes d'inertie d'un triangle qui sont en même temps les axes de symétrie de l'ellipse de Steiner.

Vaes (*F.-J.*). — Tiges articulées. (238-243, 1 pl.).

L'auteur fait connaître des constructions de la vitesse et de l'accélération d'un point quelconque de la bielle dans le mouvement de trois barres. Points conjugués. Positions conjuguées.

Tesch (*J.-W.*). — Le problème des normales à l'ellipse. (243-247).

Il s'agit des normales issues d'un point quelconque P. A l'aide de l'hyperbole qui passe par P et par les points où les quatre normales par P rencontrent l'ellipse pour la seconde fois, l'auteur confirme le résultat connu des trois lieux de points P, pour lesquels la construction des quatre normales est possible (*Wiener Sitzungsberichte*, t. XCVIII, p. 1519). Ensuite il suppose l'ellipse dessinée et fait connaître d'autres lieux en rapport avec le problème.

Kempe (*A.*). — Les courbes à nœud et leur utilité dans la polysection de l'angle. (247-250) (1).

De Vries (*H.*). — Sur une courbe gauche du sixième ordre. (250-255).

La courbe en question est l'intersection complétante de deux cônes cubiques à base C^3 commune. Cette courbe R^6 se trouve sur une quadrique F^2. Construction de R^6 point pour point. Construction de la tangente. La courbe se projette encore suivant une cubique plane d'un troisième point déterminé, situé sur la droite de jonction des sommets des deux cônes originaux, comme centre. Cas particulier où R^6 est l'intersection de deux cônes F^2 et F^3.

Neuberg (*J.*). — Sur les quadrilatères articulés. (255-267).

---

(1) *Voir* plus haut, p. 114.

Étude des propriétés géométriques qui se conservent dans toutes les déformations du quadrilatère, en rapport avec les mécanismes focaux (*Brennpunkts mechanismen*) de M. Burmster. Parmi les résultats on trouve que :

Si l'on construit sur les côtés opposés AB, DC d'un quadrilatère ABCD deux triangles ABX, DCZ directement semblables, et aussi sur les côtés AD, BC deux triangles ADU, BCY directement semblables, les triangles construits sur les droites UY, XZ comme homologues de AB, AD et directement semblables à ABX, ADU ont même sommet.

Les points qui divisent les côtés d'un quadrilatère articulé soustractivement dans le rapport des carrés des côtés adjacents sont constamment sur une même circonférence.

Bosscha (*J.*). — Christiaan Huygens. (583-611) [1].

6me Congrès, 18-4, Delft.

Kapteyn (*W.*). — F.-J. van den Berg. (200-201).

Kluyver (*J.-C.*). — Le théorème de Cauchy pour des intégrales doubles.

L'auteur donne une nouvelle démonstration du théorème de MM. Picard et Poincaré, d'après lequel le théorème de Cauchy peut être étendu aux intégrales doubles. Énoncé de la question. Démonstration. Application au cas

$$x + ny = e^{iu} + ae^{iv}, \qquad nx + y = ae^{iu} + e^{iv}$$

sous les conditions $n > 1$, $a > 1$. Ce cas fait trouver le résultat

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\log[1 + m^2 + 2m\cos(u+v)]}{1 - n^2 + 2n\cos(u+v)}\,du\,dv = \frac{8\pi^2}{1-n^2}\log m.$$

Vaes (*F.-J.*). — Polygones à contour minimum inscrits dans un polygone donné. (206-211).

La méthode des demi-révolutions successives de Steiner, qui rectifient le polygone minimum inscrit.

Janssen van Raay (*W.-H.-L.*). — Les recherches récentes sur l'infini. (211-218).

Esquisse historique : Idées de Leibniz, Pascal, Cauchy, Moigno. Notions plus récentes introduites par Bolzano (1850) et développées par M. G. Cantor, etc. La pluralité de Bolzano, l'ensemble de Cantor. Sa puissance. Équivalence et similitude de deux ensembles. Les nombres cardinaux de deux ensembles semblables. Les différentes classes de nombres positifs : nombres ordinaires, nombres transfinis. Le carré hyperbolique, etc.

---

[1] *Voir* plus haut, p. 116.

Cardinaal (*J.*). — Sur une cubique plane particulière. (218-220).

Il s'agit de la cubique circulaire qui passe par son foyer singulier, étudiée par la Géométrie de Quételet, Steiner, Schröter, Küpper, Hermès, Schoute et par la Cinématique de Burmester, Schönflies. Ici, elle est considérée d'abord comme lieu des foyers des coniques à quatre tangentes communes, ensuite comme lieu des couples de points qui peuvent former les six points doubles de quatre positions d'un système plan mobile, avec quatre points fixes donnés, etc. Enfin, elle est mise en rapport avec la courbe à longue inflexion de Watt.

Molenbroek (*P.*). — L'application de la théorie des vecteurs à la Géométrie de la droite. (220-223).

Les deux vecteurs de la droite. Ces vecteurs $\varkappa$ et λ vérifient l'équation $S\varkappa\lambda = 0$. Si Φ indique une fonction vectorielle linéaire quelconque, $\varkappa = \Phi\lambda$ représente un paraboloïde hyperbolique. L'équation du complexe linéaire. L'invariant de Klein, etc.

Ortt (*F.-L.*). — La prédiction des marées. (223-236).

Comparaison des deux méthodes de construire les tables de marées, la méthode de l'analyse harmonique et la méthode empirique.

Van Elfrinkhof (*L.*). — Une propriété de la substitution orthogonale du quatrième ordre. (237-240).

Décomposition de la matrice correspondante en deux facteurs, en rapport avec la décomposition d'une rotation dans l'espace à quatre dimensions en deux rotations en des plans complètement perpendiculaires l'un à l'autre.

Van de Griend (*J.*). — L'évaluation de moments d'inertie à l'aide d'une courbe intégrale.

Étude des intégrales $\int x\,d\omega$, $\int y\,d\omega$, $\int x^2\,d\omega$, $\int xy\,d\omega$, $\int y^2\,d\omega$ à l'aide de la Statique graphique.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXXIV; 1897 [1].

Liouville (*R.*). — Sur le mouvement d'un solide dans un liquide indéfini. (72-73).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXII, p. 35.

Dans une récente Communication (*Comptes rendus*, 28 décembre 1896), M. Stekloff signalait deux cas dans lesquels le problème du mouvement d'un solide dans un liquide indéfini admet une quatrième intégrale quadratique. Le premier avait été obtenu par M. Stekloff lui-même, le second par M. Liapounoff. Les conditions exigées par ces deux cas ne semblaient pas à M. Stekloff comprises, comme elles devraient l'être, parmi celles que M. R. Liouville a données pour l'existence d'une quatrième intégrale algébrique (*Comptes rendus*, 23 novembre 1896).

M. Liouville explique en quoi cette divergence n'est qu'apparente.

Painlevé. — Sur les intégrales premières des systèmes différentiels. (136-139).

Soit un système d'équations différentielles

$$(1)\quad \begin{cases} dx = \dfrac{dx_1}{X_1(x, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \dfrac{dx_m}{X_m(x, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)} \\ = \dfrac{dy_1}{Y_1(x, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)} = \ldots = \dfrac{dy_n}{Y_n(x, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)}, \end{cases}$$

où les X, Y sont algébriques par rapport à $y_1, \ldots, y_n$ et peuvent par suite s'exprimer rationnellement à l'aide des $(n+1)$ variables $y_1, \ldots, y_n, z$, liées par une relation

$$S(z, y_1, \ldots, y_n, x_1, \ldots, x_m) = 0,$$

où S est un polynome en $z, y_1, \ldots, y_n$ qui, de même que les X, Y, dépend analytiquement de $x, x_1, \ldots, x_m$.

M. Painlevé étudie les intégrales premières d'un tel système algébriques par rapport à $y_1, \ldots, y_n$; plus précisément, il se propose de déterminer toutes les intégrales

$$(2)\qquad C = R(z, y_1, \ldots, y_n, x, x_1, \ldots, x_m)$$

de degré ν en $z, y_1, \ldots, y_n$.

Deux cas sont à distinguer suivant que le système (1) admet ou non des intégrales premières, de la forme

$$(3)\qquad F(x, x_1, \ldots, x_m) = \text{const.}$$

Premier cas. — Le système (1) n'admet pas d'intégrales premières de la forme (3). Alors les intégrales (2) ne comportent qu'un nombre fini de paramètres arbitraires; elles dépendent de l'intégration d'une équation différentielle ordinaire à points critiques et essentiels fixes.

Deuxième cas. — Le système (1) admet des intégrales premières de la forme (3). Alors les intégrales (2), s'il en existe, renferment des fonctions arbitraires. Les intégrales (3) une fois déterminées, la détermination des intégrales (2) dépend d'une équation différentielle à points critiques et essentiels fixes.

L'auteur passe ensuite à l'étude des *integrales premières particularisées* de (1), dont les singularités satisfont à certaines conditions qui jouent un rôle important dans la recherche des intégrales premières de la Dynamique.

Il applique les conditions générales qu'il a développées aux systèmes de la forme

$$(\mathrm{A}) \qquad \frac{dx_i}{dt} = x'_i, \qquad \frac{dx'_i}{dt} = \frac{P_i(x'_1, \ldots, x'_n, x_1, \ldots, x_n)}{Q(x'_1, \ldots, x'_n, x_1, \ldots, x_n)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où les P_i et Q sont des polynomes en $x'_1, \ldots, x'_n$.

M. Painlevé détermine les intégrales premières de (A) rationnelles et de degré ν en $x'_1, \ldots, x'_n$ et où t ne figure pas explicitement.

Autonne. — Sur les pôles des fonctions uniformes à plusieurs variables indépendantes. (139-142).

Étant donnée une fonction uniforme X de r variables indépendantes $y, x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}$, coordonnées d'un point ζ dans un espace E_r à r dimensions, un point $\omega(y = b, x_1 = a_1, \ldots, x_{r-1} = a_{r-1})$ sera un point singulier non essentiel ou un *pôle* si, dans le voisinage de ω, X peut se mettre sous la forme

$$X = \frac{P_1(y - b, x_1 - a_1, \ldots, x_{r-1} - a_{r-1})}{P_0(y - b, x_1 - a_1, \ldots, x_{r-1} - a_{r-1})},$$

P_1, P_0 étant des fonctions uniformes, régulières en ω, qui s'évanouissent pour des valeurs simultanément nulles de tous leurs arguments. Si les deux séries P_1 et P_0 sont premières entre elles, ω sera pour X un point singulier dont M. Autonne enseigne à définir et à évaluer l'indétermination.

Fabry (Eug.). — Sur les séries de Taylor. (142-143).

Le théorème de M. Borel, d'après lequel une série $\Sigma a_n z^n$, dont les coefficients sont arbitraires, a pour coupure son cercle de convergence, peut être déduit des méthodes que M. Fabry a indiquées pour la recherche des points singuliers (*Annales de l'École Normale*, octobre 1896).

Le Roux. — Sur l'équation des télégraphistes. (143-146).

Il s'agit, comme on sait, de déterminer une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{d^2u}{dr^2} - u$$

se réduisant à une constante $f(0)$ pour $r = t$ et à une fonction donnée $f(t)$ pour $r = 0$.

Cette question revient au problème suivant, un peu plus général :

« Déterminer une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2z}{dx\,dy} + z = 0$$

se réduisant pour $y = 0$ à $f(x)$ et pour $y = x$ à $\varphi(x)$. »

Voici la solution que donne l'auteur et qui lui donne l'occasion de montrer l'utilité pratique des *intégrales principales* des équations aux dérivées partielles du second ordre.

Si l'on pose

$$F(x, y) = f(0)\varphi(x, y) + \int_0^x f(\alpha)\varphi_x(x - \alpha, y)\,d\alpha,$$

l'intégrale cherchée sera donnée par la formule

$$z = f(0)\varphi(x, y) + \int_0^x f(\alpha)\varphi_x(x - \alpha, y)\,d\alpha$$
$$+ \int_0^x Z_x(x - \alpha, y - \alpha)\frac{d}{d\alpha}[\varphi(\alpha) - F(\alpha, \alpha)]\,d\alpha.$$

A l'occasion du problème précédent proposé par M. Carvallo, M. Picard avait démontré qu'on peut en général déterminer une intégrale de l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre, prenant des valeurs données sur une caractéristique et sur une autre droite. M. Le Roux généralise un peu ce théorème de M. Picard, en montrant qu'on peut remplacer la droite par une courbe analytique quelconque qui coupe la caractéristique.

Painlevé. — Sur les intégrales premières de la Dynamique et sur le problème des n corps. (173-176).

On considère un système d'équations de la Dynamique

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = x'_i, \quad \dfrac{dx'_i}{dt} = \Pi_i(x'_1, \ldots, x'_n, x_1, \ldots, x_n) + X_i(x_1, \ldots, x_n) \\ \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{cases}$$

où les Π_i sont des formes quadratiques en $x'_1, \ldots, x'_n$ dont les coefficients, ainsi que les X_i, dépendent analytiquement de $x_1, \ldots, x_n$. Si le système (1) admet des intégrales premières algebriques par rapport aux vitesses et indépendantes de t, on peut toujours mettre ces intégrales sous la forme

$$(2)\qquad \frac{P_\mu + P_{\mu-2} + \cdots}{Q_\nu + Q_{\nu-2} + \cdots} = \text{const.}$$

M. Painlevé se propose de déterminer toutes les intégrales premières (2) (de degré ν) d'un système (1) donné. Il montre que les intégrales (2) de (1) ne dépendent que d'un nombre fini de paramètres arbitraires, et que leurs singularités (non polaires) coïncident avec les singularités des Π_i, X_i.

D'ailleurs, une fois calculées les intégrales (2) du système (1) sans forces, le calcul des intégrales (2), pour des forces X_i quelconques, n'exige plus que des quadratures.

L'auteur développe l'étude du cas où les Π_i sont rationnels en $x_1, \ldots, x_n$ et où les géodésiques sont algébriques.

Appell. — Sur un mode d'inversion des intégrales multiples. (213-214).

On peut, pour les intégrales multiples, poser un problème d'inversion qui est analogue au problème d'inversion des intégrales simples et qui conduit aux

2e Partie

mêmes questions (extension du théorème d'Abel, uniformité des fonctions inverses, périodicité, etc.).

Pour cela, on considère des équations dont les deuxièmes membres sont des variables indépendantes $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et dont les premiers membres sont des sommes d'intégrales multiples portant sur des fonctions données et étendues à des champs d'intégration dont la définition dépend d'une manière uniforme de n variables $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Ces équations définissent $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Picard (*Em.*). — Sur l'intégration de certaines équations différentielles par des séries. (214-217).

L'auteur montre que dans bien des cas sa méthode des approximations successives peut donner, au point de vue du calcul, une solution rigoureuse et complète des problèmes de Mécanique.

Painlevé. — Sur les intégrales quadratiques des équations de la Dynamique. (221-224).

Dans quel cas un système d'équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x'_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_s} = X_s(x_1, \ldots, x_n) \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

où T est une forme quadratique en $x'_1, \ldots, x'_n$, admet-il des intégrales quadratiques? C'est là un problème extrêmement compliqué qui a déjà fait l'objet d'importantes recherches.

M. Painlevé indique une classe de pareils systèmes beaucoup plus étendue que celles qu'on a signalées jusqu'ici.

Soient $i, j, \ldots, l, m$ l'un des entiers positifs quelconques dont la somme est égale à n, et q le nombre de ces entiers. Soient

$$\begin{aligned}
&\tau_1(x'_1, \ldots, x'_i; x_1, \ldots, x_i),\\
&\tau_2(x'_{i+1}, \ldots, x'_{i+j}; x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\tau_q(x'_{i+j+\ldots+l+1}, \ldots, x'_n; x_{i+j+\ldots+l+1}, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

q forces vives, composées la première avec les variables $x_1, \ldots, x_i$, la seconde avec les variables $x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}$, ... Soit enfin Δ le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1^1 & \varphi_1^2 & \ldots & \varphi_1^q \\ \varphi_2^1 & \varphi_2^2 & \ldots & \varphi_2^q \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_q^1 & \varphi_q^2 & \ldots & \varphi_q^q \end{vmatrix}$$

où $\varphi_1^1, \varphi_1^2, \ldots, \varphi_1^q$ sont des fonctions arbitrairement choisies de $x_1, \ldots, x_i$; $\varphi_2^1, \varphi_2^2, \ldots, \varphi_2^q$ de $x_{i+1}, \ldots, x_{i+j}$; $\varphi_q^1, \varphi_q^2, \ldots, \varphi_q^q$ de $x_{i+j+\ldots+l+1}, \ldots, x_n$. La lettre Δ_ρ^σ désignera le mineur de Δ relatif à l'élément φ_ρ^σ.

Si l'on pose

$$(1) \qquad T_1 = \Delta\left(\frac{\tau_1}{\Delta_1^1} + \frac{\tau_2}{\Delta_2^1} + \ldots + \frac{\tau_q}{\Delta_q^1}\right)$$

et qu'on adjoigne à T la fonction de forces U_1 définie par l'égalité

$$\Delta U_1 = f_1(x_1, \ldots, x_i)\Delta_1^1 + f_2(x_{i+1}, \ldots, x_{i+j})\Delta_2^1 + \ldots + f_q(x_{i+\ldots+l+1}, \ldots, x_n)\Delta_q^1,$$

où les f_r sont des fonctions arbitrairement choisies des variables indiquées, le système de Lagrange (T_1, U_1) admet q intégrales quadratiques distinctes (en comptant l'intégrale des forces vives), à savoir les intégrales $T_\mu - U_\mu = h_\mu$, où l'on a

$$T_1 = \frac{1}{2}\left[\tau_1\frac{\Delta_1^1}{(\Delta_1^1)^2} + \tau_2\frac{\Delta_2^1}{(\Delta_2^1)^2} + \ldots + \tau_q\frac{\Delta_q^1}{(\Delta_q^1)^2}\right],$$

$$U_\mu = \frac{1}{\Delta}(f_1\Delta_1^\mu + f_2\Delta_2^\mu + \ldots + f_q\Delta_q^\mu) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, q).$$

Cette solution du problème proposé est tellement générale qu'elle épuise vraisemblablement la question.

Il n'est même pas nécessaire de supposer que les forces dérivent d'un potentiel. La force vive T_1 étant donnée par (1), le système (T_1, X_i) admettra l'intégrale quadratique

$$T_2 - \varphi(x_1, \ldots, x_n) = \text{const},$$

si l'on astreint les forces aux seules conditions

$$\frac{X_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}} = \ldots = \frac{X_i}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}} = \frac{\Delta_1^1}{\Delta_2^1}, \qquad \frac{X_{i+1}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+1}}} = \ldots = \frac{X_{i+j}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_{i+j}}} = \frac{\Delta_2^1}{\Delta_3^1}.$$

Si tous les entiers $i, j, \ldots, m$ sont égaux à 1, q est égal à n; on retombe sur le cas de M. Stæckel, qui dépend de n^2 fonctions arbitraires à une seule variable.

Si tous les entiers $i, j, \ldots, m$ sont égaux à 1, sauf le premier, et si de plus T est orthogonale, on retombe sur le cas de M. di Pirro, qui dépend de n fonctions arbitraires de $x_1, \ldots, x_i$ et de $(n - i - 1)^2 - (n - i)$ fonctions arbitraires à une seule variable.

Si dans Δ on assujettit les φ_r^s aux conditions $\varphi_r^s = (\varphi_r^1)^s$ et si de plus on remplace par des constantes ceux des φ_r^1 où peut figurer plus d'une variable x, on retrouve les ds^2 de M. Levi-Civita.

De Montel. — Sur les lois de l'intérêt. (224-225).

Desaint. — Sur les zéros de certaines fonctions analytiques. (276-279).

Soit la fonction $f(z)$ définie par la série

$$f(z) = \sum_{m, n, \ldots, s} \frac{A_{\mu\nu}(z - a_1)\ldots(z - a_l)}{(z - b_1)\ldots(z - b_l)},$$

où $A_{\mu\nu}$, $a_1, \ldots, a_l$, $b_1, \ldots, b_l$, sont des quantités variables avec $m, n, \ldots, s$; $A_{\mu\nu}$ est réel et garde un signe constant quand $m, n, \ldots, s$ prennent toutes les

valeurs, la différence $k - k'$ étant la même pour toutes les fonctions rationnelles qui forment les termes de cette série; de plus tous les points $a_1, \ldots, a_k$, $b_1, \ldots, b_k$, sont à distance finie. Si l'on considère le cercle C (de rayon R) de surface minima parmi tous ceux qui entourent tous les pôles et les zéros des termes de la série $f(z)$, les zéros de $f(z)$ sont à l'intérieur d'un cercle concentrique au cercle C_1 de rayon

$$\sin \frac{\frac{R}{\pi}}{2(k+k')},$$

où $k + k'$ est la plus forte somme des degrés des dénominateurs et numérateurs respectifs des fractions rationnelles de la série.

Parmi les conséquences que l'auteur tire de ce théorème général, nous citerons la suivante, relative à la position possible des points singuliers des fonctions uniformes données par leurs valeurs sur un cercle :

Une fonction uniforme $f(z)$ étant donnée par ses valeurs le long d'un cercle C de centre α et de rayon R, soit M son module maximum sur C. Désignant par A l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha + Re^{i\theta})\, d\theta,$$

si l'on peut trouver une quantité u différente de A telle qu'il existe au moins une valeur z_1 de z, à l'intérieur d'un cercle Γ concentrique à C et de rayon

$$R\sqrt{2\left(1 - \frac{M}{|A - u|}\right)},$$

qui fasse prendre à $f(z)$ la valeur u, la fonction $f(z)$ a certainement des points singuliers à l'intérieur de C.

Signalons encore, comme seconde conséquence, une propriété des fonctions entières qui complète le théorème bien connu de M. Picard :

Soit $f(z)$ une fonction entière donnée par ses valeurs le long d'un cercle C quelconque de rayon R; soient M son module maximum sur C et A sa valeur au centre de C. Il ne peut exister deux valeurs a, b de u pour lesquelles $f(z) = u$ n'ait pas de racines à l'intérieur d'un cercle concentrique à C de rayon

$$R\sqrt{2\left(1 - \frac{M}{|A - u|}\right)}.$$

De Jonquières. — Sur certains points de la théorie des résidus des puissances. — Caractères distinctifs des nombres ou racines d'où proviennent les résidus générateurs. (334-340).

Si p est un module premier, n un exposant diviseur de $p - 1$ et $\frac{p-1}{n} = e$, on sait que :

1° Le nombre des résidus différents, de la $n^{\text{ième}}$ puissance, est e, chacun d'eux se trouvant répété n fois;

2° Une partie seulement de ces résidus jouissent de la propriété de les reproduire tous par les résidus (selon le module p) des puissances consécutives de l'un quelconque R d'entre eux, depuis l'exposant 1 jusqu'à l'exposant e inclusivement, ce qui leur a fait donner le nom de *générateurs*. Il s'ensuit que tout résidu générateur appartient à l'exposant e, c'est-à-dire que $R^e \equiv 1$ (mod. p), sans abaissement possible de l'exposant;

3° Lorsque l'exposant n est un nombre premier, les racines r, d'où proviennent les générateurs R et qui sont au nombre de n pour chacun de ceux-ci, appartiennent : les unes à l'exposant $p - 1 = ne$, ce sont les racines primitives de p; les autres à l'exposant e, ce sont les *racines primitives* de la congruence $x^e - 1 \equiv 0$ (mod p) et dont le nombre est $\varphi(e)$.

Mais l'intervention de multiples de e, intermédiaires entre e et ne, dans les caractéristiques de quelques-unes des racines génératrices et les conditions où cette intervention s'exerce n'ont été jusqu'ici ni expliquées, ni même signalées. Elles forment le sujet des recherches actuelles de M. de Jonquières et sont une conséquence du théorème suivant, où n est essentiellement un diviseur de $p - 1$:

« Lorsqu'un résidu R, de puissance n — selon le module p, est générateur, donc appartient à l'exposant $e = \frac{p-1}{n}$, les n racines r d'où il provient indistinctement, appartiennent à quelque multiple ke de e, le facteur entier k ayant toujours, pour quelques-unes au moins d'entre elles, la valeur n et étant pour celles qui restent (s'il y en a) un diviseur de n qui, selon les cas, n'est pas le même pour toutes ces dernières ».

Successivement, l'auteur prouve que k est toujours égal à n pour quelques-unes au moins des racines r, précise les cas où il l'est pour toutes, définit ceux où e n'intervient qu'avec le multiplicateur $k = 1$, enfin ceux où k prend plusieurs valeurs autres que n ou 1.

Bourlet. — Sur les opérations en général. (348-351).

M. Bourlet nomme *transmutation à n variables* toute opération qui transforme une fonction u de n variables en une autre fonction des mêmes variables $\mathfrak{T}u$, qu'il nomme la *transmuée*.

Voici le problème général qu'il s'est proposé de résoudre :

« Déterminer toutes les transmutations telles qu'il existe une relation donnée à l'avance entre les transmuées des trois fonctions u, v et $\varpi(u, v)$, quelles que soient les fonctions u et v; $\varpi(x, y)$ étant une fonction donnée des variables x et y, symétrique et telle que $\varpi[x, \varpi(y, z)]$ soit aussi symétrique ».

La solution est donnée par la proposition que voici :

« On peut déterminer deux fonctions $A(z)$ et $B(z)$ telles que la transmutation soit définie par l'égalité

$$\mathfrak{T}u = B[S\,A(u)],$$

où S désigne le symbole opératif d'une transmutation telle que l'on ait, quelles que soient les fonctions u et v,

$$S(u + v) = Su + Sv.$$

Le problème primitif est donc ramené à celui-ci :

« Déterminer toutes les transmutations *additives*, c'est-à-dire qui transforment une somme en somme ». Or celles-ci peuvent être obtenues de la manière suivante :

« S désignant le symbole opératif d'une transmutation additive, uniforme et continue, à n variables, on a, quelle que soit la fonction régulière u,

$$Su = a_{0,0,\ldots,0}\, u + \sum a_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \frac{d^{k_1+k_2+\ldots+k_n} u}{dx_1^{k_1}\, dx_2^{k_2} \ldots dx_n^{k_n}},$$

les coefficients $a_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ étant des fonctions données des variables x_1, x_2, $\ldots$, x_n. »

En appliquant cette proposition aux opérations connues, on arrive à des formules intéressantes.

L'auteur fait ensuite une étude spéciale des transmutations additives, uniformes, à une seule variable x,

$$\mathfrak{S}\, u = a_0 u + a_1 \frac{du}{dx} + \ldots + a_m \frac{d^m u}{dx^m} + \ldots = f\left(x, \frac{d}{dx}\right) u$$

et des transmutations *inverses*.

Il met en lumière les propriétés générales de la *fonction opérative* de la transmutation, savoir :

$$f(x, z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m + \ldots$$

et montre comment ces propriétés peuvent être utiles dans la théorie des équations différentielles linéaires.

Par exemple, lorsque, dans une telle équation

$$a_m \frac{d^m y}{dx^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_0 y = v(x),$$

le polynome opératif $a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \ldots + a_0$ est un polynome entier en $z - kx$ à coefficients constants (k étant une constante), cette équation se ramène à une équation à coefficients constants par le changement de fonction

$$y = e^{\frac{kx^2}{2}} u.$$

Maillet. — Sur une série de groupes primitifs holoédriquement isomorphes à des groupes plusieurs fois transitifs. (351-353).

Soit C un groupe de substitutions de degré n, k fois transitif; C opère entre les C_n^α combinaisons des n lettres α à α un groupe Γ_α de substitutions; ce groupe est transitif si $k \geqq \alpha$.

M. Maillet fait connaître une série de résultats qu'il a obtenus relativement à ces groupes Γ_α.

Lévi-Civita. — Sur les intégrales quadratiques des équations de la Mécanique. (392-395).

Faisant allusion à la Note dans laquelle M. Painlevé indique une classe extrêmement étendue de problèmes dynamiques qui admettent des intégrales quadratiques en dehors de celle des forces vives, M. Lévi-Civita croit que, nonobstant sa grande généralité, le résultat obtenu dans cette Note est loin d'épuiser la question. Il signale un cas qui, suivant lui, ne rentrerait dans aucun de ceux qu'a prévus M. Painlevé.

Appell. — Remarque sur la Communication précédente de M. Lévi-Civita. (395).

M. Appell fait remarquer que les forces vives indiquées par M. Painlevé comprennent notamment les forces vives de la forme

$$(1)\quad \begin{cases} T = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + \varphi_1(x_1, \ldots, x_n; x_{1'}, \ldots, x_{n'}) \\ \qquad + \varphi_2(x_1, \ldots, x_n; x_{1'}, \ldots, x_{n'}) + \varphi_3(x_1, \ldots, x_n; x_{1'}, \ldots, x_{n'}) \end{cases}$$

et que ces dernières renferment toutes les forces vives qui comportent une transformation infinitésimale en elles-mêmes. La force vive d'un solide fixé par un point, citée par M. Civita, possède trois transformations infinitésimales distinctes; elle est donc réductible d'une infinité de manières à la forme (1).

Picard (*Em.*). — Sur les résidus des intégrales doubles des fonctions rationnelles. (433-438).

M. Poincaré a étendu le théorème de Cauchy aux intégrales doubles de fonctions de deux variables complexes et introduit dans la Science la notion de résidu d'une intégrale double de fonction rationnelle. M. Picard s'est placé à un autre point de vue pour faire le calcul de ces résidus. Il indique avec quelques détails la marche à suivre pour traiter la question dans toute sa généralité.

Pellet. — Sur la théorie des surfaces. (451-452).

Si l'on rapporte une surface au système d'axes rectangulaires formé par la normale et les tangentes aux lignes de courbure en un point, on aura

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2) + \frac{1}{6}\left(\frac{da}{ds}x^3 + 3\frac{da}{ds_1}x^2y + 3\frac{db}{ds}xy^2 + \frac{db}{ds_1}y^3\right) + \ldots$$

a, b désignant les courbures principales et $\frac{d}{ds}$, $\frac{d}{ds_1}$ indiquant les dérivées, prises par rapport aux arcs des lignes de courbure tangentes aux axes des x et des y.

Cette formule permet de calculer très simplement certains éléments infinitésimaux d'une surface et d'en exprimer très aisément les propriétés.

Riquier. — Sur la réduction du problème général de l'intégration. (490-491).

M. Riquier indique une nouvelle réduction qu'il vient de faire subir au problème général de l'intégration. Il rappelle d'abord la définition suivante :

Étant donné un système du premier ordre résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, on peut en écrire les diverses équations dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues. Parmi de tels systèmes il y a lieu de distinguer, sous le nom de *systèmes réguliers*, ceux dont les lignes peuvent être rangées dans un ordre tel que, en faisant abstraction pour un instant des colonnes vides et des colonnes pleines, chacune des autres, parcourue de haut en bas, soit formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein. Enfin, on appellera *système simple* un système dont le tableau ne contient, avec une seule ligne entièrement pleine, que des lignes absolument vides.

Cela posé :

1° Tout système orthonome, passif et linéaire du premier ordre, peut, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, se ramener à un système régulier, passif et linéaire du premier ordre, dont les colonnes comprennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes du proposé;

2° Dans tout système régulier, passif et linéaire du premier ordre, la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données se ramène à une recherche semblable exécutée successivement sur divers systèmes simples.

En résumé, l'intégration des sytèmes différentiels quelconques est réductible à celle des systèmes simples.

Hadamard. — Théorème sur les séries entières (492).

Étant données les séries entières

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$
$$\varphi(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_m x^m + \ldots$$

si l'on multiplie entre eux les coefficients correspondants, la série ainsi obtenue

$$\psi(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots$$

n'a, dans tout le plan, d'autres points singuliers que ceux qu'on obtient en multipliant l'affixe d'un point singulier de f par l'affixe d'un point singulier de φ.

Duporcq. — Sur les centres de gravité des surfaces parallèles à une surface fermée. (492-493).

Le lieu des centres de gravité A des surfaces S, parallèles à une même surface fermée, est une conique (A).

Quand les surfaces S s'éloignent indéfiniment, le point A tend sur (A) vers une position limite C; soit (B) la tangente à (A) au point C : la droite (B) est le lieu des centres de gravité des courbures moyennes des surfaces S et le point C est, pour toutes ces surfaces, le centre de gravité des courbures totales.

Il y a des cas particuliers où ce lieu des points A se réduit à une droite : celui, par exemple, où les rayons de courbure principaux de S sont liés par une

relation involutive, ce qui arrive lorsqu'une des surfaces fermées S est à courbure totale constante et encore si l'une d'elles est une surface minima.

Picard (Em.). — Sur la théorie des surfaces algébriques au point de vue de la Géométrie de situation et sur les intégrales de différentielles totales. (532-533).

L'auteur a montré dans des recherches antérieures l'intérêt qu'il y a à introduire dans la théorie des surfaces algébriques les considérations d'*Analysis situs*. Actuellement il indique un théorème qui complète cette étude en un point important.

La première question qui se présente dans la théorie des surfaces algébriques est relative à la réduction des singularités. Il est possible de faire correspondre uniformément une surface $f(x, y, z) = 0$ à une surface F d'un espace E à cinq dimensions, cette surface F n'ayant aucun point multiple. Si l'on ramène à la surface d'une sphère chacune des dimensions complexes de l'espace E, on peut regarder la surface F comme étant un continuum fermé à quatre dimensions réelles ne se coupant pas lui-même. Or on sait, d'après Riemann et Betti, qu'il y a lieu, dans une variété à quatre dimensions, de considérer trois ordres de connexion p_1, p_2, p_3 relatifs respectivement à une, deux et trois dimensions. La variété ici considérée étant fermée, on aura $p_1 = p_3$.

Un résultat paradoxal obtenu antérieurement par M. Picard est relatif au nombre p_1; on a en général $p_1 = 1$, c'est-à-dire que tous les cycles linéaires d'une surface se ramènent à un cycle nul. Ce n'est que pour des surfaces spéciales que p_1 est supérieur à l'unité, et la question se pose de déterminer le nombre p_1 pour une surface donnée. Cette question est liée à la considération des différentielles totales attachées à la surface.

Si une surface a une intégrale de première espèce, celle-ci aura au moins deux périodes, par suite $p_1 \geqq 3$, et il résulte immédiatement de là qu'il n'y a pas *en général* de telles intégrales.

De plus une surface pour laquelle $p_1 = 1$ n'a pas d'intégrale de différentielle totale de seconde espèce qui ne se réduise à une fonction rationnelle de x, y, z.

Enfin, et c'est là que l'auteur voulait en venir, *toute surface algébrique possède $p_1 - 1$ intégrales distinctes de différentielles totales de seconde espèce.*

Ainsi se trouve établie une relation étroite entre la connexion linéaire p_1 et les intégrales des différentielles totales. D'ailleurs, le nombre des intégrales distinctes de seconde espèce pouvant être obtenu par un calcul régulier, on a par là même l'ordre de la connexion linéaire.

Pellet. — Sur les systèmes de surfaces orthogonales et isothermes. (552-554).

Zaremba. — Sur la méthode des approximations successives de M. Picard. (554-556).

L'extension de la méthode des approximations successives de M. Picard aux équations aux dérivées partielles à trois variables indépendantes pouvant se

mettre sous la forme

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz} = f\left(x, y, z, \frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}, \varphi\right)$$

dépend de trois théorèmes que l'on peut énoncer ainsi :

Soit $G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ la fonction de Green relative à une surface fermée (S). Posons

$$\rho = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

et

$$G(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\rho} - \nu.$$

1° On a, en désignant par $D\nu$ la dérivée première de la fonction ν prise par rapport à l'une des variables x, y ou z,

$$|D\nu| < \frac{A}{\rho^2},$$

A étant une constante positive dépendant uniquement de la nature de la surface (S) et ne croissant pas indéfiniment lorsque l'étendue de cette surface décroît indéfiniment suivant une loi convenable;

2° Si l'on désigne par $D_2\nu$ une des dérivées secondes de la fonction ν prise par rapport aux variables x, y et z, on aura

$$|D_2\nu| < \frac{B}{\rho^2},$$

la constante B jouissant de propriétés analogues à celles dont jouit la constante A;

3° L'intégrale

$$\int\int\int D_2\nu \, d\xi \, d\eta \, d\zeta,$$

étendue à tout le domaine limité par la surface (S), ne dépasse jamais en valeur absolue une constante positive C dépendant uniquement de la nature de la surface (S).

Moutard. — Sur les différentielles successives d'une fonction à plusieurs variables. (603-607).

Les différentielles successives d'une fonction de plusieurs variables sont des formes homogènes par rapport aux accroissements des variables. M. Moutard appelle *solution d'une différentielle* tout système de fonctions des variables qui, substituées aux accroissements, annulent cette différentielle. Cela posé, les différentielles jouissent des propriétés suivantes :

I. Lorsqu'il existe une solution commune à des différentielles consécutives en nombre égal à celui des variables, cette solution appartient à toutes les différentielles suivantes.

II. Lorsqu'une différentielle admet une solution multiple, cette solution appartient avec le même degré à toutes les suivantes.

III. Lorsqu'un groupe de différentielles consécutives, en nombre inférieur à celui des variables, admet une solution commune double, celle-ci est une solution double de tout groupe plus éloigné.

IV. Lorsque deux différentielles consécutives admettent un diviseur commun (fonction des accroissements), ce facteur se retrouve dans les suivants.

V. Lorsqu'une différentielle admet un facteur multiple, ce facteur entre au même degré dans les suivantes.

Ces propositions suggèrent des problèmes de Calcul intégral très variés, dont la résolution se rattache étroitement, comme le montre l'auteur, à la méthode employée pour la démonstration de ces propositions. Voici les plus simples de ces problèmes :

1° Intégrer l'équation différentielle qui résulte de l'élimination des accroissements entre les différentielles consécutives en nombre égal à celui des variables;

2° Intégrer l'équation résultant de l'élimination des accroissements entre les dérivées premières d'une différentielle par rapport aux accroissements.

Marotte. — Sur la détermination du groupe des transformations d'une équation différentielle linéaire. (608-610).

L'auteur fait voir que les divers résultats obtenus dans la théorie des groupes par MM. Klein, Jordan, Lie, Painlevé permettent de résoudre complètement la question suivante :

« Reconnaître si une équation linéaire donnée admet comme groupe de transformations un groupe *donné*, c'est-à-dire un groupe tel que toutes les constantes entrant dans les équations du groupe sont connues *numériquement*. »

S'attachant en particulier aux équations du second ordre, M. Marotte montre qu'un théorème de M. Painlevé permet la détermination effective des transformations d'une équation de cet ordre ou ramène cette détermination à la recherche de deux nombres entiers p et q satisfaisant à une certaine condition.

Réciproquement, on peut construire effectivement toutes les équations linéaires du second ordre admettant un groupe de transformations donné. Cette dernière proposition complète les théorèmes de M. Klein sur la formation des équations du second ordre intégrables algébriquement.

Brioschi. — Sur la transformation des équations algébriques. (661-665).

Guichard. — Sur les congruences associées. (669-671).

Deux congruences qui se correspondent droite par droite sont dites par l'auteur *associées* lorsque les propriétés suivantes se trouvent réalisées : 1° les développables se correspondent; 2° les arcs correspondants des arêtes de rebroussement de ces développables sont égaux; 3° les distances focales correspondantes sont les mêmes.

M. Guichard montre comment ces congruences particulières se rattachent aux systèmes cycliques de Ribaucour, et de ce rapprochement déduit une propriété caractéristique de la représentation sphérique des congruences qui ont une associée.

Il fait voir que la recherche de ces congruences dépend de la connaissance

de trois surfaces qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure, et pour terminer il énonce les propriétés suivantes :

1° Les réseaux conjugués découpés par les développables sur les deux congruences se correspondent;

2° Si l'une des deux congruences est une congruence de normales à une surface, il en est de même de l'autre. Les surfaces correspondantes ont aux points correspondants les mêmes rayons de courbure;

3° Si les développables de l'une des congruences correspondent aux lignes de courbure d'une focale de cette congruence, il en est de même pour la congruence associée.

Il est intéressant d'examiner le cas où une congruence peut être associée à plusieurs autres. Il faut pour cela que deux systèmes correspondants de sphères, touchant les deux nappes de leur enveloppe suivant des lignes de courbure, aient leur centre en ligne droite avec un point fixe.

Beudon. — Sur les singularités des équations aux dérivées partielles. (67-1-67-3).

Cette Note a pour objet d'étendre la notion de caractéristique aux équations aux dérivées partielles linéaires et du second ordre à plus de deux variables indépendantes.

Soit l'équation

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, p_{ik} + \varphi = 0 \qquad \left(p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k}\right),$$

où les A_{ik} et φ sont des fonctions de z, x_1, ..., x_n et des dérivées du premier ordre $\left(\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i\right)$. Si l'on se donne une multiplicité ponctuelle à $n-1$ dimensions et une orientation d'éléments du premier ordre unis le long de cette multiplicité M'_{n-1}, on définit de ce chef une multiplicité intégrale à n dimensions de l'équation proposée. La multiplicité initiale M'_{n-1} peut être définie en se donnant z, x_n, p_n arbitrairement en fonction de x_1, ..., x_{n-1}; p_1, ..., p_{n-1} étant déterminées par les relations

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i + p_n \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Pour qu'il y ait indétermination, il faut et il suffit que les fonctions z, x_n, p_n vérifient les conditions

$$\sum_{\rho=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} A_{\rho i}\frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} - \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n}\frac{\partial x_n}{\partial x_\rho} + A_{nn} = 0,$$

$$\sum_{\rho=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1} A_{\rho i}\left(\frac{\partial p_\rho}{\partial x_i} - \frac{\partial x_n}{\partial x_i}\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho}\right) - \sum_{\rho=1}^{n-1} A_{\rho n}\frac{\partial p_n}{\partial x_\rho} + \varphi = 0.$$

On dira alors qu'on a affaire à une *multiplicité singulière* M'_{n-1}. M. Beudon

développe les principales propriétés de ces multiplicités singulières. Les résultats sont d'ailleurs analogues, quoique d'énoncé plus compliqué, dans le cas des équations d'ordre et de forme quelconques.

Borel (*Ém.*). — Sur l'interpolation. (675-675).

Pour former une fonction entière $f(z)$, qui pour $z = a_1, a_2, \ldots$ prenne les valeurs $c_1, c_2, \ldots$, on calcule la fonction entière $\varphi(z)$, qui s'annule pour $z = a_1, a_2, \ldots$, et l'on a

$$f(z) = \sum \frac{c_n \varphi(z)}{(z - a_n)\varphi'(a_n)}.$$

La seule difficulté est relative à la convergence de la série. M. Borel indique comment dans un cas très étendu on peut rendre la série convergente en remplaçant $\varphi(z)$ par $\varphi(z)\theta(z)$, $\theta(z)$ étant un polynome ou une fonction entière suivant les cas.

Une remarque intéressante est qu'on peut dans certains cas rendre déterminé le problème indéterminé de l'interpolation au moyen d'une condition d'inégalité; cela d'ailleurs n'est possible que si les données elles-mêmes vérifient des conditions du même genre.

Par quelques exemples bien choisis, M. Borel montre l'intérêt qu'il y a à rapprocher de la théorie des zéros des fonctions entières et du problème connu de l'interpolation les nombreuses questions dans lesquelles on se propose de déterminer une fonction par des conditions discrètes quelconques.

Goursat. — Sur les différentielles successives d'une fonction de plusieurs variables indépendantes. (676).

Réclamation de priorité à propos de quelques-unes des propositions contenues dans la Note récente de M. Moutard (*Comptes rendus*, p. 603).

Poincaré. — Les solutions périodiques et le principe de la moindre action. (713-716).

Un mouvement plan étant régi par les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial U}{\partial y},$$

la trajectoire qui correspond à une solution périodique est une courbe fermée (T); mais la solution périodique peut être stable ou instable. Si la solution est instable, deux cas sont à distinguer : 1° les trajectoires correspondant aux solutions asymptotiques sont des courbes spirales s'enroulant autour de (T) et s'en rapprochant asymptotiquement sans la couper et sans se couper entre elles (solution instable dite *de première sorte*); 2° les solutions asymptotiques coupent une infinité de fois la courbe (T) (solution instable dite *de seconde sorte*).

Cela posé, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution périodique représentée par une courbe fermée (T) corresponde à une action

$$J = \int \sqrt{U - h}\, ds,$$

moindre que toutes les courbes fermées infiniment voisines, c'est que cette solution soit une solution instable de la première sorte.

Si l'on fait varier d'une façon continue la fonction U et les conditions initiales du mouvement, de manière qu'une solution périodique varie aussi d'une manière continue, on ne pourra jamais passer directement d'une solution instable de la première sorte à une solution instable de la seconde sorte. On pourra seulement passer d'une solution instable de l'une des deux sortes à une solution stable, ou inversement.

Ce qui précède s'applique sans changement au cas du mouvement relatif.

Baillaud. — Sur les quadratures mécaniques. (737-739).

Pellet. — Sur la théorie générale des surfaces. (739-741).

Cosserat (*E.*). — Sur la déformation de certains paraboloïdes et sur le théorème de M. Weingarten. (741-744).

L'auteur commence par établir que la recherche des surfaces applicables sur un paraboloïde tangent au plan de l'infini en un point du cercle de l'infini et la détermination des surfaces à courbure totale constante sont deux problèmes qui se ramènent l'un à l'autre.

Considérant ensuite une transformation de Bäcklund, ainsi déterminée

$$z = \frac{\partial w}{\partial x'}, \qquad \frac{x+y}{x-y} z = p' - q, \qquad \frac{x-y}{x-y} = p', \qquad z^2 - (x-y)^2 pq = 2\frac{\partial w}{\partial y'}$$

(p et q étant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y; p' et q' celles de z' par rapport à x' et y'; w une fonction des seules variables x' et y'), il montre que l'équation du second ordre qui définit z' en fonction de x' et y' est l'équation bien connue dont dépend, d'après O. Bonnet, la recherche des surfaces ayant pour élément linéaire

$$ds^2 = dx'^2 - 2\frac{\partial w}{\partial x'} dx'\,dy' + 2\frac{\partial w}{\partial y'} dy'^2,$$

tandis que l'équation qui définit z comme fonction de x et y est celle dont M. Weingarten a fait dépendre la recherche des surfaces ayant ce même élément linéaire.

Une autre transformation analogue

$$z = \frac{\partial w}{\partial x'}, \qquad px - qy = \frac{x+y}{x-y} z - q', \qquad \frac{x-y}{x-y} = p', \qquad z^2 - (x-y)^2 pq = 2\frac{\partial w}{\partial y'}$$

conduit pour z à la même équation que la précédente, et pour z' à l'équation que vérifient les coordonnées cartésiennes des surfaces qui admettent l'élément linéaire ci-dessus.

L'équation de M. Weingarten se trouve par là rattachée aux équations antérieurement employées dans la théorie de la déformation des surfaces.

Cotton. — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables. (744-746).

Si l'on considère une équation aux dérivées partielles du second ordre linéaire, à deux variables indépendantes, et le groupe formé par l'ensemble des transformations suivantes : changement des variables indépendantes et changement de la fonction w en $\lambda(x_1, x_2)w$, on peut se proposer de rechercher les équations qui admettent un groupe continu de transformations.

M. Cotton a trouvé que ces équations rentrent dans l'un des quatre types canoniques déterminés en 1882 par M. Lie, pour les équations admettant une transformation de contact infinitésimale. Deux de ces groupes sont à trois paramètres, deux à un paramètre.

Certaines équations qui se rencontrent dans la théorie de la distribution électrique, celles auxquelles satisfont les fonctions sphériques, enfin l'équation dite *des télégraphistes* admettent un groupe continu à trois paramètres.

Desaint. — Sur les propriétés des fonctions entières. (746-747).

Énoncé de deux propriétés des fonctions définies, soit par des séries, soit par des équations différentielles. Proposition permettant de caractériser comme uniforme ou comme non uniforme une fonction donnée par des valeurs sur un cercle et tendant vers une valeur connue quand l'affixe de la variable s'éloigne à l'infini dans une certaine direction.

Zaremba. — Sur le problème de Dirichlet. (940-941).

L'auteur montre que l'on peut étendre à l'espace le *procédé alterné* de M. Schwarz, en établissant le théorème suivant, relatif à une surface (S) fermée, simplement connexe, admettant en chacun de ses points des rayons de courbure déterminés, différents de zéro :

« Si γ désigne la plus courte distance du point $M(x, y, z)$ à la surface (S) et si l'on pose

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2,$$

la différence

$$\int_S u(x, y, z, x', y', z') f(x', y', z')\, ds - \frac{\gamma}{4\pi} \int_S \frac{f(x', y', z')}{r^3}\, ds$$

tend uniformément vers zéro lorsque γ tend vers zéro ».

Cosserat (*E.*). — Sur l'emploi de l'espace à quatre dimensions dans l'étude des surfaces algébriques admettant plusieurs séries de coniques. (1004-1008).

Les surfaces F dont il s'agit sont celles dont les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 s'expriment en fonction de deux paramètres λ et μ, par les formules :

$$\rho x_i = (a_i\lambda^2 + b_i\lambda + c_i)\mu^2 + (a_i'\lambda^2 + b_i'\lambda + c_i')\mu + a_i''\lambda^2 + b_i''\lambda + c_i'',$$

où les a, b, c sont des constantes. Leur étude systématique exige d'abord la recherche de la courbe lieu des points multiples. Elle est facilitée et simplifiée

par la considération, dans l'espace à quatre dimensions, de la variété V lieu d'un point dont les coordonnées homogènes $x_1, \ldots, x_5$ sont définies par les formules

$$\rho x_i = f_i(t_1, t_2, t_3, t_4),$$

où les f_i sont cinq formes quadratiques des quatre paramètres t_k. Aux différents cas particuliers présentés par le système linéaire du quatrième ordre défini par les cinq quadriques $f_i = 0$ correspondent des variétés V particulières, au moyen desquelles on parvient à une classification complète des surfaces F.

De Salvert. — Sur une formule d'Analyse relative à certaines intégrales de fonctions elliptiques par rapport à leur module. (1008-1010).

La notion des intégrales elliptiques envisagées comme fonction de leur module joue un rôle considérable dans l'Analyse. Mais on s'est peu occupé de leur intégration par rapport au module. L'auteur fait connaître une formule, à laquelle il a été conduit dans ses recherches sur l'attraction du parallélépipède ellipsoïdal, où figurent des intégrales de première et de seconde espèce, intégrées par rapport au module, et des intégrales de troisième espèce.

Boulanger. — Sur l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires du troisième ordre. (1011-1013).

Étant donnée une équation à coefficients rationnels

$$(1) \qquad y''' - 3ay'' + 3by' - cy = 0,$$

les quotients $U = y_2 : y_1$ et $V = y_3 : y_1$ de trois intégrales linéairement distinctes vérifient un système (S) de deux équations différentielles du quatrième ordre; et la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale générale de l'équation (1) soit algébrique est que a n'ait que des pôles simples à résidus commensurables et que l'intégrale générale du système (S) soit algébrique.

A ce système l'auteur en substitue un autre formé de deux équations différentielles du quatrième ordre en P et Q, qui admet une intégrale (P, Q) *rationnelle*, quand l'intégrale générale de (1) est algébrique et réciproquement (la condition relative à a étant toujours supposée remplie). Or, on peut reconnaître s'il existe une telle intégrale rationnelle et la déterminer dès qu'on a limité les degrés de P et de Q; c'est ce que l'auteur a pu faire dans deux cas (groupe G_{216} de Hesse et groupe G_{168} de Klein).

Demoulin. — Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe. (1077-1079).

Soient D une droite appartenant à un complexe quelconque et O un point pris arbitrairement sur cette droite. On considère les courbes C dont les tangentes font partie du complexe et qui touchent en O la droite D.

M. Demoulin, rectifiant un énoncé de M. Sophus Lie, montre qu'*il existe en général la même relation linéaire entre le rayon de courbure* ρ *et le rayon de torsion* τ *de chacune de ces lignes au point* O.

Si la droite D n'est pas singulière, cette relation peut s'écrire

$$\frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau} + C = 0,$$

A, B, C étant des constantes.

Si la droite D est singulière et si le point O n'est pas le point de contact de cette droite avec la surface des singularités, le rapport de ρ à τ est constant.

Si la droite D est singulière et touche en O la surface des singularités, ρ est constant.

Guichard. — Sur quelques applications de la théorie des systèmes cycliques. (1079-1081).

Énoncé d'un théorème concernant ces systèmes; application à deux problèmes :

1° Trouver les surfaces dont les centres de courbure sont vus d'un point fixe sous un angle droit;

2° Trouver les surfaces telles que les plans menés par une droite fixe et les centres de courbure soient rectangulaires.

Petrovitch. — Sur un procédé d'intégration graphique des équations différentielles. (1081-1084).

Boussinesq. — Écoulement graduellement varié des liquides dans les lits à grande section fondamentale. (1196-1202).

Von Weber. — Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre, dont les deux systèmes de caractéristiques sont confondus. (1215-1217).

Considérant une équation du second ordre à caractéristiques confondues, l'auteur cherche toutes les caractéristiques du troisième ordre passant par une caractéristique donnée du second ordre. Il montre d'abord qu'en général une caractéristique du second ordre ne peut appartenir à plus d'une surface intégrale, ce qui établit une différence profonde avec les équations à caractéristiques distinctes, toute caractéristique de ces dernières appartenant à une infinité d'intégrales. Il établit ensuite que l'ensemble des caractéristiques du second ordre appartenant à des surfaces intégrales non singulières ne dépend que de sept paramètres. Il détermine enfin les équations à caractéristiques confondues qui sont linéaires par rapport aux dérivées secondes.

Cartan. — Sur les systèmes de nombres complexes. (1217-1220).

Lémeray. — Sur la convergence des substitutions uniformes. (1220-1222).

Soient a un point racine de l'équation $fx - x = 0$, fx étant une fonction holomorphe au voisinage de a, et f^n la $n^{\text{ième}}$ itérative de fx. Si p est un mul-

tiple de n, pour que les p premières dérivées de $f^n x - x$ s'annulent au point $x = a$, il faut et il suffit qu'il existe $p : n$ relations convenables entre les valeurs que prennent en ce point les dérivées de fx.

La substitution (x, fx) indéfiniment répétée fournit, pour une valeur donnée de x, des valeurs qui peuvent, dans certains cas, converger vers une racine a de l'équation $fx - x = 0$. Soit toujours p un multiple de n. Si les p premières dérivées de $f^n x - x$ sont nulles au point $x = a$ (mais non la dérivée suivante), le cercle décrit de a comme centre avec un rayon infiniment petit se décompose en $2p$ secteurs égaux qui sont alternativement régions de convergence et régions de divergence pour la substitution considérée; l'auteur enseigne à distinguer les premiers des seconds.

Painlevé. — Sur les petits mouvements périodiques des systèmes. (1222-1225).

M. Poincaré a discuté les mouvements périodiques d'un système dans le voisinage d'une position d'équilibre, ce qui revient à étudier le système différentiel

$$(1) \qquad \frac{dx_j}{dt} = a_{1,j}x_1 + a_{2,j}x_2 + \ldots + a_{n,j}x_n \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

où les seconds membres sont nuls et holomorphes pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

et à chercher s'il existe des solutions périodiques d'amplitude aussi petite qu'on veut et dont la période ω reste inférieure à une limite finie λ. Il a montré que ω diffère très peu de $2m\pi : \lambda$, m désignant un entier et $i\lambda$ une racine de l'équation

$$0 = \Delta(s) = \begin{vmatrix} a_{1,1} - s & a_{2,1} & \ldots & a_{n,1} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{1,n} & a_{2,n} & \ldots & a_{n,n} - s \end{vmatrix}.$$

Mais la discussion ultérieure prête à une objection, que M. Painlevé indique et qu'il réussit à lever. Il arrive à cette conclusion :

« Si l'équation $\Delta = 0$ admet des racines purement imaginaires qui soient toutes simples et n'admet aucune racine nulle, le système (1) possède une infinité de solutions périodiques réelles et distinctes qui diffèrent peu de la solution $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$. »

L'auteur énonce ensuite un théorème relatif au cas où $\Delta = 0$ admet une racine nulle et d'où résulte notamment cette conséquence : un solide pesant étant fixé par un point, il existe une infinité de mouvements périodiques réels dans lesquels le centre de gravité G reste très voisin de sa position la plus basse; en particulier, dans lesquels G décrit un petit cercle autour de la verticale.

Lecornu. — Sur le rendement des engrenages. (1225-1227).

Poincaré. — Sur les périodes des intégrales doubles et le développement de la fonction perturbatrice. (1259-1260).

L'auteur énonce quelques résultats qu'il a obtenus en appliquant la théorie des périodes des intégrales doubles au développement de la fonction perturbatrice.

Quand les deux excentricités sont nulles, les coefficients du développement sont des fonctions transcendantes des éléments, mais ils sont liés par des relations de récurrence, de telle façon qu'il n'y a que cinq transcendantes distinctes.

Quand les excentricités ne sont pas nulles, si l'on développe suivant les sinus et les cosinus des multiples des anomalies excentriques, les coefficients sont liés par des relations de récurrence, de sorte qu'il n'y a que seize transcendantes distinctes.

Boussinesq. — Théorie générale des régimes graduellement variés dans l'écoulement tourbillonnant des liquides : formules de première approximation. (1261-1267).

Pellet. — Sur les surfaces ayant même représentation sphérique. (1291-1294).

Goursat. — Remarques sur une Note récente de M. E. von Weber. (1294-1296).

Les équations dont M. von Weber s'occupe à la fin de sa Note récente (*voir* ci-dessus), savoir les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à caractéristiques confondues, ont été signalées, dès 1891, par M. Goursat qui en a fait depuis une étude détaillée (*Acta mathematica*, t. XIX).

Cartan. — Sur les systèmes réels de nombres complexes. (1296-1297).

Boussinesq. — Vérification expérimentale de la théorie de l'écoulement graduellement varié dans les canaux découverts. (1326-1333).

Pellet. — Sur les surfaces isométriques. (1337-1339).

Painlevé. — Sur les petits mouvements périodiques des systèmes à longue période. (1340-1342).

Aux résultats de sa dernière Note, l'auteur ajoute celui-ci : « Si la fonction des forces est nulle et maxima pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ et si son développement commence par des termes de degré supérieur au second, il existe dans le voisinage de la position d'équilibre une infinité de petits mouvements périodiques, réels et distincts ; mais la période de ces mouvements tend vers l'infini quand leur amplitude tend vers zéro. »

Poincaré (H.). — Sur les fonctions abéliennes. (1407-1411).

Le théorème fondamental de Riemann, aux termes duquel toute fonction

uniforme de p variables, $2p$ fois périodique, est le quotient de deux fonctions Θ, peut être établi, comme l'ont jadis montré MM. Poincaré et Picard, si l'on admet ce lemme : entre $p+1$ fonctions uniformes de p variables, $2p$ fois périodiques, sans point singulier essentiel à distance finie, il y a toujours une relation algébrique.

M. Poincaré revient aujourd'hui sur ce lemme et résume la démonstration qu'il en a trouvée. Il donne ensuite une nouvelle démonstration du théorème fondamental.

Boussinesq. — Expression des petites composantes transversales de la vitesse dans les écoulements graduellement variés des liquides. (1411-1416).

Cosserat (*E.*). — Sur les surfaces qui peuvent, dans plusieurs mouvements différents, engendrer une famille de Lamé. (1426-1428).

Aux quelques surfaces connues qui jouissent de la propriété énoncée M. Cosserat en ajoute une nouvelle, en indiquant deux démonstrations du théorème suivant :

« Toute cyclide de Dupin peut, dans deux mouvements différents, engendrer une famille de Lamé; parmi les mouvements qui résultent de la composition des deux premiers et qui jouissent de la même propriété à l'égard de la surface, se trouvent deux rotations autour des deux droites rectangulaires D et Δ par lesquelles passent respectivement les plans des deux séries de lignes de courbure de la cyclide de Dupin considérée. »

A l'égard des familles de Lamé engendrées par la cyclide de Dupin tournant autour des droites D et Δ, les surfaces qu'il faut leur adjoindre pour composer un système triple orthogonal sont, l'une composée de sphères de rayon variable, l'autre de surfaces qui (à une exception près) sont toutes égales entre elles, mais transcendantes.

Darboux. — Observations relatives à la Communication précédente. (1428).

M. Darboux fait observer qu'on rend intuitif le théorème de M. Cosserat en remarquant que toute cyclide de Dupin est, de deux manières différentes, une surface de Joachimsthal, et que toute surface de Joachimsthal engendre une famille de Lamé en tournant autour de la droite par laquelle passent les plans de ses lignes de courbure planes.

Bourget (*H.*). — Sur une classe de fonctions hyperabéliennes. (1428-1431).

Étude du groupe hyperabélien, auquel conduisent les recherches de MM. Hermite et Picard, formé de substitutions non linéaires relatives aux périodes des intégrales normales de genre deux.

En recherchant l'effet des substitutions fondamentales de ce groupe sur les dix fonctions $\mathfrak{S}$ paires à arguments nuls, l'auteur a reconnu que ces fonctions se permutent, à des facteurs constants près, ce qui l'a conduit à partager les fonctions $\mathfrak{S}$ en deux groupements, dont chacun forme comme un système fermé.

Bourlet. — Sur certaines équations analogues aux équations différentielles. (1431-1433).

Soit $\mathfrak{T}$ le symbole opératif d'une transmutation additive donnée. Désignant par $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{T}^3$, ... les puissances symboliques de cette opération, et se donnant une relation telle que

$$(1) \qquad p_0 \mathfrak{T}^m u + p_1 \mathfrak{T}^{m-1} u + \ldots + p_{m-1} \mathfrak{T} u + p_m u = 0,$$

on a une sorte d'*équation opérative* pour déterminer la fonction inconnue u de la variable x. Cette équation est analogue non seulement par sa forme, mais par ses propriétés, aux équations différentielles linéaires. Ainsi, quand les coefficients p_i sont des constantes, dès que l'on connaît une fonction $\psi(x, r)$ vérifiant l'équation

$$\mathfrak{T} \psi = r \psi,$$

on obtient m intégrales de l'équation (1) en donnant à r les m valeurs racines de l'équation

$$p_0 r^m + p_1 r^{m-1} + \ldots + p_{m-1} r + p_m = 0.$$

Au moyen de ces considérations, l'auteur est parvenu à un nouveau procédé pour intégrer l'équation fonctionnelle de Schröder. Généralisant la notion d'équation opérative dont la relation (1) n'offre qu'un type très particulier, il a établi que les seules équations opératives dont la théorie puisse présenter des analogies avec celle des équations différentielles ordinaires sont les équations fonctionnelles opératives.

Appell. — Observations sur la Communication précédente. (1433-1434).

Mention des différences de principes et des analogies de résultats entre les travaux de M. Bourlet et ceux de M. Pincherle, professeur à l'Université de Bologne.

Levi-Civita. — Sur une classe de ds^2 à trois variables. (1434-1438).

Tous les types de force vive, actuellement connus, dont les géodésiques possèdent une intégrale quadratique, sont réductibles aux formes de M. Stäckel ou de M. Painlevé. M. Levi-Civita considère les forces vives à trois variables

$$H = \sum_{1}^{3}{}_{rs} a_{rs} p_r p_s$$

telles que $p_1 p_2 =$ const. soit une intégrale pour les géodésiques. Il détermine

2e Partie

explicitement l'expression H de toutes ces forces vives qui forment une classe assez étendue. Il montre ensuite que ces forces vives ne sont réductibles ni à la forme de Stäckel, ni à celle de M. Painlevé.

Picard. — Sur l'intégration de l'équation $\Delta u = F(u, x, y)$. (1488-1490).

Dans des recherches antérieures, M. Picard a montré que, si $F(u, x, y)$ est une fonction continue de u, x, y pour toute valeur réelle de u quand le point (x, y) est dans une certaine région R du plan et si, de plus, cette fonction croît toujours avec u, il n'y a qu'une seule intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y)$$

qui soit continue dans un contour et prenne des valeurs données sur ce contour. Il a enseigné à calculer cette intégrale, dans le cas où la fonction F est toujours positive. Il établit présentement que la même méthode de recherche est applicable quand la fonction F peut s'annuler.

Picard. — Sur les fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux variables. (1490-1491).

Pour établir les relations entre périodes sur lesquelles repose leur démonstration du théorème fondamental, relatif aux fonctions uniformes $2n$ fois périodiques de n variables, MM. Poincaré et Picard considéraient des intégrales simples de différentielles totales relatives à une certaine surface. M. Picard montre que ces relations peuvent être déduites des propriétés des intégrales multiples.

Boussinesq. — Parties tournantes des composantes transversales de la vitesse dans un écoulement permanent graduellement varié. (1492-1497).

Hadamard. — Sur les lignes géodésiques des surfaces à courbures opposées. (1503-1505).

La surface est supposée à courbures opposées, sans singularité à distance finie et d'un ordre de connexion supérieur à deux; les nappes à l'infini sont supposées évasées. Dans ces conditions, les géodésiques se répartissent en quatre catégories : 1° géodésiques fermées (formant une infinité dénombrable); 2° géodésiques asymptotes aux géodésiques fermées; 3° géodésiques s'éloignant à l'infini sans alternative de retour à distance finie; 4° géodésiques s'approchant d'une infinité de géodésiques fermées, avec apparence asymptotique, puis s'en éloignant.

Dans le voisinage immédiat de toute géodésique qui reste à distance finie, il existe des géodésiques appartenant à l'un des quatre types ci-dessus.

Miller (*J.-A.*). — Sur l'énumération des groupes primitifs dont le degré est inférieur à 17. (1505-1508).

L'auteur a examiné à nouveau tous les groupes possibles primitifs dont le degré ne dépasse pas 16, et il en a trouvé quelques-uns qui avaient échappé à ses prédécesseurs. Voici le Tableau qui résume cette longue et laborieuse recherche :

Degré.....	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Nombre.....	2	2	5	4	7	7	11	9	8	6	9	4	6	22

Le Roy. — Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles non linéaires par leurs valeurs sur une surface fermée. (1508-1509).

Par une application nouvelle de la méthode des approximations successives à l'équation

$$\Delta U = \xi f(U, x, y, z) + \varphi(x, y, z),$$

où ξ désigne une constante positive et f une fonction croissante avec U et nulle pour $U = 0$, l'auteur détermine une intégrale U continue qui s'annule sur une surface fermée. De la sorte, l'intégration de l'équation

$$\Delta U = F(U, x, y, z),$$

où F croît avec U, est ainsi effectuée par une véritable méthode de prolongement analytique. Ces résultats s'étendent à des équations d'un type plus général.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN, 1895.

1er semestre.

Vogel (*C.*). — Nouvelles recherches sur les spectres des planètes. (5-25).

Parmi les conclusions auxquelles parvient M. Vogel citons celles-ci, qui ont un intérêt général :

1° L'atmosphère de Mars est de nature intermédiaire entre celles de la Lune et de Mercure d'une part et celles de Jupiter et de Vénus d'autre part; sa densité est comparable à celle de l'atmosphère terrestre.

2° Il semble que les atmosphères des satellites de Jupiter soient semblables à celle de Jupiter lui-même.

3° Il ne se peut pas que les anneaux de Saturne émettent de la lumière par suite de chocs des corpuscules dont on les suppose formés. Il est certain que la raie d'absorption λ 618 $\mu\mu$ qui est caractéristique pour le spectre de Saturne manque dans le spectre des anneaux. La grande intensité de lumière des anneaux relativement à celle de Saturne s'explique en admettant qu'il n'y a

pas d'atmosphère autour des anneaux, tandis que celle de Saturne est très dense.

Kronecker (*L.*). — Extrait d'une lettre adressée par L. Kronecker à M. Dedekind, le 15 mars 1880. (115-117).

Kronecker annonce à M. Dedekind qu'il est parvenu à démontrer que l'étude des équations abéliennes, dont les coefficients dépendent rationnellement de racines carrées de nombres rationnels, se ramène à celle des équations de transformation des fonctions elliptiques à modules singuliers, tout comme l'étude des équations abéliennes à coefficients rationnels se ramène à celle des équations de la division de la circonférence du cercle en parties égales.

Cette étude et les propriétés arithmétiques des racines de ces équations qui en découlent reposent essentiellement sur ce que, d'une part, les racines des équations abéliennes sont aussi voisines que possible des nombres rationnels, en ce sens que si le degré de ces équations est, par exemple, un nombre premier p, les radicaux qui figurent dans les racines de ces équations ont comme indice, non pas le nombre p, mais seulement l'un des *facteurs premiers de p* (dans le sens donné par Kronecker à ce mot dans sa dissertation inaugurale) formé au moyen de racines $(p-1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité; et que, d'autre part, les racines des équations de transformation des fonctions elliptiques à modules singuliers sont encore plus voisines des nombres rationnels que ne le sont toutes les racines des équations abéliennes, en ce sens que si le degré d'une équation à module singulier est un nombre premier p par exemple, le nombre dont il s'agit finalement d'extraire la racine est une $p^{\text{ième}}$ *puissance* dans le sens arithmétique du mot; ce nombre qui est de la forme $a+b\sqrt{-D}$, où a et b dépendent de racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, est, en effet, la $p^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre idéal de Kummer.

Frobenius (*G.*). — Sur les groupes finis. (163-194).

I. Dans ses Cours et dans plusieurs de ses publications, Kronecker a insisté à plusieurs reprises sur les avantages qu'il y a à exposer et à développer les théories de Galois en étudiant, au moins au début, au lieu des propriétés des substitutions, celles des ensembles d'objets soumis à des opérations déterminées. C'est à ce point de vue que se place M. Frobenius; il en résulte que, dans ce Mémoire qui sera sans doute suivi de plusieurs autres, il emploie une terminologie un peu différente de celle de la théorie des substitutions. Parmi les résultats qu'il obtient, quelques-uns sont nouveaux; d'autres, quoique bien connus, sont intéressants par la façon dont ils se présentent; il convient d'insister particulièrement sur ce que la notion d'isomorphisme mériédrique, ainsi que celle d'un certain isomorphisme plus général envisagé par M. Capelli, sont rendues entièrement inutiles par l'introduction des facteurs d'un groupe.

Il semble donc nécessaire, malgré les redites inévitables pour le lecteur familiarisé avec la théorie des substitutions, de préciser d'abord la terminologie employée par M. Frobenius.

Soit un système d'*éléments* bien définis tels que deux quelconques d'entre eux A, B en engendrent un troisième AB au moyen d'une opération satisfaisant aux quatre conditions suivantes :

1° Elle est univoque : si $A = A'$ et si $B = B'$: on a donc $AB = A'B'$;

2° Elle est univoquement réversible : si $AB = A'B'$, chacune des deux égalités $A = A'$, $B = B'$ entraîne donc l'autre;

3° Elle est associative, mais n'est pas nécessairement commutative : on a donc $(AB)C = A(BC)$, mais on n'a pas nécessairement $AB = BA$, de sorte que A et B ne sont pas nécessairement échangeables;

4° Son effet est limité, de sorte que, quel que soit le nombre de fois que l'on répète l'opération sur un nombre fini et déterminé d'éléments, on n'obtient qu'un nombre fini et déterminé d'éléments.

Il en résulte que parmi tous les éléments envisagés il y en a nécessairement un, et un seul, E, pour lequel on a $EE = E$; il en résulte aussi que, à chaque élément A, en correspond un autre et un seul A^{-1}, tel que l'on ait

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

On nomme E l'*élément principal;* on nomme A^{-1} l'*élément réciproque de* A.

On exprime que plusieurs éléments $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ sont envisagés simultanément comme formant un *ensemble* α en écrivant

$$\alpha = A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_m,$$

et que plusieurs ensembles d'éléments $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont envisagés simultanément comme formant un nouvel ensemble $\mathfrak{A}$ en écrivant

$$\mathfrak{A} = \alpha + \beta + \gamma + \ldots.$$

On ne peut manifestement former qu'un nombre fini d'ensembles différents.

L'*ordre* d'un ensemble est le nombre des éléments *différents* figurant dans cet ensemble; on n'envisagera que des ensembles d'ordres finis.

On dit qu'un ensemble β est *divisible* par un ensemble α, ou que α est *contenu* dans β, lorsque chaque élément de α figure dans β, même lorsque quelque élément figure un plus grand nombre de fois dans α que dans β.

On dit que deux ensembles α, β sont *égaux* et l'on écrit $\alpha = \beta$, lorsque chacun de ces ensembles est divisible par l'autre.

Si $\alpha = A_1 + A_2 + \ldots + A_m$ et $\beta = B_1 + B_2 + \ldots + B_n$, on désigne par $\alpha\beta$ l'ensemble formé par tous les éléments A_iB_k $(i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n)$. Quand $n = 1$, on écrit souvent αB_1 au lieu de $\alpha\beta$. On a manifestement

$$\alpha\beta = A_1\beta + A_2\beta + \ldots + A_m\beta = \alpha B_1 + \alpha B_2 + \ldots + \alpha B_n.$$

Si α, β, γ désignent trois ensembles quelconques, on a

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),$$

de sorte que l'on peut envisager les puissances $\alpha^2, \alpha^3, \ldots$ d'un ensemble quelconque α. L'opération au moyen de laquelle on forme $\alpha\beta$ à l'aide de α et de β vérifie les conditions 1°, 3°, 4°, mais elle ne vérifie pas la condition 2°, elle n'est pas univoquement réversible; ce n'est que si γ est formé d'un élément unique C que l'on peut déduire de l'égalité $\alpha C = \beta C$ que l'on a $\alpha = \beta$.

On dit qu'un ensemble G forme un *groupe* lorsque cet ensemble est divisible par l'ensemble G^2. Si A est un élément du groupe G, on a

$$GA = G, \quad AG = G.$$

L'élément principal E forme à lui seul un groupe, *le groupe principal*. Chaque groupe contient l'élément principal, et s'il contient un élément A, il contient aussi son réciproque A^{-1}. Si, A désignant un élément quelconque, on a soit $GA = G$, soit $AG = G$, on peut en conclure que A fait partie du groupe G.

Les puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots$ d'un ensemble quelconque α forment une suite qui est nécessairement périodique à partir d'un certain terme α^r, de sorte que pour un certain entier positif s on a $\alpha^{r+s} = \alpha^r$. Si n est le nombre entier défini par les deux inégalités

$$r \leqq ns, \qquad r > (n-1)s,$$

l'ensemble α^{ns} forme un groupe. On désigne sous le nom de *groupe engendré* par l'ensemble α le groupe du plus petit ordre qui soit divisible par α.

Si G est un groupe et si R et S désignent deux éléments quelconques, les deux ensembles GR et GS ont, ou bien tous leurs éléments communs, ou ils n'ont aucun élément commun; dans le premier cas, on dit que les deux éléments R et S sont *équivalents modulo* G.

Si le groupe H d'ordre h contient le groupe G d'ordre g, on peut mettre H sous une forme

$$H = GH_1 + GH_2 + \ldots + GH_n,$$

telle que deux quelconques des ensembles $GH_1, GH_2, \ldots, GH_n$ n'aient aucun élément commun; on a d'ailleurs $h = gn$. On dit que les éléments $H_1, H_2, \ldots, H_n$ de l'ensemble

$$H_0 = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$$

forment un *système complet de restes du groupe* H, ou, d'une façon plus précise, qu'ils forment un système complet d'éléments du groupe H non équivalents modulo G.

On appelle *plus grand commun diviseur* D de deux groupes G_1 et G_2 d'ordres g_1 et g_2, le groupe D formé par les éléments communs aux deux groupes G_1 et G_2. Si d est l'ordre du groupe D, l'ensemble G_1G_2 contient $\frac{g_1g_2}{d}$ éléments distincts et chacun d fois; la condition nécessaire et suffisante pour que cet ensemble G_1G_2 forme un groupe est que l'on ait $G_1G_2 = G_2G_1$.

On appelle *plus petit multiple commun* M de deux groupes G_1 et G_2 d'ordres g_1 et g_2 le groupe engendré par l'ensemble $G_1 + G_2$ ou aussi par l'ensemble G_1G_2. Si m est l'ordre du groupe M, on a nécessairement $md = g_1g_2$. La condition nécessaire et suffisante pour que l'on ait $md = g_1g_2$ et, par suite, $M = G_1G_2$ est que G_1G_2 soit égal à G_2G_1.

Si G est un groupe quelconque, $R^{-1}GR$, où R est un élément d'un autre groupe quelconque H, est aussi un groupe. On dit de ce groupe qu'il est semblable à G, ou encore qu'il est *conjugué à* G par rapport au groupe H.

Les deux ensembles G_1RG_2 et G_1SG_2, où R et S désignent deux éléments quelconques, ont ou bien tous leurs éléments communs, ou bien ils n'en ont aucun. Dans le premier cas on dit que R et S sont *équivalents modulis* G_1, G_2. Si g_1 et g_2 sont les ordres des deux groupes G_1 et G_2, l'ensemble G_1RG_2, où R désigne un élément quelconque, contient $\frac{g_1g_2}{d}$ éléments différents et chacun d fois, si l'on désigne par d l'ordre du plus grand commun diviseur des deux groupes $R^{-1}G_1R$ et G_2, ou G_1 et RG_2R^{-1}.

Si G_1 et G_2 sont deux groupes contenus dans un groupe H d'ordre h, on

peut mettre H sous la forme

$$H = G_1 H_1 G_2 + G_1 H_2 G_2 + \ldots + G_1 H_m G_2,$$

où deux quelconques des m ensembles $G_1 H_1 G_2, \ldots, G_1 H_m G_2$ n'ont aucun élément commun. On dit que $H_1, H_2, \ldots, H_m$ forment un *système complet de restes de* H, *modulis* G_1, G_2, ou, plus explicitement, qu'ils forment un système complet d'éléments non équivalents du groupe H, modulis G_1, G_2. Si le plus grand commun diviseur des deux groupes $H_i^{-1} G_1 H_i$ et G_2 est d'ordre d_i ($i = 1, 2, \ldots, m$), on a

$$\frac{h}{g_1 g_2} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} + \ldots + \frac{1}{d_m}.$$

Si le groupe H d'ordre h est divisible par le groupe G d'ordre g, et si pour chaque élément A de H on a

$$GA = AG,$$

on dit que G est un *sous-groupe invariant de* H. On peut, comme on l'a vu plus haut, mettre H sous la forme

$$H = GH_1 + GH_2 + \ldots + GH_n,$$

où $n = \frac{h}{g}$; les ensembles $GH_1, GH_2, \ldots, GH_n$ forment un groupe d'ordre n; nous le désignerons par $\frac{H}{G}$ et nous dirons avec M. Jordan qu'il est un *groupe facteur* de H; nous dirons aussi que le groupe H est *composé* au moyen des deux groupes $\frac{H}{G}$ et G et nous écrirons

$$H = \frac{H}{G} G.$$

Il importe d'appeler l'attention sur ce que ce genre de composition est de nature toute différente de la composition des ensembles formés avec des éléments de même espèce. Les deux groupes $\frac{H}{G}$ et G sont égaux, seulement dans le groupe $\frac{H}{G}$ on n'envisage pas comme éléments les n éléments donnés, mais les n ensembles $GH_1, GH_2, \ldots, GH_n$; l'opération $\frac{H}{G} G$ indique donc que chacun des n ensembles envisagés comme éléments de $\frac{H}{G}$ est de nouveau séparé dans les g éléments primitifs qu'il contient.

Les théorèmes suivants montrent qu'il est inutile d'introduire la notion d'isomorphisme mériédrique et celle d'un isomorphisme plus général encore :

Si à chaque élément A, B, C, ... d'un groupe H correspond un élément A', B', C', ... d'un groupe H' de façon que si AB = C on ait aussi A'B' = C', ..., les éléments de H auxquels correspond l'élément principal de H' forment un sous-groupe invariant G de H, et les groupes $\frac{H}{G}$ et H' sont isomorphes. Si les éléments A, B, C, ... d'un groupe H peuvent être répartis en un certain nombre d'ensembles et si les éléments A', B', C', ... d'un groupe H' peuvent être répartis en des ensembles correspondant aux précédents (en ce sens que AB

et A'B' font partie d'ensembles correspondants lorsque A et A' d'une part et B et B' d'autre part font partie d'ensembles correspondants), l'ensemble G formé par les éléments du groupe H qui contiennent l'élément principal de H forme un sous-groupe invariant de H, et de même l'ensemble G' formé par les éléments du groupe H' qui contiennent l'élément principal de H' forme un sous-groupe invariant de H'; les groupes $\frac{H}{G}$ et $\frac{H'}{G'}$ sont isomorphes et chacun des ensembles s'y réduit à un élément unique. Si un groupe G_1 est échangeable avec chaque élément d'un groupe G_2 et si $G = G_1 G_2$ est le plus petit multiple commun de G_1 et de G_2, le plus grand commun diviseur D de G_1 et de G_2 est un sous-groupe invariant de G_2 et les deux groupes $\frac{G}{G_1}$ et $\frac{G_2}{D}$ sont isomorphes holoédriques; l'égalité $\frac{G}{G_1} = \frac{G_2}{D}$ permet de définir le symbole $\frac{G_2}{G_1}$ par l'égalité

$$\frac{G_2}{G_1} = \frac{G}{G_1} = \frac{G_2}{D},$$

même lorsque le groupe G_1 n'est pas un diviseur du groupe G_2, pourvu que G_1 soit échangeable avec chaque élément de G_2.

En s'appuyant sur le dernier théorème, dans le cas particulier où G_1 et G_2 sont tous deux des sous-groupes invariants de G, on peut démontrer que, lorsqu'un groupe admet deux modes de décomposition différents, chacun des groupes facteurs de l'une des décompositions est isomorphe holoédrique à l'un des groupes-facteurs de la seconde décomposition.

II. Voici les principales des propositions déduites par M. Frobenius des théorèmes généraux précédents; elles se relient pour la plupart à des recherches bien connues de Sylow qu'elles éclairent à nouveau :

1° Si G est un sous-groupe invariant du groupe H, et si l'ordre g de G et le quotient $\frac{h}{g}$ des ordres de H et de G sont premiers relatifs, tout sous-groupe de H dont l'ordre est un diviseur de g, est contenu dans le groupe G; le groupe H ne contient donc qu'un seul sous-groupe d'ordre g et ce sous-groupe est formé par tous les éléments du groupe H dont l'ordre est un diviseur de g (l'ordre d'un élément A est l'ordre m du groupe A, $A^2, \ldots, A^m = 1$, dérivé de cet élément);

2° Si G est un sous-groupe invariant du groupe H et si H est un sous-groupe invariant du groupe K; si G est d'ordre g, H d'ordre h et si g et $\frac{h}{g}$ sont premiers relatifs, G est un sous-groupe invariant de K;

3° Si p est le plus petit des nombres premiers contenus dans g et si f désigne un entier positif quelconque inférieur ou égal à p, tout sous-groupe, d'ordre g, d'un groupe d'ordre fg est un sous-groupe invariant de ce dernier. Ainsi chaque groupe d'ordre p^{a-1} contenu dans un groupe H d'ordre p^a est sous-groupe invariant de H;

4° Si un groupe H d'ordre anb contient un groupe G d'ordre ab et si chacun des facteurs premiers de a est plus petit que n tandis que chacun des facteurs premiers de b est plus grand ou égal à n, G contient nécessairement un sous-groupe invariant de H et l'ordre de ce sous-groupe invariant est divisible par b.

Ainsi p étant un des facteurs premiers de l'ordre h d'un groupe H, si $\frac{h}{p}$ est divisible par un nombre premier plus grand ou égal à p, un groupe non-composé d'ordre h ne peut avoir de sous-groupe d'ordre $\frac{h}{p}$;

5° Si p^ν est la puissance la plus élevée d'un nombre premier p qui soit contenue dans l'ordre h d'un groupe H, si μ est un entier positif plus petit que ν, et si G est un sous-groupe de H d'ordre p^μ, les éléments de H échangeables avec G forment un groupe G′ dont l'ordre g' contient en facteur le nombre premier p élevé à une puissance *supérieure* à la $\mu^{\text{ième}}$. Si g' n'est pas divisible par p^ν, le groupe G′ contient au moins un sous-groupe différent du groupe G et conjugué à ce groupe G par rapport à H;

6° Si un groupe K, dont l'ordre est une puissance p^a d'un nombre premier p, contient un groupe G d'ordre p^c, il existe des groupes H contenus dans K et contenant G, d'ordres respectivement égaux aux différentes puissances p^b de p plus petites que p^a et plus grandes que p^c. Si G est un sous-groupe invariant de K, il existe des sous-groupes invariants H de K, contenant G, d'ordres respectivement égaux à ces mêmes puissances p^{a-1}, p^{a-2}, ..., p^{c+1} du nombre premier p;

7° Si p^a est la puissance la plus élevée d'un nombre premier p par laquelle soit divisible l'ordre h d'un groupe H, deux sous-groupes quelconques de ce groupe H d'ordre p^a sont nécessairement conjugués par rapport à H et chaque sous-groupe de H dont l'ordre est une puissance de p est contenu dans un des sous-groupes de H d'ordre p^a. Si p' est l'ordre du groupe formé par les éléments de H qui sont échangeables avec l'un des sous-groupes d'ordre p^a contenus dans H, le nombre de ces sous-groupes d'ordre p^a est égal à $\frac{h}{p'}$ et ce nombre est congru à 1 modulo p^{a-d}, si p^d est l'ordre maximum des plus grands communs diviseurs de ces sous-groupes pris deux à deux de toutes les manières possibles. Si enfin H′ désigne le groupe formé par ceux des éléments de H qui sont échangeables avec un sous-groupe d'ordre p^a de H et si les éléments de H d'ordres égaux à une puissance de p engendrent un groupe H″, on a $H = H''H'$ et H est le plus petit multiple commun de H′ et de H″.

III. M. Frobenius démontre ensuite le théorème suivant :

Si p^a est la puissance la plus élevée d'un nombre premier p qui soit contenue dans l'ordre h d'un groupe H, formons les plus grands communs diviseurs de ceux des sous-groupes A de H d'ordre égal à p^a, pris deux à deux de toutes les manières possibles; parmi ces plus grands communs diviseurs, choisissons-en un D d'ordre le plus élevé possible p^d, et soit alors D′ le groupe formé par ceux des éléments de H qui sont échangeables avec D. Si p^b est la puissance la plus élevée de p qui soit contenue dans l'ordre δ' du groupe D′, D sera le plus grand commun diviseur de deux quelconques de ceux des sous-groupes différents G de D′, dont l'ordre est égal à p^b. Chacun des sous-groupes invariants de D′ d'ordre égal à une puissance de p est un diviseur de D. L'exposant b est plus petit que l'exposant d. Les groupes G ne sont pas des sous-groupes invariants de D′; δ' est toujours divisible par un nombre premier autre que p. Chacun des groupes G est contenu dans un groupe A et dans un seul, et chaque groupe A qui contient D contient un et un seul groupe G, à savoir le plus grand commun diviseur de A et de D′. Le nombre des groupes A divisibles par D est égal au

nombre des groupes G; il est congru à 1 modulo p^{l-d} et il est plus grand que p^{h-d}. Aucun des éléments du groupe H n'est échangeable avec D′ sauf les éléments du groupe D′ lui-même. Chacun de ceux des éléments de H qui sont échangeables avec G est aussi échangeable avec le groupe A qui contient G. Chaque élément de D′ qui est échangeable avec A est aussi échangeable avec G. Si l'on désigne par A′ le groupe formé par les éléments de H qui sont échangeables avec A et par G′ le groupe formé par les éléments de D′ qui sont échangeables avec G, le plus grand commun diviseur de A′ et de D′ est précisément G′.

Si A était sous-groupe invariant de H, le même théorème aurait lieu à condition de prendre D = A.

IV. Si le groupe G d'ordre g est contenu dans le groupe H d'ordre h et si D est le plus grand des sous-groupes invariants de H contenus dans G, on peut représenter le groupe $\frac{H}{D}$ par un groupe transitif de permutations de $\frac{h}{g}$ lettres. On en déduit la généralisation suivante du théorème 4° du n° II :

Si un groupe H d'ordre ng est divisible par un groupe G d'ordre g et si a est le plus grand commun diviseur de g et de $(n-1)!$, le groupe G contient un sous-groupe invariant de H dont l'ordre est divisible par $\frac{g}{a}$.

M. Frobenius montre ensuite comment on peut encore représenter de deux autres manières un groupe H au moyen d'un de ses sous-groupes G par un groupe transitif de permutations, et comment on peut aussi représenter de diverses manières H par un groupe intransitif de permutations.

V. Parmi les sous-groupes invariants d'un groupe H, il y en a qui jouent un rôle particulièrement important dans la théorie des équations algébriques; on leur a donné le nom de sous-groupes *caractéristiques* de H. En voici la définition :

Supposons que l'on ait déterminé par un procédé quelconque un groupe H′ dont un groupe donné H soit un sous-groupe invariant. Si R est un élément de H′ et si G est un sous-groupe invariant de H, le groupe $R^{-1}GR = G_1$ est un sous-groupe invariant du groupe $R^{-1}HR = H$. Il se peut que G_1 soit différent de G; mais si, pour chaque élément R de H′, on a $G_1 = G$, on dit que G est un sous-groupe caractéristique de H.

Si K est un sous-groupe invariant de H et si G est un sous-groupe caractéristique de K, G est aussi un sous-groupe invariant de H. Si H n'a qu'un seul sous-groupe invariant d'ordre g, ce sous-groupe est nécessairement caractéristique. Le plus grand commun diviseur, le plus petit multiple commun de tous les groupes d'ordre g, contenus dans H, sont des sous-groupes caractéristiques de H.

On peut encore donner une autre définition des sous-groupes caractéristiques : Soit h l'ordre du groupe H; soient $H_1, H_2, \ldots, H_h$ les h éléments de H rangés dans un certain ordre; $H_{\alpha_1}, H_{\alpha_2}, \ldots, H_{\alpha_h}$ ces mêmes éléments rangés dans un autre ordre et

$$r = \begin{pmatrix} H_1, & H_2, & \ldots, & H_h \\ H_{\alpha_1}, & H_{\alpha_2}, & \ldots, & H_{\alpha_h} \end{pmatrix}$$

la permutation qui transforme le premier arrangement dans le second. Si chaque fois que $H_i H_j = H_k$ on a aussi $H_{\alpha_i} H_{\alpha_j} = H_{\alpha_k}$, la permutation r aura pour

effet de transformer le groupe H en un groupe isomorphe identique (bien entendu holoédrique, M. Frobenius n'en envisage pas d'autres). On peut montrer que si G est un sous-groupe caractéristique de H, les éléments de G se transforment en éléments du même groupe G par chaque transformation du groupe H en un groupe isomorphe identique.

VI. Les théorèmes précédents permettent de reconnaître, dans bien des cas, la constitution d'un groupe dont on ne connaît que l'ordre.

Ainsi, si p et q désignent des nombres premiers inégaux, on reconnaît aisément que chaque groupe H d'ordre $p^a q$ est un groupe *résoluble*. Il est le composé d'un groupe $\frac{H}{G}$ formé par les puissances d'un élément d'ordre p^{a-d}, d'un groupe $\frac{G}{K}$ d'ordre q et d'un groupe K d'ordre p^d. Le groupe $\frac{H}{K}$ d'ordre $p^{a-d}q$ qui contient un sous-groupe invariant $\frac{G}{K}$ d'ordre q, peut être représenté par un groupe transitif de permutations de q lettres. G et K sont deux sous-groupes caractéristiques de H; le groupe G est d'ordre $p^d q$: il est formé par les $p^d(q-1)$ éléments de H dont l'ordre est divisible par q; le groupe K est à la fois le plus grand commun diviseur de tous les groupes d'ordre p^a contenus dans H et le plus grand commun diviseur de deux quelconques de ces groupes.

1° Si l'on désigne par H_0 le groupe d'ordre $p^{a-b}q$ formé par les éléments de H qui sont échangeables avec un des sous-groupes Q de H d'ordre q, et par G_0 le groupe d'ordre $p^{d-b}q$ formé par les éléments de H qui sont échangeables avec chacun des éléments de Q, on voit que G_0 est le plus grand commun diviseur de G et de H_0. Le groupe G_0 est formé par les éléments de G qui sont échangeables avec Q; il est aussi engendré par les $p^{d-b}(q-1)$ éléments de H_0 dont l'ordre est divisible par q. Son sous-groupe invariant K_0 d'ordre p^{d-b} est le plus grand commun diviseur de K et de H_0. Inversement K et G sont les plus petits multiples communs de tous les groupes conjugués respectivement à K_0 et G_0. Si b est plus grand que zéro, on a la congruence et les inégalités

$$p^b \equiv q-1 \quad 0 \pmod{p^{a-b}q}, \qquad b \geq 2(a-d), \qquad 3d \geq 2a;$$

dans ces inégalités, il ne faut prendre le signe $=$ que lorsque l'on a

$$p = 2, \qquad q = 2^{a-d}+1.$$

Les $p^b(q-1)$ éléments de H dont l'ordre est égal à q se répartissent en $\frac{q-1}{p^{a-d}}$ classes contenant chacune p^{a+b-d} éléments conjugués et engendrent un groupe L d'ordre $p^\mu q$ contenu dans G. Ce groupe L contient un sous-groupe invariant M d'ordre p^μ qui est le plus grand commun diviseur des deux groupes K et L. Les deux groupes L et M sont des sous-groupes invariants de H. Chaque sous-groupe invariant de H d'ordre égal à $p^\gamma q$ est divisible par M et chaque sous-groupe invariant de H d'ordre p^γ est contenu dans K. Le groupe H admet nécessairement un sous-groupe invariant d'ordre $p^\gamma q$ où γ désigne un quelconque des entiers $\mu+1, \mu+2, \ldots, a-2, a-1$, Le plus petit multiple commun des deux groupes M et H_0 est le groupe $MH_0 = H$.

2° Tout groupe H d'ordre $p^a q^b$ est résoluble lorsque, p et q désignant des nombres premiers différents, q appartient à l'exposant b modulo p. Si H ne contient pas de sous-groupe invariant d'ordre p^a, on peut le décomposer en un

groupe $\frac{H}{G}$ d'ordre p^{a-d}, un groupe $\frac{G}{K}$ d'ordre q^b et un groupe K d'ordre p^d. L'ordre de chacun des éléments du groupe $\frac{G}{K}$ est égal à q, et deux éléments quelconques de ce groupe sont échangeables entre eux. Le groupe $\frac{H}{K}$ d'ordre $p^{a-d}q^b$ qui contient un sous-groupe invariant $\frac{G}{K}$ d'ordre q^b, peut être représenté par un groupe *primitif* de permutations de q^b lettres; le groupe $\frac{H}{G}$ est isomorphe à un groupe homogène linéaire formé par b indéterminées ayant pour coefficients des nombres entiers pris suivant le module q.

G et K sont deux sous-groupes caractéristiques de H. Le groupe G d'ordre $p^d q^b$ est engendré par les $p^d(q^b - 1)$ éléments de H dont l'ordre est divisible par q. Le groupe K est le plus grand commun diviseur de deux quelconques des groupes d'ordre p^a contenus dans H.

Désignons par H_0 le groupe formé par ceux des éléments de H qui sont échangeables avec un sous-groupe Q d'ordre p^b de H, et par G_0 le groupe formé par ceux des éléments de H qui sont échangeables avec chacun des éléments de Q; on démontre que G_0 est le plus grand commun diviseur de G et de H_0.

3° Tout groupe H d'ordre $p^a n$ contient comme sous-groupe invariant K d'ordre p^d le plus grand commun diviseur de deux quelconques des sous-groupes de H d'ordre p^a, pourvu que, p désignant un nombre premier, n ne soit pas divisible par p et qu'aucun diviseur de n, sauf 1 et n lui-même, ne soit congru à 1 modulo p.

Si le groupe H ne contient pas de sous-groupe invariant d'ordre p^a, on peut représenter le groupe $\frac{H}{K}$ du théorème précédent par un groupe *primitif* de permutations de n lettres. Si n est divisible par plus d'un nombre premier, le groupe H n'est pas résoluble.

On peut dire aussi que pour qu'un groupe H d'ordre h soit résoluble il suffit que, p désignant successivement chacun des nombres premiers contenus dans h et p^a la puissance la plus élevée de p qui soit contenue dans h, le plus grand commun diviseur de tous ceux des sous-groupes de H qui sont d'ordre p^a soit le groupe principal de H.

VII. En généralisant le dernier théorème on obtient la proposition suivante :

Tout groupe S d'ordre $s = mp^a q$ est résoluble, contient un sous-groupe invariant H d'ordre $p^a q$ et soit 1 soit q sous-groupes d'ordre p^a, pourvu que, p et q désignant des nombres premiers différents, m ne soit divisible par le carré d'aucun nombre et que $m\varphi(m)$ ne soit divisible ni par p ni par q.

S contient un sous-groupe de chacun des ordres r égaux à ceux des diviseurs de s qui sont premiers relatifs à $\frac{s}{r}$.

Ceux des éléments de S qui sont échangeables avec un des sous-groupes d'ordre p^a forment un groupe d'ordre mp^a ou d'ordre $mp^a q$; ceux des éléments de S qui sont échangeables avec un de ses sous-groupes d'ordre q forment un groupe d'ordre $mp^{a-b}q$ où p^b est un diviseur de p^a.

Planck (*Max*). — Absorption et émission d'ondes électriques par résonance. (289-301).

Wien (*W.*). — Sur la forme des vagues de la mer (*suite*). (343-362).

Dans l'un des deux calculs qu'il effectue, M. Wien s'appuie sur une représentation conforme, due à M. Schwarz, de la lemniscate sur le cercle, représentation qu'il compare à la représentation conforme effectuée au moyen de coordonnées elliptiques dont l'étude a fait l'objet d'une partie d'un premier Mémoire du même auteur sur la forme des vagues de la mer.

Von Bezold. — Sur les isanomales du potentiel magnétique terrestre. (363-378).

Ce Mémoire contient la démonstration de plusieurs théorèmes concernant ces isanomales et une Carte de ces isanomales pour l'année 1880 qui permet de comparer les résultats de la théorie aux observations.

2e semestre.

Prix Steiner à décerner en l'an 1900. (746-747).

On demande de résoudre *complètement*, en tenant compte des méthodes et des principes développés par Steiner, un nouveau problème choisi à volonté parmi ceux qui se rapportent à la théorie des surfaces. L'Académie désire que l'on joigne aux recherches géométriques des explications analytiques ayant pour objet de vérifier l'exactitude des résultats obtenus et de compléter ces résultats.

Sans vouloir restreindre aucunement le choix du sujet, l'Académie appelle l'attention des Géomètres sur les problèmes posés par Steiner, à la fin de son second Mémoire sur les maxima et minima.

Le prix sera de cinq mille francs; un accessit de deux mille cinq cents francs pourra également être décerné. Les Mémoires devront parvenir à l'Académie avant la fin de l'année 1899; ils peuvent être rédigés en allemand, latin, français, anglais ou italien; ils doivent être désignés par une devise reproduite sur une enveloppe cachetée, à l'intérieur de laquelle l'auteur écrira son nom et son adresse. Tout Mémoire dont l'auteur se serait fait connaître sera exclu du concours. Les résultats seront proclamés en 1900, dans la séance consacrée à la mémoire de Leibniz.

Kötter (*F.*). — Expressions, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, des neuf cosinus des angles que font entre elles les arêtes de deux trièdres trirectangles, et application de ces expressions à la résolution de plusieurs problèmes de Mécanique rationnelle. (807-814).

On sait que l'on peut représenter, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, les neuf cosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ des angles formés par les trois axes d'un trièdre trirectangle mobile, avec les trois axes d'un trièdre trirectangle fixe dans l'espace, ainsi que les composantes $\pi, \chi, \zeta, p, q, r$, sui-

vant les axes fixes et mobiles, de la vitesse angulaire de rotation du trièdre mobile. Le mode de représentation est d'ailleurs particulièrement simple; dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. CXI et CXII), M. Caspary a montré que $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ peuvent être représentés en multipliant, par des constantes convenablement choisies, *neuf* des quinze quotients des seize fonctions thêta de deux arguments u_1, u_2, obtenus en divisant par la fonction $\vartheta_5(u_1, u_2)$ de Weierstrass, les quinze autres fonctions thêta. Au moyen de chacun des *six* des quinze quotients de thêta ainsi formés que l'on n'a pas utilisés, on peut représenter les composantes de la vitesse angulaire de rotation du trièdre mobile.

On peut espérer que cette propriété si simple dont jouissent les quotients des fonctions thêta de deux arguments permettra de résoudre un grand nombre de nouveaux problèmes de Mécanique rationnelle. Cependant, jusqu'ici on ne pouvait en citer que deux qui aient été entièrement résolus par des formules de ce genre. C'est celui de M. H. Weber, sur le mouvement, dans un cas particulier, d'un solide rigide dans un fluide (*Mathem. Annalen.*, t. XIV, p. 173-206; *comparez* aussi Kötter, *Journal de Crelle,* t. 109, où l'auteur montre que l'on peut s'affranchir d'une hypothèse restrictive concernant les conditions initiales), et celui de la représentation des deux mouvements dans lesquels on peut décomposer la rotation, dans le vide, d'un solide rigide autour d'un point fixe, dans le cas intégrable découvert par Sophie Kowalewsky (Kötter, *Acta mathematica,* t. XVII, p. 209-263); M. Kötter fait prévoir qu'il y en a un grand nombre d'autres.

En examinant attentivement les diverses formules donnant la solution de ces deux problèmes, on voit qu'elles offrent une certaine analogie avec les formules que Jacobi a données dans l'étude du mouvement d'un solide pesant suspendu par son centre de gravité. On est ainsi amené à se demander si elles ne seraient pas comprises, les unes et les autres, dans un même groupe de formules générales. M. Kötter établit ces formules générales et montre que l'on peut en déduire non seulement les formules qui donnent la solution des deux problèmes précédents et celles de *Jacobi* (ces dernières en supposant les périodes des fonctions envisagées, liées par des relations convenablement choisies), mais encore de nouvelles formules, convenant au cas intégrable de M. *Stekloff,* du mouvement d'un solide rigide dans un fluide incompressible (*Mathem. Annalen,* t. XLII, p. 273).

Pour étudier le mouvement de rotation d'un solide rigide autour d'un de ses points, lorsque ce solide est soumis à l'action de forces données et, s'il y a lieu, de forces superficielles, on peut chercher d'abord à exprimer en fonctions de deux variables auxiliaires, au moyen des intégrales algébriques du problème, les trois cosinus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ des angles que fait un axe convenablement choisi dans l'espace (la verticale, par exemple, quand le solide est pesant) avec les trois axes principaux d'inertie du solide rigide pour le point envisagé, et les trois composantes p, q, r, suivant ces axes principaux d'inertie, de la vitesse angulaire de rotation du solide autour de ce point. Si l'on suppose que cette première partie du problème soit résolue, il restera à représenter, en fonction de t, les six cosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ et les deux variables auxiliaires, de façon que les équations différentielles du mouvement soient vérifiées.

Si l'on suit cette marche, qui est celle qui a permis de décrire le mouvement dans les cas particuliers étudiés jusqu'ici, la première partie du problème est de beaucoup la plus difficile à résoudre : elle nécessite une solution spéciale

pour chacun des problèmes envisagés jusqu'ici. La seconde partie du problème n'est cependant pas exempte de difficultés; quoiqu'elle se ramène généralement à des quadratures, ces quadratures demandent à être transformées avant de pouvoir être effectuées, et les transformations qu'il faut leur faire subir ne sont pas immédiates.

Dans son Mémoire, M. Kötter donne d'abord des expressions de γ_1, γ_2, γ_3 au moyen des fonctions thêta de deux arguments u_1, u_2, des fonctions thêta de deux arguments u'_1, u'_2 et de trois constantes c_1, c_2, c_3 liées par la relation $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$; ces expressions vérifient identiquement en u_1, u_2; u', u'_2 la relation $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$; elles se déduisent d'ailleurs immédiatement du premier théorème de Caspary (*Journal de Crelle*, t. 94, p. 74-86). Il établit ensuite des équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont γ_1, γ_2, γ_3 envisagées comme des fonctions de u_1, u_2, u'_1, u'_2. Ces équations aux dérivées partielles lui fournissent le moyen d'établir des formules générales permettant d'exprimer les six cosinus α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 dans tous les cas possibles, au moyen de fonctions thêta de u_1, u_2, de fonctions thêta de u'_1, u'_2, de fonctions thêta de $u_1 \pm u'_1$, $u_2 \pm u'_2$, de neuf constantes a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 liées par les six relations

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1, \qquad a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3 ; i \neq j),$$

et d'une nouvelle variable auxiliaire u_3. A une variation de cette variable u_3 correspond une rotation virtuelle du solide autour d'une droite de l'espace qui passe par le point envisagé et dont les cosinus directeurs avec les trois axes principaux d'inertie du corps solide, pour le point envisagé, sont γ_1, γ_2, γ_3.

Les neuf cosinus directeurs $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$, exprimés au moyen des formules précédentes, dépendent donc des trois variables auxiliaires u_1, u_2, u_3, des deux variables auxiliaires u'_1, u'_2, des trois constantes qui figurent dans les fonctions thêta de deux variables et enfin des neuf constantes $a_1, \ldots, c_3$ liées par les six relations d'un système orthogonal quelconque. Si l'on fait varier toutes ces quantités, on obtient un déplacement virtuel du solide rigide autour du point envisagé; les composantes de la vitesse angulaire correspondante s'expriment linéairement au moyen des composantes des variations des quantités que nous venons de mentionner.

Si nous envisageons, en particulier, le cas où, seules parmi ces quantités, les quantités u_1, u_2, u_3 dépendent de t (ce cas se présente dans ceux des problèmes concernant le mouvement d'un solide rigide autour d'un point fixe dont on connaît la solution), nous obtenons les expressions des composantes π, χ, ρ, p, q, r, suivant les axes fixes dans l'espace et dans le corps, de la vitesse angulaire de rotation du solide, au moyen de fonctions thêta de u_1, u_2, de fonctions thêta de u'_1, u'_2, de fonctions thêta de $u_1 \pm u'_1$, $u_2 \pm u'_2$, des neuf constantes $a_1, \ldots, c_3$ formant un système orthogonal et de u_3.

Si nous faisons varier les neuf constantes $a_1, \ldots, c_3$, de façon qu'elles continuent à former un système orthogonal, nous obtenons un déplacement virtuel du solide dont les composantes P, Q, R, suivant les axes fixes dans l'espace, fournissent des expressions utiles dans l'étude du mouvement d'un solide dans un fluide incompressible. Ainsi, dans les deux problèmes de M. Weber et de M. Stekloff, elles fournissent aisément les coordonnées du centre de masses du solide. Ces composantes P, Q, R s'expriment aussi au moyen des fonctions thêta de u_1, u_2, des fonctions thêta de u'_1, u'_2, des fonctions thêta de $u_1 \pm u'_1$, $u_2 \pm u'_2$.

des neuf constantes $a_1, \ldots, c_3$ formant un système orthogonal, de leurs variations, et de u_3.

M. Kötter termine son Mémoire en donnant une formule qui permet, dans l'étude du mouvement d'un solide rigide dans un fluide, de mettre, sous forme d'une différentielle totale, la composante de la vitesse de translation du solide suivant la direction de l'impulsion qu'on lui a donnée. La difficulté qui se présentait, dans l'intégration de cette composante multipliée par dt, se trouve ainsi écartée.

Fuchs (*L.*). — Sur la façon dont les intégrales d'une équation différentielle linéaire dépendent de paramètres figurant dans les coefficients de cette équation différentielle. (905-920).

Soit

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - hz = 0, \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire du second ordre dont le coefficient h est une fonction rationnelle de la variable indépendante x et d'un paramètre y. Il peut arriver qu'un système fondamental d'intégrales de cette équation différentielle, envisagées comme des fonctions du paramètre y, vérifient une équation différentielle de la forme

$$\frac{d^3 z}{dy^3} + p_1 \frac{d^2 z}{dy^2} + p_2 \frac{dz}{dy} + p_3 z = 0, \tag{2}$$

où p_1, p_2, p_3 soient des fonctions rationnelles de x et de y. M. Fuchs démontre que, dans ce cas, ou bien l'équation différentielle (1) admet au moins une intégrale dont la dérivée logarithmique par rapport à x est une fonction rationnelle de x, ou bien cette équation différentielle (1) est nécessairement une de celles qu'il a déjà étudiées antérieurement, et auxquelles correspond un groupe de substitutions dont les coefficients sont indépendants du paramètre y.

Dans ce dernier cas, l'intégrale z de l'équation différentielle (1) envisagée comme une fonction de y, vérifie nécessairement (*Sitzungsberichte*, 1892) une équation différentielle d'ordre au plus égal à 2, dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x et de y. Si donc, R désignant une fonction rationnelle de x, l'équation différentielle (1) n'admet pas d'intégrale de la forme

$$z = e^{\int R\,dx},$$

l'équation différentielle (2) est nécessairement *réductible*, puisqu'elle est du troisième ordre. Par conséquent, si un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (1), envisagées comme fonctions du paramètre y, vérifient une équation différentielle *irréductible* (2), l'équation différentielle (1) admet nécessairement au moins une intégrale de la forme

$$z = e^{\int R\,dx},$$

où R désigne une fonction rationnelle de x.

Mais alors de deux choses l'une : ou l'équation différentielle (1) n'admet

qu'une seule intégrale de la forme

$$z = e^{\int R\,dx},$$

ou elle en admet plusieurs. Si elle en admet plusieurs et si l'on désigne deux quelconques d'entre elles par

$$z_1 = e^{\int R_1\,dx}, \qquad z_2 = e^{\int R_2\,dx},$$

et si l'on suppose que la fonction rationnelle R_1 puisse être mise sous la forme

$$R_1 = \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{x - a_m},$$

où les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont inégales et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont indépendants de x, la fonction rationnelle R_2 pourra être mise sous une forme analogue et M. Fuchs démontre que le produit $z_1 z_2$ est alors nécessairement une fonction rationnelle entière de x.

Ceci posé, envisageons l'équation différentielle

$$(3) \qquad \frac{d^3 z}{dx^3} + 4h\frac{dz}{dx} + 2\frac{dh}{dx}z + 4\frac{dh}{dx} = 0,$$

qui admet le système fondamental d'intégrales

$$z_1^2, \quad z_1 z_2, \quad z_2^2.$$

D'après ce que l'on vient de voir sur la forme du produit $z_1 z_2$, cette équation différentielle admet comme intégrale une fonction rationnelle entière de x. Sauf dans le cas où l'équation différentielle (1) est résoluble algébriquement, c'est-à-dire où ses intégrales s'expriment au moyen de racines de fonctions rationnelles, l'équation (3) ne peut d'ailleurs admettre comme intégrales deux fonctions rationnelles entières de x distinctes, c'est-à-dire telles que leur rapport ne soit pas une constante; on en conclut que, sauf dans le cas où l'équation différentielle (1) est résoluble algébriquement, le produit $z_1 z_2$ est nécessairement de la forme

$$z_1 z_2 = \Gamma H(x),$$

où Γ est indépendant de x et où $H(x)$ est un polynome en x dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de y. Mais alors les deux intégrales z_1, z_2 qui forment un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle (1) sont de la forme

$$z_1 = \sqrt{H(x)}\, e^{\frac{c}{2\Gamma}\int \frac{dx}{H(x)}},$$

$$z_2 = \sqrt{H(x)}\, e^{-\frac{c}{2\Gamma}\int \frac{dx}{H(x)}},$$

où c ne dépend pas de x; le carré du quotient $\frac{c}{\Gamma}$ est d'ailleurs une fonction rationnelle de y qui se réduit à une quantité indépendante de y quand $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont indépendants de y.

Si l'équation différentielle (1) n'admet qu'une intégrale de la forme

$$z_1 = e^{\int R\,dx},$$

où R désigne une fonction rationnelle de x, les coefficients de cette fonction rationnelle de x sont nécessairement des fonctions rationnelles de y. Supposons encore que l'on puisse mettre la fonction rationnelle R sous la forme

$$R(x) = \frac{\alpha_1}{x - a_1} + \frac{\alpha_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{x - a_m},$$

où les quantités $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont inégales et où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sont indépendants de x, et supposons, en outre, que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ soient indépendants de y. L'intégrale z_1 est alors nécessairement de la forme

$$z_1 = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_\mu^{\alpha_\mu},$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$ désignent celles des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ qui sont inégales, et où $P_1, P_2, \ldots, P_\mu$ désignent des polynomes en x dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de y. La fonction

$$z_2 = P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_\mu^{\alpha_\mu} \int \frac{dx}{P_1^{2\alpha_1} P_2^{2\alpha_2} \ldots P_\mu^{2\alpha_\mu}}$$

vérifie aussi l'équation différentielle (1) et l'on sait que z_1, z_2 forment un système fondamental d'intégrales de cette équation différentielle.

Ceci posé, substituons à z une nouvelle variable v par la substitution

$$z = v P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_\mu^{\alpha_\mu};$$

l'équation différentielle (1) se transformera en

$$(4) \qquad \frac{d^2 v}{dx^2} - g_1 \frac{dv}{dx} = 0,$$

où g_1 désigne une fonction rationnelle de x et de y; si l'on pose

$$v_1 = \int \frac{dx}{P_1^{2\alpha_1} P_2^{2\alpha_2} \ldots P_\mu^{2\alpha_\mu}}, \qquad v_2 = 1,$$

v_1, v_2 formeront un système fondamental d'intégrales de cette équation différentielle (4). Supposons que v_1 envisagée comme une fonction de y vérifie une équation différentielle de la forme

$$(5) \qquad \frac{\partial^m z}{\partial y^m} + p_1 \frac{\partial^{m-1} z}{\partial y^{m-1}} + \ldots + p_m z = 0,$$

où $p_1, p_2, \ldots, p_m$ désignent des fonctions rationnelles des deux variables x et y, et désignons par V_1 les diverses déterminations de la fonction de y dont v_1 est l'une des déterminations; on aura nécessairement pour chacune de ces déterminations une expression de la forme

$$V_1 = \frac{v_1}{\alpha_i} + \beta,$$

où α_i est l'une des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et où β ne dépend que de y; chacune des fonctions V_1 vérifiera l'équation différentielle (4); la fonction β de y

vérifiera donc nécessairement l'équation différentielle linéaire homogène (5): il en résulte que l'équation différentielle (5) est réductible en y à moins que $p_0, p_1, \ldots, p_m$ ne dépendent pas de x et de y comme on l'a supposé, mais soient fonctions de y seulement.

Si, par exemple, l'équation différentielle (5) est de la forme

$$r_0 Q(z) + r_1 \frac{dQ(z)}{dy} + \ldots + r_n \frac{d^n Q(z)}{dy^n} = 0,$$

où la fonction

$$Q(z) = q_0 z + q_1 \frac{dz}{dy} + \ldots + q_n \frac{d^n z}{dy^n}$$

est irréductible par rapport à y, et où $r_0, r_1, \ldots, r_n$ désignent des fonctions rationnelles de y, il résulte de ce qui précède que l'on a nécessairement

$$Q(\beta) = 0;$$

il suffit donc que les coefficients $q_0, q_1, \ldots, q_n$ de la fonction envisagée $Q(z)$ soient des fonctions rationnelles de y, indépendantes de x.

On rencontre ce cas particulier dans l'étude des intégrales elliptiques et hyperelliptiques; n est alors égal à 1; $p+1$ est égal au degré du polynome qui figure sous le radical; z est l'intégrale envisagée; x désigne l'une des variables et y l'une des valeurs de ramification; r_0 et r_1 sont des fonctions rationnelles de x et de y; mais $q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}$ sont des fonctions rationnelles de y seulement et l'on a bien, si β désigne un quelconque des modules de périodicité de l'intégrale envisagée,

$$Q(\beta) = 0.$$

Ces modules de périodicité β sont d'ailleurs précisément des coefficients du groupe de substitutions appartenant à l'équation différentielle du second ordre à laquelle satisfait l'intégrale z envisagée comme une fonction de variables x (*Journal de Crelle*, t. 71).

Envisageons maintenant l'équation différentielle du second ordre, plus générale que l'équation (1),

$$(6) \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} + g\frac{dz}{dx} + hz = 0,$$

dans laquelle g et h désignent des fonctions rationnelles de la variable x et d'un paramètre y; supposons encore que cette équation différentielle (6) admette un système d'intégrales fondamentales qui, envisagées comme des fonctions de y, vérifient une équation différentielle de la forme

$$(7) \qquad \frac{d^2 z}{dy^2} + p\frac{d^2 z}{dy^2} + p_1\frac{dz}{dy} + p_2 z = 0,$$

où p, p_1, p_2 désignent des fonctions rationnelles de x et de y.

On peut démontrer que l'étude des intégrales de l'équation différentielle (6) se ramène à celle des intégrales de l'équation différentielle (1), lorsque les intégrales de l'équation (6) sont partout déterminées et que les racines de l'équation déterminante fondamentale sont indépendantes de y. En effet, sous cette hypothèse, et même sous une hypothèse plus générale, l'équation différen-

tielle (7) se transforme par la substitution

$$z = tx^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\int \xi\, dx},$$

en une équation de la forme

$$(7\ bis)\qquad \frac{d^2 t}{dx^2} + P_1 \frac{dt}{dx} + P_2 \frac{dt}{dy} + P_3 t = 0,$$

où P_1, P_2, P_3 sont des fonctions rationnelles de x et de y, comme les coefficients p_1, p_2, p_3 de l'équation (7); d'ailleurs, par cette substitution, l'équation différentielle (6) se transforme en une équation

$$(6\ bis)\qquad \frac{d^2 t}{dx^2} - h_1 t = 0,$$

où h_1 est une fonction rationnelle de x et de y, et qui est donc du type de l'équation différentielle (1).

En suivant la même méthode on pourrait étudier les intégrales d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre quelconque dont les coefficients sont des fonctions rationnelles des variables indépendantes et d'un paramètre, dans le cas où un système fondamental d'intégrales de cette équation différenrentielle, envisagées comme des fonctions du paramètre, vérifient une équation différentielle linéaire homogène dont les coefficients soient des fonctions rationnelles des mêmes variables indépendantes et du même paramètre.

Hensel (K.). — Sur les ordres des points de ramification des surfaces de Riemann. (933-943).

Soient

$$(1)\qquad f(y, x) = y^n + a_1(x) y^{n-1} + a_2(x) y^{n-2} + \ldots + a_n(x) = 0,$$

une équation irréductible; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n racines conjuguées de cette équation; $Y = \varphi(x, y)$ une fonction rationnelle de x et de y, c'est-à-dire un élément du corps algébrique $G(x, y)$ engendré par l'équation (1); $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ les n fonctions algébriques conjuguées

$$Y_1 = \varphi(x, y_1), \quad Y_2 = \varphi(x, y_2), \quad \ldots, \quad Y_n = \varphi(x, y_n).$$

Désignons par $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots, Y^{(n)}$, n éléments quelconques du corps algébrique $G(x, y)$; formons, au moyen de ces n éléments et de leurs conjugués, le système algébrique

$$\begin{pmatrix} Y_1^{(1)} & Y_1^{(2)} & \ldots & Y_1^{(n)} \\ Y_2^{(1)} & Y_2^{(2)} & \ldots & Y_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ Y_n^{(1)} & Y_n^{(2)} & \ldots & Y_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

que nous désignerons pour abréger par $(Y_k^{(l)})$. Chaque *diviseur élémentaire* de ce système $(Y_k^{(l)})$ est une racine, à indice entier, d'une fonction rationnelle de x que l'on peut former par divisions successives au moyen des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'équation (1). Nous n'envisagerons que des systèmes

$(Y_k^{(i)})$ dont le déterminant

$$|y_k^{(i)}| \quad (i = 1, 2, \ldots, n; k = 1, 2, \ldots, n)$$

soit différent de zéro, et nous n'envisagerons ces systèmes que dans le voisinage d'un point $x = a$ arbitrairement fixe : il suffit, à cet effet, de déterminer les puissances $(x-a)^{\delta_1}, (x-a)^{\delta_2}, \ldots, (x-a)^{\delta_n}$ de $x-a$ qui sont contenues dans les n diviseurs d'un système algébrique $(Y_k^{(i)})$; leurs exposants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sont des nombres rationnels, positifs ou négatifs que l'on peut déterminer par des opérations rationnelles.

Nous nommerons $(x-a)^{\delta_1}, (x-a)^{\delta_2}, \ldots, (x-a)^{\delta_n}$ les *diviseurs élémentaires* de $(Y_k^{(i)})$ au point a. Nous ne supposerons pas que ces diviseurs élémentaires soient rangés d'après l'ordre de grandeurs des exposants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$; nous nous réservons de les ranger dans un ordre convenable.

Ceci posé, soient $(Y_k^{(i)})$ et $(Z_k^{(i)})$ deux systèmes algébriques formés au moyen d'éléments du même corps algébrique $G(x, y)$. Quel que soit le point envisagé $x = a$, si $(x-a)^{\delta_1}, (x-a)^{\delta_2}, \ldots, (x-a)^{\delta_n}$ sont les diviseurs élémentaires du système algébrique $(Y_k^{(i)})$ au point a, rangés dans un ordre quelconque, on peut toujours ranger les diviseurs élémentaires du système algébrique $(Z_k^{(i)})$ au même point a, dans un ordre tel

$$(x-a)^{\varepsilon_1}, (x-a)^{\varepsilon_2}, \ldots, (x-a)^{\varepsilon_n},$$

que pour $i = 1, 2, \ldots, n$ les différences $\delta_i - \varepsilon_i$ soient des nombres entiers. Si nous rangeons ainsi les diviseurs élémentaires de $(Z_k^{(i)})$, nous nommerons *diviseurs élémentaires correspondants* des deux systèmes algébriques $(Y_k^{(i)})$ et $(Z_k^{(i)})$ deux diviseurs élémentaires tels que $(x-a)^{\delta_i}$ et $(x-a)^{\varepsilon_i}$.

Les plus petits restes positifs des exposants $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ des diviseurs élémentaires des systèmes d'ordre n du même corps algébrique $G(x, y)$ sont donc des *invariants* de ce corps algébrique. Si l'on connaît ces invariants au point a, on peut déterminer la ramification de la surface de Riemann au point a, et inversement. Or on a vu que l'on peut déterminer ces invariants par des opérations rationnelles; on peut donc déterminer la ramification de la surface de Riemann au point quelconque a par des opérations rationnelles.

Soient A, B, C, ..., K les h points superposés mais distincts de la surface de Riemann envisagée, correspondant tous à la même valeur $x = a$ de la variable, et tels que α des n feuillets de cette surface soient réunis en A, β en B, γ en C, ..., k en K. M. Hensel démontre qu'il existe un système algébrique $(Y_k^{(i)})$ correspondant dont les diviseurs élémentaires au point a ont respectivement pour exposants les nombres

$$\frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{\beta-1}{\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}, \frac{\beta-1}{\beta}, \ldots, \frac{\beta-1}{\beta}, \frac{\gamma-1}{\gamma}, \frac{\gamma-1}{\gamma}, \ldots, \frac{k-1}{k}.$$

Ces nombres étant des invariants du corps algébrique $G(x, y)$, on voit que si $(Y_k^{(i)})$ est un *quelconque* des systèmes algébriques envisagés, *on peut toujours ranger les plus petits restes positifs des exposants* $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ *dans l'ordre précédent*; si on les range dans cet ordre, la surface de Riemann envisagée

aura en $x = a$ précisément h points de ramification superposés, le premier d'ordre α, le second d'ordre β, ..., le dernier d'ordre k.

Envisageons, par exemple, le corps algébrique défini par l'équation

$$y^n = f(x)$$

Si r est l'exposant le plus élevé de $x - a$ qui figure dans $f(x)$, le nombre de points de ramification de la surface de Riemann aux points correspondant à la valeur $x = a$ de la variable est égal au plus grand commun diviseur des deux nombres n et r, et chacun de ces points de ramification est d'un ordre égal au quotient de n par le plus grand commun diviseur de n et de r.

Frobenius (*G.*). — Généralisation du théorème de Sylow. (981-993).

1. Sylow a démontré que tout groupe f d'ordre p^λ, où p est un nombre premier, admet une suite de sous-groupes invariants $f_1, f_2, \ldots, f_{\lambda-1}$ dont chacun est contenu dans le suivant. On désigne cette suite sous le nom de *suite principale* de sous-groupes invariants du groupe f.

La démonstration de Sylow repose sur ce que chaque groupe d'ordre p^λ contient un élément invariant d'ordre p, c'est-à-dire un élément d'ordre p qui est échangeable avec chacun des éléments du groupe. M. Frobenius fait observer que ce théorème est contenu dans cet autre plus général : « Tout sous-groupe invariant du groupe envisagé contient un élément invariant, d'ordre p, de ce groupe. »

On peut faire, à propos du théorème de Sylow, les deux remarques suivantes : Chaque sous-groupe d'ordre $p^{\lambda-1}$, du groupe envisagé, est un sous-groupe invariant. Tout sous-groupe invariant, d'ordre p, du groupe envisagé est formé par les puissances d'un élément invariant.

2. M. Frobenius démontre ensuite les propositions générales suivantes :

« Si a et b sont des nombres premiers relatifs, un élément d'ordre ab peut toujours être mis sous la forme du produit de deux éléments échangeables entre eux d'ordres a et b, et il ne peut l'être que d'une seule manière.

» Si l'ordre d'un groupe est divisible par n, le nombre des éléments du groupe dont l'ordre est contenu dans n est un multiple de n.

» Si l'ordre d'un groupe est divisible par n, les éléments de ce groupe, dont l'ordre divise n, forment un sous-groupe caractéristique du groupe envisagé, dont l'ordre est divisible par n.

» Si l'on envisage un groupe dont l'ordre est divisible par les deux nombres premiers relatifs r et s, et tel que le nombre d'éléments A de ce groupe dont l'ordre est un diviseur de r soit précisément égal à r, et que le nombre d'éléments B du même groupe dont l'ordre est un diviseur de s soit précisément égal à s, chacun des r éléments A est nécessairement échangeable avec chacun des s éléments B, et les éléments du groupe envisagé, dont l'ordre est contenu dans le nombre rs, sont les rs éléments différents $AB = BA$. »

3. Cauchy a démontré que tout groupe fini dont l'ordre est divisible par un nombre premier p contient des éléments d'ordre p; M. Frobenius montre que

le nombre de ces éléments est dans tous les cas de la forme

$$(p-1)(np-1),$$

où n désigne un nombre entier.

Le théorème de Cauchy a été généralisé par Sylow qui a montré que tout groupe fini dont l'ordre h est divisible par une puissance p^k d'un nombre premier p contient des sous-groupes d'ordre p^k; M. Frobenius donne une nouvelle démonstration de cette proposition et il montre aussi que le nombre de ces sous-groupes est nécessairement congru à 1, modulo p; M. Sylow avait déjà établi cette proposition dans le cas où l'ordre p^k est la puissance la plus élevée contenue dans h : dans ce cas, deux quelconques des groupes d'ordre p^k contenus dans le groupe envisagé sont conjugués, et leur nombre qui est toujours congru à 1, module p, est un diviseur de h.

La démonstration de M. Frobenius s'appuie sur le théorème rappelé au n° 1 et sur le lemme suivant : « Le nombre de sous-groupes d'ordre $p^{\lambda-1}$ d'un groupe d'ordre p^λ est congru à 1, modulo p. » Ce lemme est démontré de deux manières : d'une part par induction, d'autre part en s'appuyant sur ce que chaque groupe d'ordre p^λ a un sous-groupe invariant d'ordre $p^{\lambda-1}$.

On peut aussi démontrer que, plus généralement, si l'ordre d'un groupe H est divisible par la $k^{\text{ième}}$ puissance d'un nombre premier p et si P est un sous-groupe de H d'ordre p^θ, où θ est un entier positif plus petit ou égal à k, le nombre des sous-groupes de H d'ordre p^k qui sont divisibles par P est nécessairement congru à 1, modulo p.

D'autre part, on voit aisément, en s'appuyant sur le théorème plus général que celui de Sylow, cité au n° 1, que le nombre des sous-groupes d'ordre $p^{\lambda-1}$ contenus dans un groupe d'ordre p^λ n'est égal à 1 que si le groupe envisagé d'ordre p^λ est un groupe cyclique.

On voit aussi que si H est un groupe quelconque d'ordre p^λ, le nombre de sous-groupes invariants d'ordre p^k, où k est un entier positif plus petit que λ, contenus dans H est congru à 1, modulo p, et que si G est un sous-groupe invariant de H dont l'ordre soit divisible par p^k, le nombre des sous-groupes de G d'ordre p^k qui sont sous-groupes invariants de H est congru à 1, modulo p.

Frobenius (G.). — Sur les groupes résolubles. (1027-1044).

Dans les *Sitzungsberichte* de 1893, M. Frobenius a démontré que si l'ordre d'un groupe H est égal au produit ab de deux nombres entiers dont l'un a ne contient que des nombres premiers inégaux et dont l'autre b est premier relatif à $a\varphi(a)$, (où φ est la fonction arithmétique de Gauss), le nombre d'éléments du groupe H dont l'ordre est un diviseur de b, est précisément égal à b. De plus, si d est un quelconque des diviseurs de a, H contient certainement un groupe d'ordre d.

On peut se demander comment se modifient ces théorèmes quand les facteurs premiers de a ne sont pas tous inégaux; c'est pour pouvoir répondre à cette question que M. Frobenius démontre les propositions suivantes :

« Désignons par $H_1, H_2, \ldots, H_\nu$ des sous-groupes caractéristiques du groupe H. Si chacun des $(\nu-1)$ premiers est contenu dans le suivant nous dirons qu'ils forment une *suite* de sous-groupes caractéristiques; cette suite sera *complète* lorsque, d'une part, pour aucun des indices $\mu = 1, 2, \ldots, \nu-1$, il n'existe un sous-groupe caractéristique G de H qui contienne H_μ, soit contenu dans $H_{\mu+1}$

et ne sont ni H_λ ni $H_{\lambda+1}$ et que, d'autre part, le premier groupe H de la série est le groupe principal E tandis que le dernier H_γ est le groupe H lui-même.

Si

$$A_1, A_2, \ldots, A_\alpha; \quad B_1, B_2, \ldots, B_\beta$$

désignent deux suites complètes de sous-groupes caractéristiques de H, il faut que α soit égal à β, et les groupes

$$A_1, \frac{A_2}{A_1}, \frac{A_3}{A_2}, \ldots, \frac{A_\alpha}{A_{\alpha-1}}$$

sont nécessairement isomorphes (holoédriques) aux groupes

$$B_1, \frac{B_2}{B_1}, \frac{B_3}{B_2}, \ldots, \frac{B_\beta}{B_{\beta-1}}$$

rangés dans un ordre convenable. M. Frobenius en donne deux démonstrations dont l'une est identique à celle du théorème analogue démontré, dans un précédent Mémoire, sur la suite principale d'un groupe, tandis que l'autre s'appuie en partie sur ce dernier théorème.

Envisageons un groupe quelconque H d'ordre $h = p^\lambda q^\mu r^\nu \ldots$, où $p, q, r, \ldots$ désignent des nombres premiers inégaux; ce groupe contient des groupes P, Q, R, ... d'ordres $p^\lambda, q^\mu, r^\nu, \ldots$. Soit

$$E, P_1, P_2, \ldots, P_k$$

une suite complète de sous-groupes caractéristiques du groupe P; désignons par p^{λ_i} l'ordre du sous-groupe P_i et par $\theta(P)$ le produit $(p-1)(p^2-1)\ldots(p^{\lambda_k}-1)$, où k est le plus grand des exposants $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Comme deux quelconques des groupes P d'ordre p^λ contenus dans H sont conjugués, le nombre $\theta(P)$ est le même pour chacun de ces groupes.

Lorsque deux quelconques des éléments du groupe P sont échangeables, on peut construire une suite complète de sous-groupes caractéristiques de P. Si alors ρ désigne le *rang* de P (en sorte que ce groupe P puisse être engendré par ρ éléments mais non par un plus grand nombre d'éléments), nous représenterons par $\Theta(P)$ le produit $(p-1)(p^2-1)\ldots(p^\rho-1)$; $\Theta(P)$ est divisible par $\theta(P)$.

On peut construire une suite de sous-groupes caractéristiques de P tels que si A et B désignent deux termes consécutifs de cette suite, le groupe $\frac{B}{A}$ soit un groupe formé d'éléments échangeables, tous d'ordre p ou d'ordre 1.

Convenons d'adopter, pour les groupes Q, R, ... et les suites complètes de sous-groupes caractéristiques de ces groupes, des notations analogues à celles adoptées pour les groupes P, et posons enfin

$$\theta(H) = \theta(P)\theta(Q)\theta(R)\ldots.$$

Ceci posé, M. Frobenius démontre que si un groupe A d'ordre a est échangeable avec un élément B d'ordre b, et si b et $a\theta(A)$ sont premiers relatifs, tout élément de A est échangeable avec B; et le théorème plus général :

« Si l'ordre d'un groupe A est premier relatif à l'ordre d'un élément C, si B est un sous-groupe invariant de A, si C est échangeable avec chaque élément

de B et si C est échangeable, modulo B, avec chaque élément de A, C est aussi échangeable avec chaque élément de A. »

Puis il établit la proposition suivante :

Si a et b sont des nombres premiers relatifs et si un groupe H d'ordre ab contient un sous-groupe invariant A d'ordre a, on sait (*Sitzungsberichte*, 1895) que ce groupe H contient précisément a éléments dont l'ordre divise a; ces a éléments sont les éléments de A. Si l'on suppose, de plus, que les deux nombres $\theta(A)$ et b sont, eux aussi, premiers relatifs, le nombre d'éléments de H dont l'ordre divise b est égal à b; chacun de ces éléments est échangeable avec chacun des éléments de A. Ces b éléments engendrent un groupe H_1 d'ordre $a_1 b$ qui contient un sous-groupe invariant A_1 d'ordre a_1; chacun des éléments du groupe A_1 est échangeable avec chacun des éléments du groupe H; le groupe A_1 est le plus grand commun diviseur des groupes A et H_1; le groupe A_1 est sous-groupe invariant de H.

Soit maintenant p^λ la puissance la plus élevée d'un nombre premier p contenu dans l'ordre h d'un groupe H; posons $ab = \frac{h}{p^\lambda}$. Supposons que deux quelconques des groupes P d'ordre p^λ contenus dans H n'aient aucun élément commun. Si les nombres $\theta(P)$ et b sont premiers relatifs et si le nombre d'éléments de H dont l'ordre est un diviseur de $p^\lambda b$ est égal à $p^\lambda b$, le nombre d'éléments de H dont l'ordre est contenu dans b est égal à b et les éléments de H échangeables avec P forment un groupe dont l'ordre est égal à $p^\lambda ab$. Les éléments de H échangeables avec P forment un groupe P′ dont l'ordre h' contient λ fois le nombre p; si $\frac{h'}{p^\lambda} = a'b'$, b' est le plus grand commun diviseur de h' et de b; on démontre aisément que a' est égal à a; donc a et $\frac{b}{b'}$ sont premiers relatifs.

Après avoir établi ces propositions M. Frobenius passe à la démonstration par induction du théorème général que voici :

« Soit H un groupe dont l'ordre h est le produit de deux nombres premiers relatifs a et b. Soit

$$a = k^\alpha l^\beta m^\gamma \ldots p^\lambda,$$

où $k, l, m, \ldots, p$ désignent des nombres premiers distincts. Soient K, L, M, ..., P des sous-groupes de H d'ordres respectivement égaux à k^α, l^β, m^γ, ..., p^λ. Si deux éléments quelconques de chacun de ces groupes sont échangeables entre eux et si les nombres $\Theta(K)$ et $\frac{h}{k^\alpha}$, $\Theta(L)$ et $\frac{h}{k^\alpha l^\beta}$, ... sont premiers relatifs, le nombre d'éléments de H dont l'ordre est un diviseur de b est égal à b. Si d est un quelconque des diviseurs de a, premier relatif à $\frac{a}{d}$, le groupe H contient des sous-groupes d'ordre d et deux quelconques de ces sous-groupes sont conjugués. »

Parmi les nombreuses conséquences qui se déduisent de ce théorème général, il en est quelques-unes qui méritent particulièrement de fixer l'attention.

Ainsi lorsque chacun des groupes précédents K, L, M, ..., P est de rang 1, en d'autres termes est un groupe cyclique, et lorsque les nombres b et $a\varphi(a)$ sont

premiers relatifs, les hypothèses sous lesquelles on a établi le théorème général sont toutes vérifiées. Ce cas a été étudié par M. Burnside dans le Tome XXVI des *Proceedings of the London Math. Soc.* On a ainsi, par exemple, la proposition suivante :

Si m est un nombre impair, tout groupe H d'ordre $2^\lambda m$ qui contient un élément d'ordre 2^λ contient un et un seul sous-groupe H_k d'ordre $m2^{\lambda-k}$. Ce sous-groupe H_k est formé par tous les éléments de H dont l'ordre est contenu dans $m2^{\lambda-k}$. Chacun des sous-groupes caractéristiques $H_1, H_2, \ldots, H_\lambda$ de H contient le suivant.

Si chacun des groupes précédents K, L, M, ..., P est de rang 1 ou 2, les hypothèses sous lesquelles on a établi le théorème général sont encore vérifiées lorsque le nombre b est premier relatif au nombre

$$\Theta(K)\Theta(L)\Theta(M)\ldots\Theta(P).$$

Le nombre d'éléments de H dont l'ordre est un diviseur de b est donc égal à b. Il n'y a exception que quand les groupes K, L, M, ..., P d'ordres k^α, l^β, m^γ, ..., p^λ étant rangés dans un ordre tel que l'on ait $k < l < m < \ldots < p$, on a $k = 2$ et $l = 3$; qu'en outre K est de rang 2 et qu'enfin H contient un sous-groupe dont l'ordre divise $2^\alpha 3^\beta$, et qui est composé au moyen du groupe du tétraèdre.

Si chacun des exposants $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ est égal à 1 ou à 2, les groupes K, L, M, ..., P sont chacun d'ordre 1 ou 2. M. Burnside a envisagé, dans le Mémoire cité plus haut, le cas où l'on a $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = \ldots = \lambda = 1$; M. Frobenius a, dans les *Sitzungsberichte* de 1893, cité le cas suivant :

Si $p_1, p_2, \ldots, p_n, q, r$ désignent des nombres premiers différents rangés par ordre de grandeur croissante, tout groupe H d'ordre $p_1 p_2 \ldots p_n q^2 r^\gamma$ où γ, est un entier positif quelconque, contient, pour $\lambda = 1, 2, \ldots, n-1$, un et un seul sous-groupe H_λ d'ordre $p_{\lambda+1} p_{\lambda+2} \ldots p_n q^2 r^\gamma$, un et un seul sous-groupe H_n d'ordre $q^2 r^\gamma$, un et un seul sous-groupe H_{n+2} d'ordre r^γ, un et un seul sous-groupe H_{n+1} d'ordre qr^γ. Ces sous-groupes, sauf H_{n+1}, sont nécessairement des sous-groupes invariants de H. Chacun est contenu dans le précédent et H peut être envisagé comme le composé des groupes

$$\frac{H}{H_1}, \quad \frac{H_1}{H_2}, \quad \ldots, \quad \frac{H_{n-1}}{H_n}, \quad \frac{H_n}{H_{n+1}}, \quad \frac{H_{n+1}}{H_{n+2}}, \quad H_{n+2},$$

d'ordres respectivement égaux à

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \quad q, \quad q, \quad r;$$

H est donc *résoluble*. Il y a cependant un cas d'exception; c'est celui où l'on a $q = 2$, $r = 3$, donc $n = 0$; alors un groupe d'ordre $2^2 3^\gamma$, qui n'a pas de sous-groupe invariant d'ordre 2.3^γ, a un sous-groupe invariant d'ordre $2^2 3^{\gamma-1}$ et un autre d'ordre $3^{\gamma-1}$; si l'on prend ce dernier sous-groupe comme module, le groupe envisagé est le groupe du tétraèdre d'ordre 12.

On peut maintenant démontrer que, parmi tous les groupes dont l'ordre est le produit de cinq nombres premiers, il n'y a que trois groupes simples (c'est-à-dire non composés) qui soient formés par les substitutions linéaires fractionnaires propres, modulo p, où p désigne un nombre premier. Leur ordre est égal à $\frac{1}{2}p(p^2-1)$ et p est nécessairement égal à 7, 11 ou 13; ils sont donc d'ordre 168, 660 ou 1092.

Si un groupe non résoluble dont l'ordre est le produit de cinq nombres premiers est composé, ce groupe est nécessairement le composé du groupe de l'icosaèdre et d'un groupe dont l'ordre est égal à un nombre premier. Sauf les groupes singuliers, déjà signalés par Cauchy, d'ordre $60p$, il n'y a que deux groupes non résolubles dont l'ordre est le produit de cinq nombres premiers; tous deux sont d'ordre 120; chacun des deux n'admet qu'un seul sous-groupe invariant : pour l'un c'est un groupe d'ordre 2, pour l'autre c'est le groupe de l'icosaèdre; l'un est le groupe symétrique de degré 5, l'autre est le groupe des substitutions linéaires

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t & u \\ x' & y' & z' & t' & u' \end{pmatrix} \bmod 5, \qquad xt - yu = 1.$$

Plus généralement, si p, q, r désignent trois nombres premiers rangés par ordre de grandeur croissante, il n'y a, outre le groupe de l'icosaèdre, aucun groupe d'ordre $p^\alpha qr$ tel que deux quelconques de ses sous-groupes d'ordre p^α soient premiers relatifs. Tout groupe H d'ordre $p^2 qr^\gamma$ contient un sous-groupe invariant d'ordre r^γ et est, par suite, résoluble; il n'y a exception que pour $p = 2$, $q = 3$, $r = 5$, mais alors H contient un sous-groupe invariant F d'ordre $r^{\gamma-1}$ et $\frac{H}{F}$ est le groupe de l'icosaèdre.

Le théorème général dont on déduit toutes ces conséquences peut lui-même être encore généralisé et étendu au cas où chacun des groupes K, L, M, ..., P contient un sous-groupe caractéristique. Si l'on désigne le sous-groupe caractéristique de chacun de ces groupes par la même lettre affectée de l'indice o, et si l'on suppose que K_0, L_0, M_0, ..., P_0 soient respectivement d'ordre k^{α_0}, l^{β_0}, m^{γ_0}, .. , p^{λ_0}, on peut, en effet, démontrer que H contient un sous-groupe d'ordre $d = k^{\alpha_0} l^{\beta_0} m^{\gamma_0} \ldots p^{\lambda_0}$. Ce théorème s'applique au cas où K_0 est l'élément principal E et aussi au cas où K_0 est égal à K. On retombe sur le théorème général démontré plus haut, si l'on suppose que chacun des groupes K, L, M, ..., P est un groupe cyclique.

M. Frobenius termine son Mémoire en comparant quelques-uns de ses résultats à ceux obtenus par M. Hölder.

Hensel (K...). — Sur les ramifications des surfaces de Riemann à trois ou quatre feuillets. (1103-1111).

1. M. Hensel se propose de montrer comment on peut obtenir facilement, dans chaque cas particulier, les diviseurs élémentaires d'un système algébrique à la détermination desquels se ramène celle des ramifications d'une surface de Riemann donnée. Les notations sont identiques à celles de sa Communication précédente à l'Académie.

Soit

$$(1) \qquad y^n + a_1(x) y^{n-1} + a_2(x) y^{n-2} + \ldots + a_n(x) = 0,$$

une équation irréductible qui définit y en fonction de x; $y_1, y_2, \ldots, y_n$ les n racines de cette équation. Nous prendrons, pour le système $(G_k^{(l)})$ de la théorie

générale exposée plus haut, le système algébrique

$$D[1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}] \quad \begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \ldots & y_1^{n-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \ldots & y_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \ldots & y_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

dont le déterminant est différent de zéro, puisqu'il est, comme on sait, égal à la racine carrée du discriminant de l'équation (1). Soit a une valeur finie de x telle que $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ ne contienne pas le facteur $x - a$ au dénominateur, de sorte que toute fonction rationnelle des fonctions algébriques conjuguées y_1, y_2, ..., y_n soit fonction algébrique entière de x aux environs de $x - a$.

Le plus grand commun diviseur de tous les déterminants mineurs de degré λ (c'est-à-dire formés par λ^2 éléments) du système algébrique D, est aussi le diviseur algébrique $D[1, y, y^2, \ldots, y^{\lambda-1}]$ des déterminants de degré λ du système algébrique

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \ldots & y_1^{\lambda-1} \\ 1 & y_2 & y_2^2 & \ldots & y_2^{\lambda-1} \\ \cdot & \cdot\cdot & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ 1 & y_n & y_n^2 & \ldots & y_n^{\lambda-1} \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que les *diviseurs élémentaires* cherchés E_1, E_2, ..., E_n sont donnés par les relations

$$E_\lambda = \frac{D[1, y, y^2, \ldots, y^{\lambda-1}]}{D[1, y, y^2, \ldots, y^{\lambda-2}]}, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

Si l'on désigne par

$$R[\varphi(x)],$$

le quotient de la fonction algébrique $\varphi(x)$ par son plus grand diviseur rationnel en x, il suffit, d'après les résultats contenus dans la Communication précédente de M. Hensel, de connaître les $R[E_\lambda]$ pour pouvoir déterminer les ramifications sur la surface de Riemann correspondant à cette fonction algébrique. On formera donc les $R[E_\lambda]$ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, n$ et l'on déterminera les exposants δ_1, δ_2, ..., δ_n des puissances de $(x - a)$ qui y figurent. On rangera ces exposants, qui sont, comme on l'a vu, égaux à un ensemble de nombres tels que

$$\frac{0}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}, \ldots, \frac{\alpha-1}{\alpha}, \frac{0}{\beta}, \frac{1}{\beta}, \ldots, \frac{\beta-1}{\beta}, \ldots, \frac{0}{\varkappa}, \frac{1}{\varkappa}, \ldots, \frac{\varkappa-1}{\varkappa},$$

dans l'ordre indiqué par la suite que l'on vient d'écrire; supposons qu'il figure, dans cette suite, h dénominateurs différents; il y aura alors, aux h points de la surface de Riemann correspondant à la valeur $x = a$ de la variable, α feuillets réunis entre eux, β feuillets réunis entre eux, ..., $\varkappa$ feuillets réunis entre eux.

Pour les valeurs finies a de x pour lesquelles les coefficients $a_1(x)$, $a_2(x)$, ..., $a_n(x)$ ne sont pas tous finis et déterminés, et pour $x = \infty$, le plus grand commun diviseur des déterminants de degré λ du système algébrique

$$D[1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}]$$

ne coïncide pas avec le diviseur algébrique

$$D[1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}],$$

mais les diviseurs élémentaires réduits sont encore donnés par les expressions

$$R[E_\lambda] \quad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{ou} \quad E_\lambda = \frac{D[1, y, y^2, \ldots, y^{\lambda-1}]}{D[1, y, y^2, \ldots, y^{\lambda-2}]},$$

dans lesquelles, quand il s'agit de la valeur $x = \infty$, on doit supposer x remplacée par le quotient $\frac{x_1}{x_2}$, de sorte que ces expressions sont alors des fonctions homogènes de deux variables x_1, x_2.

Tout est donc ramené à la recherche, dans chaque cas particulier, des diviseurs algébriques $D[1, y, y^2, \ldots, y^{\lambda-1}]$. M. Hensel s'occupe seulement, pour le moment, des deux premiers de ces diviseurs qui répondent à $\lambda = 0$ et à $\lambda = 1$, et des deux derniers qui répondent à $\lambda = n - 1$ et à $\lambda = n$.

On a manifestement

$$D[1] = 1.$$

Si Δ désigne le discriminant de l'équation (1), on a aussi

$$D[1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}] = \sqrt{\Delta}.$$

$D[1, y]$ désigne le diviseur algébrique commun aux déterminants de degré 2 du système algébrique

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ \cdot & \cdot\cdot \\ 1 & y_n \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire l'expression algébrique désignée par

$$[y_1 - y_2, \ldots, y_1 - y_n, \ldots, y_{n-1} - y_n],$$

ou encore par

$$\left[y_1 - \frac{a_1}{n}, \ldots, y_n - \frac{a_1}{n}\right].$$

Si l'équation (1) est privée de son second terme a_1, ce que l'on peut toujours supposer, il suffit donc, pour trouver le diviseur algébrique $D[1, y]$, de former l'expression

$$[y_1, y_2, \ldots, y_n].$$

On montre de même que l'on a

$$D[1, y, y^2, \ldots, y^{n-1}] = \sqrt{\Delta}\left[\frac{1}{f'(y_1)}, \frac{1}{f'(y_2)}, \ldots, \frac{1}{f'(y_n)}\right],$$

$f'(y)$ désignant la dérivée, prise par rapport à y, du premier membre de l'équation (1).

2. Supposons, par exemple, que l'équation (1) soit du troisième degré en y; elle pourra toujours être mise sous la forme

$$y^3 + \alpha y + \beta = 0,$$

où α et β désignent des fonctions de x. On aura, dans ce cas

$$D[1] = 1,$$

$$D[1, y] = [y_1, y_2, y] = \left[\alpha^{\frac{1}{2}}, \beta^{\frac{1}{3}}\right],$$

$$D[1, y, y^2] = \sqrt{\Delta} = \sqrt{4\alpha^3 - 27\beta^2}.$$

Si aux trois points superposés de la surface de Riemann correspondant à une même valeur $x = a$, les trois feuillets sont réunis de sorte que ces trois points forment un point de ramification d'ordre 2, on obtiendra, en formant les plus petits restes positifs des puissances de $(x - a)$ contenues dans $\left[\alpha^{\frac{1}{2}}, \beta^{\frac{1}{3}}\right]$, $\Delta^{\frac{1}{2}}$, les deux nombres $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Si deux des feuillets sont réunis, on obtiendra le nombre $\frac{1}{2}$. Si les trois feuillets sont distincts, on n'obtiendra aucune fraction.

M. Hensel montre ensuite que la fonction algébrique

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\left[\alpha, \beta^{\frac{2}{3}}\right]},$$

dans laquelle on a posé $x = \frac{x_1}{x_2}$, peut toujours être mise, et cela d'une seule manière, par division par une forme homogène rationnelle de x_1, x_2, sous la forme réduite

$$R\left[\frac{\sqrt{\Delta}}{\left[\alpha, \beta^{\frac{2}{3}}\right]}\right] = A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} = A^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

où A désigne une forme entière de x_1, x_2, B une forme fractionnaire de x_1, x_2, n'ayant pas de facteurs égaux. Les facteurs linéaires $x_1 - ax_2$ de A et de B, et eux seuls, donnent des points de ramification ; aux facteurs linéaires de A correspondent les points de ramification simples, aux facteurs linéaires de B les points de ramification doubles. La dimension de la forme A est nécessairement paire. Le genre p de la forme algébrique envisagée est égal à la dimension de la forme homogène entière $A^{\frac{1}{2}} B_1 B_2$, diminuée de deux unités.

Il suffit donc d'envisager, au lieu des deux expressions $D[1, y] = \left[\alpha^{\frac{1}{2}}, \beta^{\frac{1}{3}}\right]$, $D[1, y, y^2] = \sqrt{4\alpha^3 - 27\beta^2}$, l'unique expression $\frac{\sqrt{4\alpha^3 - 27\beta^2}}{\left[\alpha, \beta^{\frac{2}{3}}\right]}$.

M. Hensel donne encore d'autres règles permettant de décider rapidement si aux trois points superposés de la surface de Riemann correspondant à une valeur donnée $x = a$, les trois feuillets sont séparés, ou sont tous trois réunis, ou encore si deux de ces feuillets sont réunis mais séparés du troisième. Il démontre, en particulier, le théorème suivant qui permet d'éviter l'emploi des coordonnées homogènes x_1, x_2 :

Si α, β et Δ sont des fonctions rationnelles de x de degrés a', b', d', la ramification au point ∞ est donnée par le dénominateur du plus grand des deux nombres $\frac{a'}{2}$, $\frac{b'}{3}$; si $\frac{a'}{2} = \frac{b'}{3}$ le dénominateur de $\frac{d'}{2}$ indique le nombre de feuillets réunis en $x = \infty$. Et plus généralement, si ξ est le facteur du premier degré qui s'annule pour $x = a$, ($x = a$ quand a est finie, x_2 quand a est infinie), et si l'on a

$$\alpha = \alpha'\xi^{a'}, \quad \beta = \beta'\xi^{b'}, \quad \Delta = \Delta'\xi^{d'}$$

la ramification aux points superposés de la surface de Riemann, correspondant à la valeur envisagée de x, est donnée par le dénominateur du plus petit des deux nombres $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$; si $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, c'est le dénominateur de $\frac{d}{c}$ qui indique le nombre de feuillets qui sont réunis.

Exemple

$$y^3 - 3(x - x^2)y + (1 + x^2 - x^3) = 0;$$

on a

$$\alpha = -3(x^2 - x^3), \qquad \beta = (1 + x^2 - x^3), \qquad \Delta = (x - 1)^2(x - 3)(x^2)^3;$$

$$R\left[\frac{\Delta}{(\alpha, \beta)}\right] = R\left[\frac{x - 1)(x - 3)\sqrt{x(x - 3)}}{(-3x(1 - x), 2^3 x^6 (1 - x^2)^3)}\right]$$

$$= R\left[\frac{(x - 1)(x^2)(x - 3)}{x(1 - x), (1 - x^2)}\right] = R[(x - 1)^2(x - 3)^2 x x^2];$$

donc

$$A \cdot B = (x - 1)^2(x - 3)^2 x^3,$$

d'où

$$A = (x - 3)x, \qquad B = (x - 1)^2;$$

pour $x = 2$, on a

$$a = 7, \qquad b = 11;$$

comme $\frac{11}{5} > \frac{7}{5}$, il y a au point $x = 2$ trois feuillets réunis.

3. Supposons, en second lieu, que l'équation (1) soit du quatrième degré en y; elle pourra toujours être mise sous la forme

$$y^4 + \alpha y^2 + \beta y + \gamma = 0.$$

Dans ce cas, en désignant par S_1, S_2, S_3, S_4 les fonctions symétriques élémentaires des fonctions algébriques conjuguées $\frac{1}{f'(y_1)}, \frac{1}{f'(y_2)}, \frac{1}{f'(y_3)}, \frac{1}{f'(y_4)}$, de sorte que

$$S_1 = \frac{1}{f'(y_1)} + \frac{1}{f'(y_2)} + \frac{1}{f'(y_3)} + \frac{1}{f'(y_4)} = 0,$$

$$S_2 = \frac{1}{f'(y_1)f'(y_2)} + \cdots + \frac{1}{f'(y_3)f'(y_4)} = \frac{1}{\Delta}(4\alpha + 9\beta^2 - 8\alpha\gamma),$$

$$S_3 = \frac{1}{f'(y_1)f'(y_2)f'(y_3)} + \cdots + \frac{1}{f'(y_2)f'(y_3)f'(y_4)} = \frac{8\beta}{\Delta},$$

$$S_4 = \frac{1}{f'(y_1)f'(y_2)f'(y_3)f'(y_4)} = \frac{1}{\Delta},$$

et en observant que le diviseur algébrique $\left[\frac{1}{f'(y_1)}, \frac{1}{f'(y_2)}, \frac{1}{f'(y_3)}, \frac{1}{f'(y_4)}\right]$ est égal à $[S_1^2, S_2^2, S_3^2]$, on aura

$$D[1] = 1,$$

$$D[1, y] = [\alpha^2, \beta^2, \gamma^2],$$

$$D[1, y, y^2] = \Delta^2\left[\frac{1}{f'(y_1)}, \frac{1}{f'(y_2)}, \frac{1}{f'(y_3)}, \frac{1}{f'(y_4)}\right] = \Delta^2[S_1^2, S_2^2, S_3^2],$$

$$D[1, y, y^2, y^3] = \Delta^3.$$

Si aux quatre points superposés de la surface de Riemann correspondant à une même valeur $x = a$, les quatre feuillets sont réunis, de sorte que ces quatre points forment un point de ramification d'ordre 3, on obtiendra, en formant les plus petits restes positifs des puissances de $x - a$ contenues dans $\left[\alpha^{\frac{1}{4}}, \beta^{\frac{1}{3}}, \gamma^{\frac{1}{2}}\right], \Delta^{\frac{1}{2}}\left[S^{\frac{1}{2}}, S^{\frac{1}{3}}, S^{\frac{1}{4}}\right], \Delta^{\frac{1}{2}}$, les trois nombres $\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$. Si au contraire trois des quatre feuillets sont réunis, le quatrième étant distinct, on obtiendra les nombres $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$. Si deux des quatre feuillets sont réunis on obtiendra une seule fois le nombre $\frac{1}{3}$. Si les quatre feuillets sont réunis deux à deux, on obtiendra deux fois le nombre $\frac{1}{3}$. Si enfin les quatre feuillets sont distincts on n'obtiendra aucune fraction.

M. Hensel donne encore d'autres criteriums pour reconnaître si l'on est dans l'un ou l'autre de ces cas. Ainsi ξ désignant toujours le facteur du premier degré qui s'annule pour $x = a$, c'est-à-dire $x - a$ quand a est finie et x_2 quand a est infinie et que l'on a remplacé x par $\frac{x_1}{x_2}$, on voit que dans le cas où il n'y a point de ramification correspondant à $x = a$, le plus grand commun diviseur de α^2, $\beta^{\frac{1}{3}}$, $\gamma^{\frac{1}{4}}$, celui de $S^{\frac{1}{2}}_2$, $S^{\frac{1}{3}}_3$, $S^{\frac{1}{4}}_4$ et celui de $\Delta^{\frac{1}{2}}$ dans chacun desquels on a remplacé chacun des exposants par son plus petit reste positif ou nul, ne contiennent pas ξ en facteur. Si le point de ramification est d'ordre 3, ξ figure à un exposant fractionnaire dont le dénominateur est 4 dans l'une au moins des deux expressions $R\left[\gamma^{\frac{1}{4}}\right]$, $R\left[S^{\frac{1}{4}}_4\right]$. Si le point de ramification est d'ordre 2, ξ figure à un exposant fractionnaire dont le dénominateur est 3 dans l'une au moins des deux expressions $R\left[\beta^{\frac{1}{3}}\right]$, $R\left[S^{\frac{1}{3}}_3\right]$. Lorsque l'on n'est dans aucun des cas précédents, ou bien l'on a affaire à un point unique de ramification du premier ordre où deux feuillets seulement sont réunis, ce que l'on reconnaît à ce que ξ figure dans l'expression $R\left[\Delta^{\frac{1}{2}}\right]$; ou bien l'on a affaire à deux points de ramification du premier ordre superposés, ce que l'on reconnaît à ce que ξ ne figure pas dans l'expression $R\left[\Delta^{\frac{1}{2}}\right]$.

Von Bezold (*W.*). — Le magnétisme terrestre normal. (1119-1134).

J. M.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XXV : 1897 [1].

Raffy. — Sur les formules fondamentales de la théorie des surfaces. (1-3).

On considère une surface, rapportée à des coordonnées curvilignes *obliques* ($u =$ const., $v =$ const.); soient E, F, G les coefficients de son élément linéaire; Δ, Δ', Δ'' les coefficients de la seconde forme quadratique fondamentale, divisée par $H = \sqrt{EG - F^2}$; si l'on désigne par h la demi-somme et par $-k^2$ le produit des courbures principales, on satisfait aux relations finies qui relient h et k avec Δ, Δ' et Δ'' en posant

$$\Delta = \frac{2Hh - 2k(Et - F)}{Et^2 + 2Ft + G},$$

$$\Delta' = \frac{-2Hht + k(Et^2 - G)}{Et^2 + 2Ft + G},$$

$$\Delta'' = \frac{2Hht^2 + 2k(Ft - Gt)}{Et^2 + 2Ft + G};$$

t est la valeur du rapport $du : dv$ qui correspond à l'une des lignes asymptotiques.

Si l'on substitue les expressions précédentes dans les deux équations aux dérivées partielles que vérifient Δ, Δ' et Δ'', on reconnaît que, sauf dans le cas particulier des surfaces réglées, *la courbure moyenne s'exprime explicitement en fonction de t et de ses dérivées premières,* et que la fonction t satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre. Mais, à la différence des équations antérieurement données pour résoudre le problème de la déformation des surfaces, *cette équation est linéaire par rapport aux dérivées secondes.*

Mannheim. — Sur les formules de Frenet. (4-5).

Démonstration géométrique de ces formules.

Touche. — Équations d'une trajectoire fluide dans le cas général. (5-8).

D'Ocagne. — Sur une transformation birationnelle réciproque de l'espace (8-9).

D'Ocagne. — Sur la représentation des équations du second ordre par des droites et des cercles. (9-10).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XXII$_2$, p. [illegible]

Appell (*P.*). — Sur un mode d'inversion des intégrales multiples. (10).

Boulanger (*A.*). — Sur l'équation de la propagation de la chaleur. (11-15).

Solution du problème qui consiste à *trouver tous les systèmes de quatre fonctions* X_m ($m = 1, 2, 3, 4$) *des variables* x_i ($i = 1, 2, 3, 4$) *et d'une fonction* F *de* U *et des variables* x_i, *telles que, si l'on remplace les quantités* X_m *en fonction des variables* x_i *dans une solution quelconque* $U(X_1, X_2, X_3, X_4)$ *de l'équation*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} - \frac{\partial U}{\partial X_4} = 0,$$

la fonction $u(x_1, x_2, x_3, x_4) = F(U, x_1, x_2, x_3, x_4)$, *ainsi obtenue, vérifie l'équation*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial u}{\partial x_4} = 0.$$

Maillet. — Des groupes primitifs de classe N — 1 et de degré N. (26-32).

Extension d'un théorème établi par M. Maillet dans sa thèse de doctorat : *Les seuls groupes primitifs de classe* $N - 1$ *et de degré* $N \leq 101$ *sont ceux de degré* $N = p^m$ (*p étant premier*) *et sont linéaires à indices réels*. L'auteur démontre que *ce théorème subsiste pour toutes les valeurs de* N *inférieures ou égales à* 201.

A cet effet, il prouve successivement les trois propositions qui suivent : *Si p est premier impair,* $\rho > 1$ *et premier à p, un groupe primitif de degré* $N = \rho p$ *et de classe* $N - 1$ *ne peut exister si* $\rho < p + 1$; *un tel groupe de degré* $N = \rho p^2$ *et de classe* $N - 1$ *ne peut exister si* $\rho < p^2 + 1$; *un tel groupe de degré* $N = \rho p^m$ *et de classe* $N - 1$ *ne peut exister que si* $\rho > \frac{p^m + 1}{2}$.

Lucas (*Félix*). — Note relative à la théorie des nombres (33-35).

Démonstration des deux théorèmes suivants :

Si x et y sont deux entiers premiers entre eux et m un nombre premier impair, si $x + y$ *est premier avec m, il est premier aussi avec* $\frac{x^m + y^m}{x + y}$. *Si* $x + y$ *est divisible par m, le produit* $m(x + y)$ *est premier avec* $\frac{x^m + y^m}{m(x + y)}$.

Picard (*Ém.*). — Remarques au sujet d'une Communication récente de M. I. Bendixson. (35).

Goursat. — Sur une équation aux dérivées partielles. (36-48).

L'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1) \qquad s^2 - 4\lambda(x, y, p, q) = 0$$

est ramenée par la transformation

$$(2) \qquad p = u, \quad q = v$$

à l'équation linéaire

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2}\left(b - \frac{\partial a}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda u = 0,$$

qui se rapproche des équations à invariants égaux. *A toute équation de la forme* (3) *intégrable par la méthode de Laplace, correspond une équation* (1) *qui s'intégrera par des quadratures; de plus son intégrale générale appartient à la première classe d'Ampère,* ainsi qu'il résulte d'un théorème général relatif aux équations de cette classe.

Lorsque la fonction λ *est de la forme* $k(x+y)^{-2}$, k *désignant une constante, pour que la suite de Laplace relative à l'équation* (3) *du côté des indices positifs soit limitée, il faut et il suffit que* k *soit le carré d'un nombre entier.* L'auteur examine les cas les plus simples $k = 1$, $k = 4$, et donne les intégrales générales correspondantes.

Il rattache ensuite la transformation (2) à une question plus générale. Si l'on convient d'appeler *multiplicateur* d'une équation linéaire

$$F(z) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + c = 0,$$

toute fonction μ renfermant les variables x, y, z et les dérivées partielles de z jusqu'à un ordre quelconque, telle que le produit $\mu F(z)$ soit de la forme

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y},$$

M et N étant des fonctions du même type que μ, on sait qu'il existe toujours une infinité de multiplicateurs $u(x, y)$ ne dépendant que de x et de y; ce sont les solutions d'une équation linéaire, de même forme que $F(z) = 0$, et qui est dite son *équation adjointe.*

M. Goursat montre comment on peut prévoir l'existence de cas très étendus où il existe des multiplicateurs μ, renfermant non seulement les variables x et y, mais aussi z et ses dérivées, jusqu'à un ordre aussi élevé qu'on le veut. C'est ainsi qu'en particulier on passe de l'équation (3) à son adjointe par une transformation de la forme

$$u = A\frac{\partial z}{\partial y} + Bz.$$

Andrade. — Sur la stabilité (49-51).

L'auteur prouve par un exemple que si deux forces laissent chacune un même corps en une même position d'équilibre *stable,* leur résultante peut laisser le corps en la même position d'équilibre *instable.* Ainsi, *en dehors du cas où les forces dérivent chacune d'une fonction de forces, on ne peut pas conclure des stabilités partielles à une stabilité résultante.*

Lémeray. — Sur la dérivée des fonctions itératives au point-limite. (51-53).

Mangeot. — Sur les conditions pour qu'une courbe plane algébrique ait des axes en nombre limité.

Grecy (J.). — Équations fonctionnelles avec second membre. (57-63).

L'auteur considère l'équation fonctionnelle

$$p_0(z)f(z) + p_1(z)f(z_1) + \ldots + p_n(z)f(z_n) = q(z),$$

dont les coefficients $p_i(z)$, ainsi que $q(z)$, sont holomorphes dans le domaine d'un point x, point-limite pour la substitution $z_{i+1} = \varphi(z_i)$, les deux nombres $p_0(x)$ et $p_n(x)$ étant différents de zéro. Il établit à son sujet le théorème suivant :

L'équation fonctionnelle avec second membre non nul au point-limite x admet une solution de la forme

$$f_0(z) = (z - x)^{m_1} f_1(z) h(z) + \ldots + (z - x)^{m_\alpha} f_\alpha(z) h^\alpha(z),$$

$f_0, f_1, \ldots, f_\alpha$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine du point-limite, $m_1, \ldots, m_\alpha$ étant les exposants des puissances de $\varphi'(x)$ qui sont solutions de l'équation caractéristique

$$p_0(x) + p_1(x)t + \ldots + p_n(x)t^n = 0,$$

plusieurs de ces quantités pouvant être égales.

Le Roux. — Sur l'équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre. (63-71).

Raffy. — Sur certaines équations différentielles d'ordre supérieur, analogues à l'équation de Clairaut. (71-72).

Si l'on désigne par φ l'expression différentielle

$$\varphi = y - xy' - \frac{x^2}{2}y'' - \ldots - (-1)^m \frac{x^m}{m!}y^{(m)},$$

et qu'avec ses dérivées successives $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \ldots,$ *prises en traitant $y, y', \ldots, y^{(m)}$ comme des constantes,* on mette l'équation

$$\varphi = F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m\varphi}{\partial x^m}\right),$$

où la fonction F est arbitraire, sous la forme

$$\Phi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m\varphi}{\partial x^m}\right) = F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^m\varphi}{\partial x^m}\right),$$

on obtiendra l'intégrale générale de cette équation en y remplaçant les dérivées successives de φ par des constantes arbitraires.

Dumont (*F.*). — Sur les surfaces du troisième ordre qui sont polaires d'elles-mêmes par rapport à une quadrique (74-78).

D'après le Tableau donné par Salmon des vingt-trois classes de surfaces du troisième ordre, les seules surfaces à la fois de troisième ordre et de troisième classe sont : 1° les surfaces à trois binodes; 2° les surfaces réglées. Ces deux classes de surfaces sont donc les seules qui contiennent des surfaces susceptibles de se reproduire elles-mêmes par une transformation dualistique. M. Dumont détermine les surfaces qui jouissent de cette propriété et les quadriques par rapport auxquelles elles sont polaires d'elles-mêmes.

Mannheim. — Note à propos d'un théorème connu de Géométrie. (78-82).

Le théorème en question est généralement énoncé ainsi : *Dans tout quadrilatère circonscrit à une surface du second ordre, les quatre points de contact sont dans un même plan.* M. Mannheim fait observer que cet énoncé est trop absolu, car il existe de pareils quadrilatères qui ne jouissent pas de cette propriété. Il faut ajouter : *Pour un quadrilatère gauche formé par les tangentes* L, M, N, Q *à une quadrique, et dont les points de contact* l, m, n, q *ne sont pas dans un même plan, le point de contact* q *est l'harmonique conjugué, par rapport aux extrémités du côté* Q, *du point où ce côté est coupé par le plan* (l, m, n).

Demoulin. — Sur les surfaces qui présentent un réseau conjugué formé par des courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe tétraédral (83-91).

Dans le Volume précédent du *Bulletin*, M. Raffy a posé et résolu le problème suivant : *Trouver toutes les surfaces représentées par les formules*

$$x = U_1(u)V_1(v), \qquad y = U_2(u)V_2(v), \qquad z = U_3(u)V_3(v),$$

les fonctions U_i *et* V_i *étant telles que les courbes* $u =$ const. *et* $v =$ const. *forment un réseau conjugué.* Quatre classes de surfaces répondent à la question; elles sont représentées respectivement par les équations suivantes :

$$\text{(I)} \quad x = U_1V_1, \qquad y = U_2V_2, \qquad z = V_3;$$

$$\text{(II)} \quad x = u^{m_1}v^{n_1}, \qquad y = u^{m_2}v^{n_2}, \qquad z = u^{m_3}v^{n_3};$$

$$\text{(III)} \quad x = u^{m_1}e^{m_1\int\frac{V\,dv}{v+m_1}}, \qquad y = u^{m_2}e^{m_2\int\frac{V\,dv}{v+m_2}}, \qquad z = u^{m_3}e^{m_3\int\frac{V\,dv}{v+m_3}};$$

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \log x = \int\frac{U\,du}{u-a} - \int\frac{V\,dv}{v-a}, \\ \log y = \int\frac{U\,du}{u-b} - \int\frac{V\,dv}{v-b}, \\ \log z = \int\frac{U\,du}{u-c} - \int\frac{V\,dv}{v-c}. \end{cases}$$

M. Demoulin a remarqué que les surfaces des trois dernières classes jouissent d'une propriété commune : les tangentes aux courbes $u =$ const. et aux courbes

$v = \text{const.}$ appartiennent à un même complexe tétraédral dont le tétraèdre fondamental a pour faces les plans coordonnés et le plan de l'infini. Il montre que, réciproquement, *ces surfaces sont les seules qui présentent un réseau conjugué exclusivement formé de courbes dont les tangentes appartiennent à un même complexe tétraédral, l'une des faces du tétraèdre fondamental étant le plan de l'infini.*

En terminant, il indique une nouvelle solution du problème de M. Bally.

Lémeray. — Dérivée des fonctions itératives par rapport à l'indice d'itération. (92-94).

Goursat. — Sur les équations linéaires qui admettent quatre intégrales liées par une relation quadratique. (95-97).

M. Goursat a précédemment signalé (*voir* ci-dessus) une propriété des équations linéaires

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{\partial^2\Theta}{\partial z\,\partial z_1} + a\frac{\partial\Theta}{\partial z} + b\frac{\partial\Theta}{\partial z_1} + c\Theta = 0$$

dont l'adjointe (E′) se déduit de (E) par une transformation de Laplace. Il fait aujourd'hui rentrer dans cette classe les équations linéaires admettant quatre intégrales linéairement distinctes, liées par une relation quadratique et montre que *si la suite de Laplace, relative à une telle équation, se termine dans un sens après n opérations, elle se termine dans l'autre sens après* $n+2$ *opérations au plus.*

Bricard. — Étude géométrique d'un déplacement remarquable et d'un hyperboloïde articulé. (98-108).

Il s'agit de la figure constituée par les génératrices d'un même système et par deux sections circulaires parallèles d'un hyperboloïde, ces diverses lignes étant supposées rigides et articulées en leurs points de rencontre. L'auteur établit que ce système est susceptible d'une série de déformations dans lesquelles les plans des deux cercles restent parallèles, et définit aussi complètement que possible le déplacement de l'un des cercles (C′) quand on fixe l'autre (C), trois de ses points a', b', c' restant respectivement à des distances constantes des points homologues a, b, c du cercle (C).

Beudon. — Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles. (108-120).

Extension de la notion de caractéristique aux équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur et à plus de deux variables indépendantes, d'après les principes énoncés par l'auteur dans une Note des *Comptes rendus* (t. CXXIV, 29 mars 1897).

Touche. — Calcul de la résistance de l'air à un disque, pour la vitesse de 20^{m} par seconde. (121-124).

Raffy. — Sur une propriété caractéristique des hélicoïdes. (124-126).

Ossian Bonnet a énoncé, sans le démontrer, le théorème suivant : *Toute surface dont les rayons principaux* R_1, R_2 *sont liés par une relation et dont les lignes de courbure font avec chaque ligne d'égale courbure* ($R_1 R_2 = \text{const.}$) *un angle constant tout le long de cette ligne, est un hélicoïde.* M. Raffy fait voir que la preuve de ce théorème est contenue dans un Mémoire *Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation*, publié par lui dans le tome XIX du *Bulletin*.

Stephanos. — Sur le temps solaire moyen. (127-129).

L'auteur montre que la moyenne I des valeurs que prend l'équation du temps dans l'espace d'une année tropique n'est pas nulle, et calcule I sans tenir compte du déplacement des équinoxes et des variations de l'orbite elliptique de la Terre.

D'Ocagne. — Sur les paramètres de distribution du paraboloïde hyperbolique. (130-131).

Généralisant une proposition due à M. Mannheim, l'auteur prouve que *le produit des paramètres de distribution des plans tangents à un paraboloïde hyperbolique, pour deux génératrices quelconques de même système, est égal au carré du quotient de la plus courte distance de ces droites par le sinus de leur angle.*

Bourlet (C.). — Sur les transmutations. (132-140).

L'auteur poursuit ses recherches, commencées dans les *Annales de l'Ecole Normale* (avril-mai 1897) et démontre les deux théorèmes suivants :

1° *La substitution (ou changement de variables) est, à un multiplicateur près, la seule transformation additive, uniforme et régulière, telle que la transmuée du produit de deux fonctions quelconques puisse s'exprimer au moyen des transmuées de ces deux fonctions.*

2° *La seule transmutation additive, uniforme, continue et régulière* $\mathfrak{T}$, *telle que l'on ait, quelles que soient les fonctions régulières u et v, la relation*

$$\mathfrak{T}\, uv = v\, \mathfrak{T}\, u + u\, \mathfrak{T}\, v,$$

est celle qui est définie par une égalité de la forme

$$\mathfrak{T}\, u = \omega_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \omega_2 \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots + \omega_n \frac{\partial u}{\partial x_n},$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ *étant n fonctions déterminées.*

Lecornu. — Sur l'engrenage à fuseaux. (140-146).

Raffy. — Contribution à la théorie des surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation. (147-179).

On peut se proposer de *déterminer toutes les surfaces à lignes d'égale courbure parallèles dont les rayons principaux sont fonctions l'un de l'autre.* On ne connaissait d'autres solutions de ce difficile problème que des surfaces qu'Ossian Bonnet avait rencontrées en s'occupant des déformations qui conservent les courbures principales, et qui sont applicables sur des surfaces de révolution. Par une analyse propre à faire connaître toutes les surfaces cherchées, M. Raffy montre que *toute surface à lignes d'égale courbure parallèles, dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation, est applicable sur une surface de révolution.* On est alors ramené à un problème qu'il a traité antérieurement (*Bulletin*, t. XIX) et qui n'a pour solutions que les surfaces d'Ossian Bonnet.

Lecornu. — Sur les engrenages à dents circulaires. (172-179).

Bricard. — Note sur des systèmes de droites et de quadriques tangentes. (180-184).

Des propriétés de la relation doublement quadratique entre deux variables l'auteur déduit les théorèmes suivants :

Toutes les quadriques tangentes à huit droites rencontrant deux droites données A *et* B *sont aussi tangentes à une infinité d'autres droites rencontrant également* A *et* B.

Toutes les droites tangentes à une quadrique donnée et rencontrant deux droites données sont aussi tangentes à une infinité d'autres quadriques.

Lorsqu'une quadrique est circonscrite à un tétraèdre, le faisceau formé par deux faces de ce tétraèdre et par deux plans tangents à la quadrique, menés par l'arête suivant laquelle se coupent ces deux faces, a même rapport anharmonique que le faisceau analogue relatif à l'arête opposée.

Duport (*H.*). — Actions mutuelles de deux atomes. (185-188).

L'action d'un atome sur un autre peut toujours avoir lieu point à point; mais la forme des atomes et leurs actions mutuelles restent indéterminées.

Maillet. — Sur les groupes de substitutions deux fois transitifs à trois degrés. (189-208).

Lecornu. — Note complémentaire sur l'engrenage à fuseaux. (209).

Laisant. — Sur un procédé de vérification expérimentale du théorème de Goldbach. (209-211).

Il s'agit du théorème empirique : *Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers.* Le dispositif proposé par l'auteur rend probable cette autre proposition empirique : *Tout nombre pair* $2m$ *est la différence de deux nombres premiers, dont le plus grand est inférieur à* $4m$.

Bricard. — Note sur les fonctions elliptiques du second ordre. (212-221).

L'auteur établit d'abord le théorème suivant : *Trois fonctions elliptiques du second ordre du même argument, t, u, v, ayant les mêmes périodes et telles que, pour chacune, les sommes des pôles soient des quantités différentes, satisfont à deux relations distinctes, linéaires par rapport à chacune d'elles.*

$$(1)\quad \begin{cases} A\,tuv + B\,uv + C\,vt + D\,tu + E\,t + F\,u + G = 0, \\ A'\,tuv + B'\,uv + C'\,vt + D'\,tu + E'\,t + F'\,u + G' = 0. \end{cases}$$

Considérant ensuite le système de trois équations doublement quadratiques

$$X u^2 + Y u + Z = 0, \quad X_1 v^2 + 2Y_1 v + Z_1 = 0, \quad X_2 v^2 + 2Y_2 v + Z_2 = 0$$

supposées irréductibles et de genre un, où X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1 sont des polynomes du second degré en t; X_2, Y_2, Z_2 des polynomes du second degré en u, il détermine les deux cas dans lesquels ce système admet une infinité de solutions en t, u, v. L'un de ces cas est celui où le système considéré résulte des relations (1) par l'élimination successive de t, u, v.

Petrovitch. — Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. (221-235).

Ensemble de règles fournissant des limites, supérieure et inférieure, entre lesquelles reste constamment comprise la valeur d'une intégrale déterminée dans un intervalle. Procédés d'approximation. Formation de certaines équations qu'on saura intégrer.

Dumont (*F.*). — Théorèmes sur les surfaces cubiques analogues au théorème de Chasles sur les cubiques planes. (235-239).

Une surface cubique peut être transformée homologiquement en une surface possédant un cône asymptote.

Une surface cubique peut être transformée homologiquement en une surface possédant deux sections planes à centres de symétrie, le centre étant le même pour les deux sections.

Une surface cubique peut être transformée homologiquement en une surface possédant trois sections parallèles, à centre de symétrie, les trois centres étant en ligne droite.

Krygowski. — Sur les fonctions à espaces lacunaires. (240-243).

Issaly (l'abbé). — Sur une formule de Laguerre, étendue aux pseudo-surfaces. (243-246).

Fontené. — Sur la décomposition d'une correspondance tangentielle. (247-267).

On peut appeler *élément* d'une courbe X l'ensemble d'un point A et de la tangente a en ce point et faire correspondre les éléments (a, A) d'une courbe X avec les éléments (a', A') d'une courbe X', par la condition que la tangente a passe au point A'. L'auteur donne à une telle correspondance le nom de *correspondance tangentielle* et la désigne par (n, m') si X est de classe n et X' d'ordre m'. Son Mémoire est consacré à l'étude des cas où la correspondance tangentielle (n, m') peut se décomposer en deux correspondances (α, α') et (β, β') avec $\alpha = \beta = n$, $\alpha' = \beta' = m'$.

ATTI DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO. In-8°. Torino. E. Lœscher.

Tome XXVI, 1891-92 (1).

Basso (*G.*). — [V9] En commémoration de G. Weber. (4-13).

Peano (*G.*). — [C1*e*] Sur la formule de Taylor. (40-46).

L'auteur donne, de la formule de Taylor, une interprétation indépendante de la convergence de la série. La voici :

Si l'on a

$$\lim_{x=0} f(x) = a_0,$$

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - a_0}{x} = a_1,$$

$$\lim_{x=0} \frac{\frac{f(x) - a_0}{x} - a_1}{x} = a_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

on écrira l'égalité

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

pour indiquer que

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n} = a_n,$$

ou bien

$$\lim_{x=0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - \ldots - a_n x^n}{x^n} = 0.$$

L'auteur démontre que, à ce point de vue aussi, les propriétés connues de la somme, du produit et du quotient de deux séries restent applicables.

Pastore (*G.*). — [R1*e*] Sur quelques nouveaux conducteurs

---

(1) Voir *Bulletin*, XXI$_2$, p. 144.

rectilignes approchés qui se déduisent du mouvement elliptique. (47-63).

Reina (*V.*). — [U10] Sur l'erreur moyenne des points déterminés dans les problèmes de Hansen et de Marek. (99-106).

Aschieri (*T.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1892. (107-120).

Jadanza (*N.*). — [T3] Théorie de quelques instruments topographiques à réflexion. (200-209).

Maffiotti (*G.-B.*). — [K6*b*] Sur une relation entre les coordonnées sphériques orthogonales et les coordonnées topographiques. (210-216).

Predella (*P.*). — [P1, Q2] Sur la théorie générale des homographies. (270-288).

Une homographie générale dans un espace S_n est déterminée par les espaces fondamentaux et les invariants absolus. L'étude est plus compliquée quand deux ou plusieurs espaces fondamentaux se superposent. Dans ce cas les points unis et les invariants absolus ne suffisent plus; mais on a $n+1$ couples de points (*couples caractéristiques*) qui, avec les invariants absolus, déterminent l'homographie. L'auteur emploie cette nouvelle considération des $n+1$ couples caractéristiques et des invariants absolus au lieu des $n+2$ couples de points correspondants pour définir une homographie. Il montre que l'on peut en déduire une construction simple des homographies, et le théorème suivant, dont celui de Weierstrass, sur les formes bilinéaires, est un cas particulier :

« Étant données deux homographies qui ont même caractéristique et mêmes invariants absolus, il y a $\infty^{n+2h(h-1)}$ projectivités par lesquelles on peut passer de l'une à l'autre, $h-1$ étant le nombre des nombres caractéristiques des homographies. »

Pieri (*M.*). — [M²2*h*, O5*l*] Sur les lignes uniformément illuminées d'une surface quelconque. (347-353).

Sur une surface quelconque les lignes telles que dans chacune le plan tangent à la surface fait un angle constant avec une droite fixe, ont pour conjuguées, dans le sens de Dupin, les trajectoires orthogonales des sections faites dans la surface par des plans perpendiculaires à la droite.

Ovazza (*E.*). — [T2] Sur le calcul des poutres à treillis elliptiques à lames surabondantes. (394-412, 1 pl.)

Guarducci (*F.*). — [U10] Sur la détermination de l'azimut de

la géodésique passant par deux points donnés de l'ellipsoïde terrestre. (458-467).

D'Ovidio (*E.*). — [B7*d*] Formules relatives à la forme binaire du sixième ordre. (535-563).

Expressions des composés (Ueberschiebungen) mutuels entre les formes du système complet d'une binaire du sixième ordre; et quelques relations (syzygies) entre ces formes.

Peano (*G.*). — [C2*j*] Généralisation de la formule de Simpson. (608-612).

D'Ovidio (*E.*). — [V9] Notice nécrologique sur Hannibal De Gasparis. (658-659].

Montesano (*D.*). — [N^{4}1*c*] Sur un système linéaire de coniques dans l'espace. (660-690).

Système intersection des éléments correspondants d'une étoile de plans et d'un réseau de quadriques, ces deux formes étant homographiques entre elles.

Giudice (*F.*). — [A3] Sur la résolvante de Malfatti (817-826).

Garbasso (*A.*). — [T3*c*] Le problème des ondes planes dans la théorie électromagnétique de la lumière. (854-861).

Jadanza (*N.*). — [U10] Sur un nouvel appareil pour mesurer des bases topographiques. (911-922).

Jadanza (*N.*). — [U10] Sur quelques différences trouvées dans le calcul des coordonnées géographiques des sommets du quadrilatère joignant l'Algérie avec l'Espagne. (923-928).

Marchesani (*D.*). — [N^{2}1*f*] Sur une congruence de rayons du deuxième ordre et de la quatrième classe. (1053-1069).

Congruence constituée par les génératrices de ∞ cônes du deuxième degré, et dont la courbe singulière est une conique.

Lessona (*M.*), *D'Ovidio* (*E.*). — [V9] Commémoration de A. Genocchi. (1089-1106).

Tome XXVIII; 1892-93.

Basso (*G.*). — [V9] Commémoration de E. Betti. (3-6).

Aschieri (*T.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1893. (7-19).

D'Ovidio (*E.*). — [B5] Sur quelques invariants simultanés et en particulier sur le résultant de deux formes binaires des ordres 6 et 3. (20-23).

D'Ovidio (*E.*). — [B7*d*] Nouvelles syzygies pour la forme binaire du sixième ordre, obtenues au moyen de l'opération d'Aronhold. (118-133).

Basso (*G.*). — [T3] Sur un caractère de réciprocité appartenant à la lumière réflectée par les milieux cristallins. (149-154).

Pieri (*M.*). — [$N^2 3a$] Sur certaines congruences de coniques. (289-303).

L'*ordre* d'une congruence de coniques est le nombre de ses coniques passant par un point arbitraire, *classe* le nombre de celles qui rencontrent deux fois une droite arbitraire donnée; l'auteur étudie les congruences du premier ordre et de la deuxième classe, et les congruences telles que de leur courbe singulière se détache une conique, rencontrée deux fois par celles de la congruence (en particulier, congruence de cercles de l'espace euclidien).

Giudice (*F.*). — [A4*a*] Sur la résolution algébrique des équations. (349-364).

Del Re (*A.*). — [$M^2 6b\alpha$] Sur cinq manières différentes de produire la surface du cinquième ordre à courbe double du cinquième ordre, par des formes projectives. (420-427).

D'Ovidio (*E.*). — [B5, 7] Sur certaines classes de syzygies binaires. (447-451).

Historique et corrections.

D'Ovidio (*E.*). — [Q1] Sur plusieurs questions de métrique projective. (566-589).

Il s'agit principalement des aires dans un espace linéaire de deux dimensions et à absolu quadratique.

Giudice (*F.*). — [A4*d*2] Sur la résolution de l'équation algébrique du cinquième degré par l'adjonction de l'irrationalité icosaédrale. (664-683).

Castelnuovo (*G.*). — [M¹2] Sur la linéarité des involutions plusieurs fois infinies appartenant à une courbe algébrique. (727-738).

Exception faite pour les involutions dont les groupes s'obtiennent en réunissant r à r les groupes d'une involution irrationnelle ∞^1, toutes les involutions $\infty^r (r > 1)$ sont linéaires.

D'Ovidio (*E.*). — [D4] Note à un écrit de F. Casorati. (812-815).

Le travail de Casorati est le suivant : *Aggiunte a recenti lavori dei signori Weierstrass e Mittag-Leffler* (*Ann. di Mat.*, t. X; 1882).

Manaira (*A.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1894.(847-862).

Tome XXIX; 1893-94.

Kantor (*S.*). — [M¹2*h*] Les correspondances dans les courbes elliptiques déduites géométriquement. (9-16).

Détermination par voie géométrique de toutes ces correspondances et constructions relatives au cas des cubiques planes. Le travail est écrit en français.

Castellano (*F.*). — [R3, 7*b*] Application de la théorie des vecteurs au mouvement central d'un point, et à la résolution des problèmes relatifs. (80-87).

Berruti (*G.*). — [R3] Sur la théorie des vecteurs composables. (115-118).

Giudice (*F.*). — [D2] Sur la détermination des nombres réels par des sommes et des produits. (188-207).

L'auteur appelle *somme irréductible* l'expression finie ou infinie

$$\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_2} - \frac{1}{u_3} - \cdots$$

étant $u_1 > 1$, $u_{n+1} > u_n(u_n - 1)$, et aussi, dans le cas que l'expression soit

infinie,

$$u_{n+1} = u_n + u_n - 1 = 1,$$

pour un nombre infini de valeurs de n.

Il appelle aussi *produit irréductible* l'expression

$$\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots$$

$p_1, p_2, \ldots$ étant des entiers positifs,

$$p_1 = 1, \quad p_{n+1} = p_n p_n,$$

et, pour l'expression infinie,

$$p_{n+1} = p_n^2 + 1,$$

pour un nombre infini de valeurs de n. C'est par ces sommes ou produits que l'on peut représenter tout nombre réel, et chacun d'une seule manière. L'auteur en donne aussi l'application à la détermination pratique des irrationnels et en particulier à celle des racines réelles des équations numériques.

Enriques (*F.*). — [M²1*d*] Sur la plus grande dimension des systèmes linéaires de courbes de genre donné appartenant à une surface algébrique. (275-296).

Par une méthode fondée sur la projection d'une surface dans un hyperespace l'auteur obtient le résultat suivant :

S'il existe sur une surface un système linéaire de genre p et de dimension $r \geqq 3p + 5$, on a l'un des cas suivants :

1° La surface est représentable point par point sur une surface gauche de genre p.

2° La surface est rationnelle et le système est simple, de dimension $r = 3p + 5$, ou bien $r = 9$ pour $p = 1$.

Castellano (*Ph.*). — [R1, N¹1*h*] Le complexe des accélérations d'ordre quelconque des points d'un corps en mouvement. (306-325).

Le complexe des droites contenant les accélérations d'ordre n est un complexe tétraédral particulier, le plan de l'infini étant l'une des faces du tétraèdre fondamental.

Mortara (*E.*). — [T6] Sur l'équilibre des liquides magnétiques. (325-336).

Burali-Forti (*C.*). — [D1*a*, refJ5] Sur les classes dérivées à droite et à gauche. (382-394).

La note est écrite en symboles de logique mathématique.

Reina (*V.*). — [U10] Une loi de dualité dans la théorie de la compensation des observations. (433-445).

Paci (*P.*). — [O6*h*] Sur les surfaces minima. (446-461).

Fano (*G.*). — [N²1*g*] Sur les congruences de droites du troisième ordre n'ayant pas de ligne singulière. (474-493).

A l'exception d'une congruence (3, 6) de genre 5 avec 10 cônes cubiques, et d'une (3, 7) de genre 6 avec 20 cônes cubiques, dont l'existence n'est pas même certaine [dans une Note insérée ensuite au Tome XXXI l'auteur prouve que cette (3, 7) n'existe pas], les congruences mentionnées dans le titre ne peuvent être que de genre ≤ 4.

Dans le genre zéro il n'y a que la crémonienne (3, 1) qui n'ait pas de ligne singulière.

Pour les (3, n) sans ligne singulière et de genre 1, on a

$$n = 6,$$

de genre 2

$$n = 9,$$

de genre 3

$$n = 13,$$

de genre 4

$$n = 9.$$

Toutes sont représentables sur le plan.

Berruti (*G.*). — [R3] Sur la théorie des vecteurs composables. (531-534, 1 pl.).

D'Ovidio (*E.*). — [V9] Giuseppe Battaglini. Commémoration. (678-679).

D'Ovidio (*E.*). — [G6*a*] Sur les fonctions thétafuchsiennes. (741-749).

Convergence, continuité et dérivabilité de la série $\Theta(z)$.

Tome XXX; 1894-95.

Balbi (*V.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1895. (4-19).

Peano (*G.*). — [D1*a*] Extension de quelques théorèmes de Cauchy sur les limites. (20-41).

Cauchy a démontré que, f étant une quantité réelle, fonction des nombres

entiers positifs, on a

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Sigma f(x)}{x} = \lim_{n=\infty} f(x) ;$$

l'auteur en donne l'extension au cas où les fonctions ont plusieurs valeurs limites. Par une généralisation ultérieure, il arrive à un théorème correspondant pour le cas des nombres complexes. Le Travail est écrit en symboles de logique.

Pizzetti (*P.*). — [L² 12] Développement en série relatif aux géodésiques de l'ellipsoïde de rotation aplati. (217-226).

Burali-Forti (*C.*). — [D 1 *a*] Sur la limite des classes variables. (227-243).

Écrit en symboles de logique.

Volterra (*V.*). — [R8] Sur la théorie des mouvements du pôle terrestre. (301-306).

L'auteur fait ici un résumé d'une théorie exposée par lui dans les *Astronomische Nachrichten*, et par laquelle on peut expliquer les changements qui ont lieu dans la rotation terrestre (changements de latitude géographique), par des *mouvements stationnaires* d'une partie de la matière constituant le globe (courants de la mer, mouvements des fleuves, etc.).

L'hypothèse que, dans le corps considéré, libre et non soumis à des forces extérieures, ait lieu un de ces mouvements, par exemple que, le corps étant homogène, il y ait dans sa masse un tore possédant un mouvement de rotation autour de son axe, conduit aux équations différentielles suivantes pour le mouvement autour du barycentre :

$$(a) \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + M_2 q - M_3 r = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} - (A - C)rp - M_1 r + M_3 p = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} - (B - A)pq + M_2 p - M_1 q = 0; \end{cases}$$

où A, B, C sont les moments principaux d'inertie du corps, M_1, M_2, M_3 les composantes du couple de quantité de mouvement dû à la rotation du tore (ou, en général, aux mouvements stationnaires considérés) par rapport aux axes principaux du corps et p, q, r les composantes de la vitesse angulaire de rotation suivant les mêmes axes.

Les équations (a) ont les deux intégrales

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h,$$
$$(Ap + M_1)^2 + (Bq + M_2)^2 + (Cr + M_3)^2 = K.$$

Dans l'hypothèse que M_1, M_2, M_3 soient des constantes et que deux des moments d'inertie soient égaux entre eux et moindres que l'autre, l'auteur donne le tracé de la polhodie pour trois cas.

2e Part.

Baggi (*F.*). — [U] Sur la flexion des lunettes dans la mesure des distances zénithales. (307-319).

Bertini (*E.*). — [Q2 cf. L²7] Sur les espaces linéaires des quadriques ayant nombre pair de dimensions. (350-354).

M. Segre [(*Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* (*Mém. de Turin*, 2e série, t. XXXVI; 1886)] a démontré pour les quadriques V_{2p}^2 d'un nombre pair de dimensions une propriété qui est une extension de celle des systèmes de génératrices sur les quadriques ordinaires; c'est-à-dire qu'il existe sur une V_{2p}^2 deux systèmes d'espaces linéaires S_p, et que, si p est pair, deux S_p ne se rencontrent qu'étant d'un même système. Si p est impair, ils ne se rencontrent qu'étant de systèmes différents.

Ici l'auteur démontre d'abord une propriété relative à la projection stéréographique d'une quadrique, en trouvant la condition nécessaire et suffisante pour que deux S'_m de l'hyperespace représentatif soient les images de deux S_m de la quadrique qui se rencontrent, et puis il applique cette propriété pour compléter par le théorème suivant celui de M. Segre :

« Dans V_{2p}^2, deux S_p du même système pour p pair, ou de systèmes différents pour p impair, ne peuvent se rencontrer que dans un espace de dimension paire ($S_0, S_2, S_4, \ldots$, jusqu'à S_{p-1} ou S_p); et deux S_p de systèmes différents pour p pair, ou de même système pour p impair, ne peuvent se rencontrer que dans un espace de dimension impaire ($S_{-1}, S_1, S_3, \ldots$, jusqu'à S_{p-1} ou S_p), S_{-1} indiquant qu'il n'y a pas d'espace où les S_p se rencontrent. »

Volterra (*V.*). — [R8] Sur le mouvement d'un système où il y a des mouvements intérieurs stationnaires. (372-384).

En reprenant le problème traité dans la Note précédente (*voir* ci-dessus), l'auteur établit les relations en termes finis entre p, q, r et t. Il y parvient au moyen des fonctions elliptiques.

Volterra (*V.*). — [R8]. Sur un système d'équations différentielles. (445-454).

C'est le système

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)},$$

dont le système relatif au mouvement d'un corps où il y a des mouvements stationnaires est un cas particulier. En traitant ainsi le problème à un point de vue plus général, l'auteur trouve les expressions en termes finis de p, q, r et t par un paramètre u, et en en faisant l'application au problème mécanique des mouvements stationnaires, il retrouve les expressions déjà données dans la Note précédente.

Chini (*M.*). — [H9] Sur les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. (494-498).

Peano (*G.*). — [R8] Sur le déplacement du pôle sur la Terre. (515-523).

Calcul des déplacements produits sur la Terre par le mouvement relatif de ses parties, fait en appliquant seulement le principe des aires, et par les méthodes du calcul géométrique. Application au déplacement du pôle produit par le *Gulf-Stream*.

Volterra (*V.*). — [R8] Un théorème sur la rotation des corps et application au mouvement d'un système où il y a des mouvements intérieurs stationnaires. (524-541).

Étant $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ les cosinus des angles que les axes mobiles ξ, η, ζ font avec les axes fixes x, y, z; et p, q, r les composantes de la rotation suivant ξ, η, ζ, on a que si $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des fonctions uniformes du temps n'ayant d'autre singularité que des pôles, et, en ces points les ordres d'infini des p, q, r ne sont pas plus grands que celui d'une au moins des $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, les autres cosinus seront aussi des fonctions uniformes du temps ayant seulement des singularités polaires.

Volterra (*V.*). — [R8] Sur les mouvements périodiques du pôle terrestre. (547-561).

Cette Note se rattache aux précédentes du même auteur sur ce sujet (*voir* ci-dessus). Les équations du mouvement relatives au cas où il y ait des mouvements non stationnaires (mais qui, toutefois, ne changent pas la distribution de la matière)

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + M_3 q - M_2 r + \frac{dM_1}{dt} = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + M_1 r - M_3 p + \frac{dM_2}{dt} = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq + M_2 p - M_1 q + \frac{dM}{dt} = 0$$

peuvent être réduites à une forme plus simple en supprimant certains termes très petits. L'auteur exclut ici toute plasticité de la Terre. En supposant que les mouvements du pôle puissent se décomposer en une série de mouvements harmoniques, il trouve les relations entre les périodes et les constantes relatives. Les mouvements intérieurs et ceux du pôle ont des périodes égales, à l'exception de deux périodes dont l'une est propre aux seuls mouvements intérieurs et l'autre à ceux du pôle. Dans l'application aux mouvements du pôle de la Terre, l'auteur se base sur les recherches de Chandler. Si le couple de quantité de mouvement des mouvements intérieurs a une composante suivant l'axe, qui soit $\frac{1}{1053}$ du couple relatif au mouvement de la Terre supposée rigide, la période eulérienne se change en celle de 430 jours, trouvée par Chandler. L'auteur suppose ensuite que la composante mentionnée soit négligeable, relativement au couple $C\omega$ de quantité de mouvement de la Terre rigide, et il obtient, en indiquant par $M^{(2)}$ l'extrémité de l'axe des mouvements

intérieurs, qui produisent un mouvement harmonique du pôle à période annuelle (CHANDLER, *Astron. Journal*, n° 329) :

1° Que la projection m_λ de M^{λ} sur l'équateur décrit une ellipse dont le grand axe est sur le méridien de 45° Greenwich;

2° Que les axes de cette ellipse sont

$$\frac{3}{10^{10}}\,C\omega, \qquad \frac{27}{10^{10}}\,C\omega;$$

3° Qu'en décomposant le mouvement du pôle et celui de m_λ suivant les axes des ellipses respectives, les deux mouvements qui ont lieu suivant les grands axes sont de même phase, et ceux qui ont lieu sur les petits axes sont de phase opposée. L'hypothèse de la plasticité de la Terre est introduite dans une autre Note (*voir* ci-dessous).

Pieri (*M.*). — [K7] Sur les principes qui régissent la Géométrie de position. (607-641).

L'auteur prend sans définition trois éléments primitifs de la Géométrie : le *point projectif* (qui, dans les applications, peut aussi bien être, par exemple, une droite), la *droite projective*, qui est une certaine classe de points projectifs déterminée par deux d'entre eux, et le *segment projectif* déterminé par trois. Il donne dix-neuf postulata comme base de la Géométrie de position.

[Dans deux Notes insérées au Tome suivant, l'auteur développe les conséquences de ces postulata jusqu'à la démonstration du théorème de Staudt. Dans une autre Note, insérée au t. XXXII, il réduit le nombre des éléments primitifs en donnant une définition du segment projectif. Toutes ces Notes sont écrites en employant les notations de la logique mathématique. Le contenu de ces quatre Notes a été recueilli et refondu par l'auteur même dans un Mémoire (*Memorie della R. Accad. delle Scienze di Torino*, 2e série, t. XLVIII; 1897)].

Jadanza (*N.*). — [U10] Sur la mesure des distances avec la lunette réduite. (713-720).

Volterra (*V.*). — [R8] Sur la théorie des mouvements du pôle dans l'hypothèse de la plasticité de la Terre. (729-743).

L'auteur, en reprenant l'étude qui formait l'objet des Notes précédentes pour y introduire l'hypothèse de la plasticité, suppose que les mouvements intérieurs soient stationnaires, et que l'effet de la plasticité soit de rapprocher le pôle d'inertie au pôle instantané de rotation suivant l'arc du grand cercle qui joint ces deux points, et avec une vitesse proportionnelle à la distance (le rapport μ entre cette vitesse et cette distance est le coefficient d'inertie). Les relations qui lient le pôle de rotation, le centre du mouvement polaire, le pôle d'inertie et le centre des mouvements intérieurs sont transformées par projection stéréographique, et cela conduit aux équations du problème que l'auteur résout complètement en donnant les expressions des coordonnées des projections en fonction du temps. Enfin, il examine les deux cas limites $\mu = 0$ (absence de plasticité) et $\mu = \infty$. Dans ce dernier cas, le pôle de rotation décrit une circonférence autour

du centre des mouvements intérieurs et avec la vitesse angulaire

$$\frac{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}{\Lambda}.$$

Bianchi (L). — [O6*g* ref. Q2] Sur les surfaces à courbure nulle dans les espaces à courbure constante. (743-755).

Dans un espace elliptique de rayon R (espace à courbure constante positive $= \frac{1}{R^2}$), on appelle *translation* (*Schiebung*) un mouvement caractérisé par la propriété que tous les points ont, après le mouvement, même distance de leurs positions initiales. Ces mouvements sont représentés par des homographies biaxiales dont les axes sont deux génératrices imaginaires conjuguées de l'absolu. A toute translation est conjointe une congruence (dite *congruence de Clifford*) ayant pour axes ces deux génératrices.

Une translation est donnée par les formules

$$(1)\quad \begin{cases} x'_1 = Ax_1 - Bx_2 - Cx_3 - Dx_4, \\ x'_2 = Bx_1 + Ax_2 + Dx_3 - Cx_4, \\ x'_3 = Cx_1 - Dx_2 + Ax_3 - Bx_4, \\ x'_4 = Dx_1 + Cx_2 + Bx_3 + Ax_4 \end{cases}$$

ou par les autres

$$(2)\quad \begin{cases} x'_1 = Ax_1 - Bx_2 + Cx_3 + Dx_4, \\ x'_2 = Bx_1 + Ax_2 - Dx_3 + Cx_4, \\ x'_3 = Cx_1 + Dx_2 + Ax_3 - Bx_4, \\ x'_4 = Dx_1 + Cx_2 - Bx_3 + Ax_4 \end{cases}$$

$$(\text{étant } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1 \quad \text{et} \quad A^2 + B^2 + C^2 + D^2 = 1),$$

suivant qu'elle est *dextrorse* ou *sinistrorse*, c'est-à-dire suivant que les axes de la congruence appartiennent à l'un ou à l'autre des deux systèmes de l'absolu.

Si l'on a une courbe

$$(3)\qquad x_i = x_i(u)$$

et si l'on fait de cette courbe une translation continue

$$A = y_1(v), \qquad B = y_2(v), \qquad C = y_3(v), \qquad D = y_4(v),$$

on engendre une surface que l'auteur appelle *surface de translation* (*superficie di scorrimento*), et qui pourrait aussi être engendrée par un déplacement continu de la courbe

$$(4)\qquad y_i = y_i(v).$$

Les (3), (4) sont les courbes génératrices de la surface.

Les surfaces à courbure nulle dans l'espace elliptique de rayon R sont des surfaces de translation ayant pour courbes génératrices deux courbes à torsion

constante $\pm \frac{1}{R}$ égale et opposée. Toute surface réglée d'une congruence de Clifford est à courbure nulle et, réciproquement, toute surface réglée à courbure nulle appartient à une congruence de Clifford. Les trajectoires orthogonales des génératrices d'une telle surface réglée sont à torsion constante $\pm \frac{1}{R}$.

Autres propriétés relatives aux développées des surfaces à courbure nulle dans l'espace elliptique, et aux tangentes à un système de géodésiques parallèles, propriétés par lesquelles on peut trouver de nouvelles surfaces à courbure nulle au moyen de seules quadratures.

Ces surfaces peuvent être associées en familles faisant partie de systèmes triples orthogonaux. En supposant que dans un tel système les w soient à courbure nulle, l'élément linéaire deviendra

$$ds^2 = R^2\left[\cos^2\theta\, du^2 + \sin^2\theta\, dv^2 + \left(\frac{d\theta}{dw}\right)^2 dw^2\right],$$

θ satisfaisant aux équations

$$\frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{1}{\sin^2\theta}\left(\frac{d\theta}{dv}\frac{d\theta}{dw}\right)^2 - 1.$$

Enfin l'auteur examine les surfaces à courbure nulle dans l'espace hyperbolique, et donne une relation entre ces surfaces et les représentations conformes des figures planes.

Berzolari (*L.*). — [M²2*k*] Sur un problème comprenant celui de trouver le nombre des ombilics d'une surface générale d'ordre n. (756-760).

F^n étant une surface générale d'ordre n et Γ^m une courbe d'ordre m à singularités ordinaires, trouver pour combien de points de F^n les deux tangentes principales s'appuient sur Γ^m. On a

$$x = mn\{2(m-1)[2(n-1)(n-2)+1] - (n-1)^2\}.$$

Volterra (*V.*). — [R8] Observations sur ma Note : *Sur les mouvements périodiques du pôle terrestre*. (817-820).

Pincherle (*S.*). — [J4*g*] Sur les opérations distributives permutables avec une opération donnée. (820-844).

Propriétés du groupe de ces opérations. Application à la résolution d'un système d'équations fonctionnelles simultanées et à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$F(\xi) = \Lambda^n(\xi) + a_1\Lambda^{n-1}(\xi) + \ldots + a_{n-1}\Lambda(\xi) + a_n\xi = 0.$$

Peano (*G.*). — [R8] Sur le mouvement du pôle terrestre. (845-852).

Par les méthodes du calcul géométrique (Grassmann) l'auteur arrive à la conclusion que, même en supposant sans plasticité la partie solide de la Terre, les mouvements relatifs de l'autre partie (mer) peuvent amener un déplacement progressif du pôle.

Baller (*V.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1896. (869-883).

Tome XXXI: 1895-96.

Ferraris (*G.*). — [V9] Joseph Basso. Commémoration. (3-17).

Levi-Civita (*T.*). — [HIIc] Sur l'inversion des intégrales définies dans le champ réel. (25-51).

Indication d'une méthode pour déterminer la fonction $v(y)$ au moyen de la relation

$$u(x) = \int_a^b f(x, y) v(y) dy,$$

$f(x, y)$ satisfaisant à une équation linéaire

$$\sum_0^n p_r(x) \frac{\partial^{n-r} f(x, y)}{\partial x^{n-r}} + \sum_0^m q_s(y) \frac{\partial^{m-s} f(x, y)}{\partial y^{m-s}} = 0.$$

Application au cas où cette équation est du premier ordre.

Peano (*G.*). — [R3] Transformation linéaire des vecteurs d'un plan. (157-166).

Favaro (*A.*). — [V8] Sept lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange au P. Paul Frisi, tirées des autographes de la bibliothèque ambrosienne de Milan. (182-194).

Ovazza (*E.*). — [T2] Sur la méthode de fausse position pour le calcul des arcs élastiques. (206-224).

Volterra (*V.*). — [HIIc] Sur l'inversion des intégrales définies. (311-323).

Si l'on a dans le champ réel l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad f(y) - f(\alpha) = \int_\alpha^y \varphi(x) H(x, y) dx,$$

$f(y)$ et $f'(y)$ étant finies et continues pour y compris entre α et $\alpha + A$, si $H(x, y)$ et $\frac{\partial H}{\partial y} = H_2(x, y)$ sont aussi finies et continues pour toutes les valeurs de x et y comprises entre α et $\alpha + A$, et la limite inférieure des valeurs absolues de $h(y) = H(y, y)$ dans le même intervalle est > 0, il y a une seule fonction finie et continue φ satisfaisant à l'équation (1), pour y compris entre α et $\alpha + A$, et cette fonction est donnée par

$$\varphi(y) = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)} \int_{\alpha}^{y} f(x) \sum_{0}^{\infty} S_i(x, y)\, dx,$$

étant

$$S_i(x, y) = \int_{y}^{x} S_0(\xi, y) S_{i-1}(x, \xi)\, d\xi,$$

$$S_0(x, y) = \frac{H_2(x, y)}{h(x)}.$$

Jadanza (*N.*). — [U10] Influence de l'erreur de verticalité de la stadia sur la mesure des distances et des altitudes. (376-380).

Pieri (*M.*). — [K7] Sur les principes qui régissent la Géométrie de position. Note II (381-390), Note III (457-470).

Dans ces deux Notes l'auteur développe des conséquences des postulata posés dans la Note I (*voir* Tome précédent), en montrant que ses propositions relatives aux éléments primitifs *point projectif, droite projective* et *segment projectif* suffisent pour établir la Géométrie de position; en effet, il arrive sans d'autres secours au théorème de Staudt. (Dans une Note insérée au t. XXXII il montre que l'on peut exclure le *segment* du nombre des éléments primitifs.)

Volterra (*V.*). — [H11*c*] Sur l'inversion des intégrales définies. Note II. (400-408).

Voir la Note I dans le Tome précédent. Ici l'auteur examine le cas où $h(y)$ devient infinie.

Brioschi (*F.*). — [B7*f*] (Lettre à M. d'Ovidio). Le résultant de deux formes binaires biquadratiques et la relation entre leurs invariants simultanés. (441-446).

La relation entre les huit invariants simultanés est du sixième degré. Cette relation ainsi que le résultant des deux formes sont trouvés ici par une méthode rapide.

Bettazzi (*R.*). — [J5] Sur la chaîne d'un élément d'un groupe. (446-456).

Bettazzi (*R.*). — [J5] Groupes finis et groupe infini d'éléments. (506-512).

Ces Notes se rattachent au travail de Dedekind : *Was sind und was sollen die Zahlen* (*Braunschweig*, 1888), auquel il faut aussi se rapporter pour la signification de la parole *chaîne* (Kette). Le but principal de ces recherches est la distinction entre groupe fini et groupe infini. Dedekind avait appelé *infini* un groupe tel que l'on puisse établir une correspondance univoque entre ses éléments et ceux d'une *partie propre* (echter Theil) de lui-même. M. Bettazzi commence par définir les groupes finis et donne le nom d'*infinis* à tous les autres. Tous les groupes infinis suivant Dedekind le sont suivant la nouvelle définition, mais la démonstration de Dedekind (*loc. cit.*, n° 159) d'où il résulterait que la propriété inverse n'est pas satisfaisante; M. Bettazzi appelle *groupes développables* ceux que Dedekind appelle *infinis*.

Berzolari (*L.*). — [N2*b*, *k*] Sur les courbes planes de deux faisceaux donnés qui ont un contact simple ou double, ou un point d'osculation. (476-484).

Démonstration des propriétés suivantes :

a. Le lieu des contacts des courbes d'un faisceau d'ordre m avec celles d'un faisceau d'ordre m' est d'ordre

$$2m + 2m' - 3;$$

b. Le nombre des points d'osculation de ces courbes est

$$3[(m + m')(m + m' - 6) + 2mm' + 5];$$

c. Le nombre des couples de courbes ayant un contact double est $mm'[2(m+m')^2 - mm' - 9(m+m') + 1] - 6(m+m'-1)(m+m'-4)$; les deux premières de ces propriétés avaient été données sans démonstration par Steiner [*Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven* (*J. de Crelle*, t. 47, p. 6)].

M. Berzolari trouve aussi les singularités du lieu *a* et celles du lieu des points où se coupent les courbes tangentes.

Segre (*C.*). — [M2 l *h*] Sur un caractère des surfaces et des variétés supérieures algébriques. (485-501).

Un faisceau de surfaces détermine sur une surface F un faisceau de courbes; soient p le genre des courbes du faisceau, σ le nombre des points de base, δ le nombre des points doubles qui ne tombent pas dans les points de base, ni dans les points multiples des courbes du faisceau. Le nombre $P = \delta - \sigma - 4p$ ne dépend que de la surface F, et c'est ce que l'auteur appelle le *caractère* de la surface. Pour une surface générale on a

$$P = (n-2)(n^2 - 2n + 9).$$

Ce nombre P est le même pour les surfaces du même *type* suivant Clebsch, c'est-à-dire qui peuvent être transformées l'une dans l'autre par une transfor-

mation birationnelle sans points fondamentaux. Des applications nous citerons la suivante :

Si l'on a une transformation birationnelle entre deux surfaces algébriques, à points fondamentaux seulement, et que i, i_1 soient les nombres de ces points fondamentaux sur les deux surfaces, P, P_1 leurs caractères, on aura

$$P_1 - P = i - i_1.$$

L'auteur établit aussi un nombre analogue pour une variété algébrique à trois dimensions, et, en général, pour une variété d'un nombre quelconque de dimensions.

Levi (*F.*). — [M^2 I *e*] Sur les singularités de la jacobienne de quatre surfaces. (502-506).

Étant r_1, r_2, r_3, r_4 les multiplicités des quatre surfaces données en un point O, l'auteur trouve en quels cas la jacobienne, au lieu d'y avoir la multiplicité ordinaire $r = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 - 3$, y a la multiplicité $r + 1$ ou $r + 2$.

Volterra (*V.*). — [H II *e*] Sur l'inversion des intégrales définies. Note III. (557-567).

Voir les Notes précédentes sur ce même sujet. Ici l'auteur examine le cas où $h(y)$ s'annule entre les limites d'intégration.

Chini (*M.*). — [H9] Sur les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre. (568-578).

Volterra (*V.*). — [H II *e*] Sur l'inversion des intégrales définies Note IV. (693-708).

L'équation fonctionnelle est, comme dans les Notes précédentes,

$$f(y) = \int_0^y \varphi(x)\, H(x, y)\, dx.$$

Ici l'auteur traite le cas où l'expression de H, suivant la formule de Maclaurin, commence par les termes du degré n au lieu que par ceux du premier degré.

Fano (*G.*). — [N^2 I *g*] Appendice à la Note : *Sur les congruences de droites du troisième ordre n'ayant pas de ligne singulière*. (708-715).

Voir ci-dessus (t. XXIX). Il n'existe pas de congruence (3, 7) de genre 6.

Cordone (*G.*). — [B2] Sur le groupe de substitutions rationnelles et linéaires. (804-815).

Levi-Civita (*T.*). — [R8*f*α] Sur les intégrales algébriques des équations dynamiques. (816-823).

Kœnigs a démontré [*Sur les intégrales algébriques des problèmes de la Dynamique* (*Comptes rendus*, août 1886)] que si un système matériel, soumis à des forces ayant un potentiel, admet une intégrale algébrique (par rapport aux vitesses), il admettra aussi au moins une intégrale rationnelle.

L'auteur démontre que le théorème de Kœnigs est vrai aussi pour les forces qui n'ont pas de potentiel. Cette propriété, jointe à deux autres, qui sont des conséquences d'un théorème de M. Painlevé (*Comptes rendus*, mai 1892), permet de réduire la classification des problèmes dynamiques, pour ce qui regarde leurs intégrales, au cas où il n'y a pas de forces externes, et seulement pour le type des intégrales homogènes.

Pizzetti (*P.*). — [R5 ref. U10*a*] Sur la détermination théorique de la gravité à la surface terrestre. (859-870).

Almansi (*A.*). — [H10*e*) Sur l'intégration de l'équation différentielle $\Delta^2\Delta^2 = 0$. (881-888).

Peano (*G.*). — [B12*c*] Essai de calcul géométrique. (952-975).

Exposition rapide mais claire de la méthode de Grassmann.

Lauricella (*G.*). — [H10*e*] Intégration de l'équation $\Delta^2(\Delta^2 u) = 0$ dans un champ de forme circulaire. (1010-1018).

Volterra (*V.*). — [H10*e*] Observations sur la Note précédente du professeur Lauricella et sur une Note de l'ingénieur Almansi de sujet analogue. (1018-1021).

Zañotti-Bianco (*O.*). — [U10*a*] Pour l'histoire de la théorie des surfaces géoïdiques. (1022-1038).

Rizzo (*G.-B.*). — [U] Sur la durée du Soleil sur l'horizon de Turin. (1039-1045, 1 pl.).

Balbi (*V.*). — [U] Éphémérides du Soleil et de la Lune pour l'horizon de Turin et pour 1897. (1046-1060).

MEMORIE DELLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE DELL' ISTITUTO DI BOLOGNA. Bologna, tip. Gamberini e Parmeggiani; in-4°.

5e Série, t. IV; 1894.

Saporetti (*A.*). — [U] Méthode rationnelle d'approximation, différant des anciennes et même des modernes, relative aux époques d'égalité du temps solaire au temps moyen, et à leurs plus grandes différences. (193-199).

Ruffini (*F.-P.*). — [M¹ 3*j*α, M¹ 3*k*] Sur les lignes planes algébriques dont les podaires peuvent être des courbes ayant puissance en tout point de leur plan. Mémoire II. (235-248).

Une courbe est dite *avoir puissance* par rapport à un point O lorsque toute droite issue de ce point rencontre la courbe en des points tels que le produit de leurs distances du point O soit indépendant de la direction de la sécante (propriété analogue à celle du cercle). Une telle courbe ne peut avoir d'autres points à l'infini que les points cycliques [*voir* le Mémoire du même auteur : *Delle curve piane algebriche che hanno potenza,* etc. (*Memorie d. R. Acc. d. Sc. d. I. di Bologna*, serie 4, t. X)]. Dans le Mémoire I, dont le présent Mémoire est une continuation, et qui est publié dans le Tome précédent (t. III), l'auteur a trouvé qu'entre les courbes de classe $2k$ il y a une ou plusieurs familles de courbes qui, au moins par rapport à un pôle donné, ont pour podaire une courbe d'ordre $2k$ ayant puissance en tout point du plan. Il y fait aussi la recherche de la ligne qui a pour podaire un cercle, ou une quartique bicirculaire, ou une sextique isotropique, en supposant toujours le pôle de la podaire placé dans l'origine des coordonnées. Dans ce second Mémoire, il démontre maintenant que si une courbe a cette propriété pour la podaire dont le pôle est dans l'origine, elle la conserve en plaçant le pôle en tout autre point.

Pincherle (*S.*). — [D2*f*] Contribution à la généralisation des fractions continues. (297-320).

Soit

$$A_{1,n},\quad A_{2,n},\quad \ldots\quad A_{p,n}$$

un système fondamental d'intégrales d'une équation récurrente d'ordre p; toute autre intégrale peut être exprimée par ses valeurs initiales et par les A. L'intégrale

$$\lambda_1 A_{1,n} + \lambda_2 A_{2,n} + \ldots + \lambda_p A_{p,n},$$

où les λ sont telles que le rapport de cette expression à toute autre intégrale ait pour limite zéro pour $n = \infty$, est appelée par l'auteur l'*intégrale distincte*.

L'auteur étudie à ce point de vue l'équation récurrente du troisième ordre

$$F_{n+3} = a_n F_{n+2} + b_n F_{n+1} + F_n,$$

d'abord pour le cas où les coefficients sont numériques, et puis, en supposant qu'ils contiennent linéairement un paramètre complexe x. Dans ce dernier cas, A_n, B_n, C_n étant un système d'intégrales facile à déterminer, il existe des séries S, S_1 de puissances négatives de x, pour lesquelles l'intégrale

$$A_n + SB_n + S_1 C_n$$

est de la forme

$$c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2} + c_3 x^{-3} + \ldots$$

Arzelà (*C.*). — [D1*d*δ] Sur les séries doubles trigonométriques. (373-382).

Soit A une aire donnée du plan des x, y, et, au-dessus d'elle, une série infinie de plans $z = z_1$, $z = z_2$, ..., $z = z_s$, ..., ayant un plan limite $z = z_0$. Au dedans de A on considère sur chaque plan $z = z_s$ des portions déterminées et séparées $\omega_1^{(s)}, \omega_2^{(s)}, \ldots, \omega_{n_s}^{(s)}$, dont le nombre peut même augmenter à mesure que z_s tend vers z_s. Si la somme des aires de ces portions est toujours (sur chaque plan) plus grande qu'un nombre d, il existe au moins une droite $x = x_0$, $y = y_0$ (x_0, y_0 étant intérieur à l'aire A) qui rencontre un nombre infini de portions ω.

Cette propriété est une extension d'une autre, relative à une série de droites dans le plan, que l'auteur a établi dans sa Note : *Sulle serie di funzioni* (*Rendiconti dei Lincei*, 1885) et dont il déduisit dans une autre Note (*ibid.*) un théorème sur les séries trigonométriques simples. Ici, de la propriété ainsi étendue, il déduit une proposition générale qui contient comme cas particulier un théorème relatif aux séries doubles trigonométriques, donné par M. Ascoli [*Sulla rappresentazione di una funzione a due variabili per serie doppia trigonometrica* (*Memorie dei Lincei*, 1879)].

Fabri (*C.*). — [S2*f*] Les mouvements tourbillonnaires d'ordre supérieur au premier en relation avec les équations du mouvement des fluides visqueux. (383-392).

Les équations du mouvement sont

$$\frac{du}{dt} = X - \frac{1}{h}\frac{\partial p}{\partial x} + k\,\Delta^2 u,$$

$$\frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{h}\frac{\partial q}{\partial y} + k\,\Delta^2 v,$$

$$\frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{h}\frac{\partial r}{\partial z} + k\,\Delta^2 w;$$

u, v, w étant les composantes de la vitesse, X, Y, Z celles des forces extérieures, p la pression, h la densité et k une quantité constante pour un fluide homo-

gène. L'auteur recherche les particularités du mouvement dues à la viscosité qui entraîne dans les équations les derniers termes $k\Delta^2 u$, $k\Delta^2 v$, $k\Delta^2 w$. En développant u, v, w en série de Taylor, et en ne s'arrêtant pas, comme le fait Helmholtz, aux premiers termes, on peut considérer une série de mouvements, représentables par des vecteurs, et que l'on a appelés *mouvements tourbillonnaires d'ordre supérieur*. Les termes $k\Delta^2 u$, $k\Delta^2 v$, $k\Delta^2 w$ sont proportionnels aux composantes λ, μ, ν du mouvement tourbillonnaire de deuxième ordre, appelé *mouvement de flexion*.

Si

$$\lambda = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad \mu = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad \nu = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

c'est-à-dire s'il existe un potentiel de flexion φ, et si les forces extérieures ont un potentiel V, le mouvement a lieu comme si le fluide n'était pas visqueux, et que le potentiel des forces était $V - 6k\varphi$.

Le théorème d'Helmholtz

$$\frac{d}{dt}\int_c (u\,dx + v\,dy + w\,dz) = 0,$$

c étant un contour fermé quelconque, n'a lieu pour un liquide visqueux que dans le cas où il existe un potentiel de flexion.

Suivent quelques autres propriétés qui ont lieu dans le mouvement permanent.

Donati (*L.*). — [T2*a*] Observations ultérieures sur le théorème de Menabrea. (149-174).

Righi (*A.*). — [T7] Sur les ondes électromagnétiques engendrées par deux petites oscillations électriques orthogonales ou bien par une rotation uniforme. (657-670).

Tome V, 1895-96.

Ruffini (*F.-P.*). — [M¹3*j*α ref. M¹5*k*] Sur les podaires des paraboles cubiques divergentes. (65-76).

Ces podaires sont, en général, du dixième ordre, avec deux points quadruples dans les points cycliques et un point sextuple dans le pôle.

Pincherle (*S.*). — [J4*g*] L'algèbre des formes linéaires aux différences. (87-126).

Étude sur l'opération fonctionnelle θ définie par la relation

$$\theta f_x = f_{x+1}.$$

et sur les opérations formées linéairement avec θ et ses puissances et, par conséquent, aussi avec le symbole de la différence finie. Ce sont ces opérations que l'on appelle *formes linéaires aux différences.*

La puissance θ^a nous donne

$$\theta^a f_x = f_{x+a}$$

pour a quelconque, et elle a la propriété distributive par rapport à l'addition, à la multiplication et à la division. La forme linéaire aux différences d'ordre m est

$$F = a_{0,x} + a_{1,x}\theta + a_{2,x}\theta^2 + \ldots + a_{m,x}\theta^m,$$

et elle est aussi distributive. L'auteur définit la multiplication et la division de ces formes, et montre que l'on peut construire pour elles une algèbre analogue à celle des fonctions rationnelles entières et qui contient celle-ci comme cas particulier. Puis (§ 2), après avoir donné une extension des coefficients binomiaux, il étudie le développement de la puissance entière et positive d'une forme aux différences du premier ordre

$$E(f_x) = f_{x+1} - a_x f_x$$

(ou, symboliquement, $E = \theta - a_x$), et, inversement, le développement de θ^m par les puissances de E. Ensuite il étend la notion de dérivation et arrive à une formule analogue à celle de Maclaurin et qui se réduit à celle-ci lorsque a_x est constante. Après une étude sur les intégrales de E^m, ou solutions de $E^m = 0$, le § 2 se termine par une application à la recherche des formules pour l'expression des puissances au moyen des factorielles. Le § 3 est relatif aux séries de puissances de θ, à leur convergence et à une espèce de *continuation* de l'opération fonctionnelle d'un champ fonctionnel à un autre, analogue à la continuation analytique des fonctions. Dans le § 4 et dernier, l'auteur applique la méthode des coefficients indéterminés au développement de E^{-1} et de F^{-1} en série de puissances de θ, ayant indiqué par F une forme linéaire en θ et d'ordre quelconque, et il cherche un champ fonctionnel où les opérations représentées par ces développements soient applicables. Enfin il trouve le développement de E^{-m}.

Arzelà (C.). — [D] Sur les fonctions de lignes. (225-244).

Ce sont les fonctions dont M. Volterra a traité pour la première fois dans les *Rendiconti dei Lincei,* 1887, fonctions qui dépendent de toutes les valeurs d'une ou de plusieurs autres fonctions. M. Arzelà commence par une nouvelle démonstration de la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une fonction (courbe) limite dans une succession donnée de fonctions continues (courbes). Puis il démontre pour les fonctions des lignes d'une variété *fermée* (c'est-à-dire telle que les courbes limites appartiennent à la variété) des théorèmes analogues à ceux qui ont lieu pour les fonctions ordinaires; en particulier, le théorème de Weierstrass sur la limite supérieure et les propriétés relatives à la continuité et à la dérivation.

Arzelà (C.). — [III *a*] Sur l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. (257-270).

Nouvelle manière de démontrer l'existence de l'intégrale d'une équation différentielle ordinaire en s'appuyant sur les propriétés démontrées dans la Note précédente (*Sur les fonctions de lignes*). L'auteur montre que la question se réduit à former une certaine succession de fonctions pour lesquelles on voit que la condition d'existence d'une fonction limite est satisfaite, et que cette fonction limite est l'intégrale cherchée. Il retrouve ainsi le résultat de M. Peano, que dans les équations du premier ordre, il suffit de supposer la continuité des seconds membres.

Saporetti (*A.*). — [V 1] Nouvelles considérations sur la métaphysique du Calcul infinitésimal. (309-322).

Pincherle (*S.*). — [J 4*g*] Sur quelques équations symboliques. (663-675).

Une *équation symbolique* a lieu entre des symboles d'opération, et exprime une propriété d'après laquelle il s'agit de déterminer l'opération inconnue. L'équation est appelée *différentielle symbolique* lorsque l'opération cherchée est liée à une ou plusieurs de ses *dérivées fonctionnelles*. Dans ce Mémoire, on donne les solutions et les propriétés de quelques-unes de ces équations différentielles symboliques.

Les opérations sont supposées distributives, et les propriétés de ces opérations sont celles qui ont été exposées par l'auteur même dans les *Rendiconti dei Lincei*, février 1895. La dérivée fonctionnelle d'une opération distributive A est l'opération A′ définie par

$$A'(\varphi) = A(t\varphi) - x A(\varphi),$$

φ étant la fonction sur laquelle porte l'opération, t la variable de φ et x celle qui entre dans le résultat de $A(\varphi)$.

En indiquant par le symbole D cette opération de dérivation et par S ou S_α celui de la *substitution*, opération qui consiste à poser dans $\varphi(t)$ une fonction donnée $\alpha(x)$ au lieu de t, l'auteur obtient, comme solutions des équations différentielles symboliques, des opérations formées linéairement par des S combinées avec les puissances de D. Ces opérations qui, dans leur expression la plus générale, sont données par

$$E = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{i,0} S_{\alpha_i} + \gamma_{i,1} S_{\alpha_i} D + \gamma_{i,2} S_{\alpha_i} D^2 + \ldots + \gamma_{i,h_i} S_{\alpha_i} D^{h_i},$$

les $\gamma_{i,j}$ et les α_i étant des fonctions analytiques de la variable x, forment un groupe ou *corps*, transformé en lui-même par l'addition, la multiplication et la dérivation fonctionnelle. L'auteur ne manque pas de relever l'analogie remarquable qu'il y a entre cette partie de la théorie des opérations fonctionnelles et la théorie ordinaire des fonctions.

Tome VI: 1896-97.

Saporetti (*A.*). — [U] Détermination des différences entre les temps moyens et vrais solaires suivant les théories exposées par Képler, réduites à une forme plus simple et plus moderne, et analytiquement développée. (47-62).

Arzelà (*C.*). — [D ref. III *a*] Sur l'existence des intégrales dans les équations différentielles ordinaires. (131-140).

En modifiant un peu la démonstration donnée dans son Mémoire : *Sulle funzioni di linee* (t. V, *voir* ci-dessus) pour une succession de fonctions, l'auteur établit la condition nécessaire et suffisante pour qu'une succession de fonctions admette une fonction limite continue, en supposant que les fonctions données ne soient pas nécessairement continues, mais qu'elles restent toujours entre deux limites finies. En appliquant cette généralisation il peut simplifier la démonstration de l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires, qu'il avait donnée dans le Mémoire : *Sull integrabilità delle equazioni differenziali ordinarie* (t. V, *voir* ci-dessus). Enfin il fait l'extension des propositions relatives aux fonctions limites pour les fonctions de deux variables.

Righi (*A.*). — [T7] Sur les ondes secondaires des diélectriques. (595-611).

Saporetti (*A.*). — [U] Nouvelle analyse sur l'existence des instants où la différence entre le temps solaire et le temps moyen devient maximum ou zéro. (613-629).

Riccardi (*P.*). — [V] Contribution des Italiens à l'histoire des Sciences mathématiques pures et appliquées. Essai bibliographique. (755-775).

ACTA MATHEMATICA.

Tome XIX, 1895.

Cousin (*P.*). — Sur les fonctions de n variables complexes. (1-62).

M. Cousin démontre, par une voie nouvelle et plus directe que la primitive, le théorème de M. Poincaré :

Si une fonction analytique de deux variables complexes n'admet à distance finie que des singularités non essentielles, elle est le quotient de deux fonctions entières.

Il établit même pour le cas d'un nombre quelconque de variables complexes, un théorème plus général que celui-là. Les raisonnements qu'il emploie conservent l'analogie avec la théorie des fonctions d'une variable : en particulier, le théorème de M. Poincare se trouve relié à des théorèmes analogues à ceux de MM. Weierstrass et Mittag-Leffler.

I. *Propositions préliminaires.* — L'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int_a^b \frac{f(z)}{z-y}\,dz$$

prise le long d'un chemin quelconque ne se traversant pas lui-même, est une fonction de y qui admet ce chemin comme coupure et s'augmente de $f(y)$ lorsque le point d'affixe y traverse la coupure (dans un sens convenable). On en déduit que, si l'on considère p chemins $c_1, c_2, \ldots, c_p$ aboutissant en un même point B et p fonctions correspondantes $f_1, f_2, \ldots, f_p$, que l'on pose

$$\varphi_h(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{c_h} \frac{f_h(z)}{z-y}\,dz,$$

$$\Phi(y) = \varphi_1(y) + \varphi_2(y) + \ldots + \varphi_p(y),$$

il existe une fonction régulière tout autour du point B et qui, dans une des régions comprise entre deux chemins c consécutifs, coïncide avec Φ, pourvu que $f_1 + f_2 + \ldots + f_p = 0$.

Les résultats ne sont, d'ailleurs, pas essentiellement modifiés si l'on suppose que les fonctions f contiennent, outre la variable y, n autres variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

II. *Démonstration d'un théorème fondamental.* — On dira que deux fonctions sont *équivalentes* dans une certaine région si leur différence est régulière dans cette région. On considère alors un certain nombre de régions $R_1, R_2, \ldots, R_p$, contiguës les unes aux autres de manière à former par leur ensemble une région unique; un pareil nombre de régions $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{R}_p$ telles que la région R_h soit entièrement intérieure à $\mathfrak{R}_h$; et, d'autre part, des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_p$, telles que chacune d'elles, définie dans la région $\mathfrak{R}$ de

même indice, soit monotrope dans cette région. On suppose de plus que, chaque fois que deux régions $\mathcal{R}$ ont une partie commune, les fonctions f correspondantes sont équivalentes dans cette partie commune. Dans ces conditions, le théorème démontré par l'auteur est le suivant : *Il existe une fonction, définie et monotrope dans la région totale et équivalente, dans chacune des régions partielles, à la fonction f qui correspond à cette région.* La démonstration, fondée sur les principes établis dans la première Partie, s'applique d'elle-même au cas où l'on étend la dénomination d'*équivalentes* à deux fonctions qui diffèrent par le logarithme d'une fonction régulière.

III. *Extension aux fonctions de n variables complexes des théorèmes de MM. Mittag-Leffler et Weierstrass. Théorème de M. Poincaré.* — Supposons actuellement qu'à chaque point d'une aire déterminée, on fasse correspondre une fonction définie et monotrope autour de ce point, avec cette condition que les fonctions ainsi définies dans des régions ayant une partie commune soient équivalentes entre elles dans cette partie commune : il existera encore une fonction, définie et monotrope dans toute l'aire considérée et équivalente, autour de chaque point, à la fonction qui correspond à ce point. Ceci est vrai, que la notion d'équivalence s'applique à des fonctions différant entre elles par une fonction régulière ou par le logarithme d'une fonction régulière. L'énoncé subsiste d'ailleurs, *mutatis mutandis,* lorsqu'on passe au cas de plusieurs variables.

Il suffit, dès lors, de faire appel au théorème connu de Weierstrass sur les fonctions de plusieurs variables qui s'annulent pour un système de valeurs de ces variables, pour arriver à l'énoncé suivant :

Si $s_1, s_2, \ldots, s_n$ sont des aires connexes finies respectivement situées dans les plans des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $S_1, S_2, \ldots, S_n$ des aires, situées respectivement dans les mêmes plans, telles que s_i soit entièrement intérieur à S_i, toute fonction qui, à l'intérieur de ($S_1, S_2, \ldots, S_n$), c'est-à-dire pour $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respectivement intérieurs à $S_1, S_2, \ldots, S_n$, *n'a que des singularités non essentielles, est, dans* ($s_1, s_2, \ldots, s_n$), *le quotient de deux fonctions régulières.*

La démonstration suppose essentiellement que s_i est entièrement intérieure à S_i (aucun point de s_i ou de son périmètre ne pouvant être situé sur le périmètre de S_i) : il est nécessaire de l'étendre au cas où s_i est confondu avec S_i. Supposant d'abord que les aires S soient circulaires, M. Cousin parvient au résultat par une marche analogue à celle que suit Weierstrass pour démontrer le théorème de M. Mittag-Leffler.

Les aires S peuvent, d'ailleurs, être indéfinies : on arrive alors au théorème de M. Poincaré.

IV. *Généralisation des théorèmes précédents.* — Cette dernière Partie traite du cas où les aires S ne sont pas circulaires. Comme les raisonnements précédents reposent uniquement sur ce que, étant donnée une fonction f des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ régulière dans un système d'aires circulaires $S_1, S_2, \ldots, S_n$, on peut trouver un polynome qui, dans tout système d'aires circulaires $s_1, s_2, \ldots, s_n$ entièrement intérieures aux premières, ait avec f une différence partout moindre en valeur absolue qu'un nombre donné ε, il suffit de généraliser ce fait au cas des aires non circulaires. On y arrive par des séries de poly-

nomes ou des fractions rationnelles analogues à celles de M. Painlevé (Thèse, Gauthier-Villars, 1887) et dont l'uniforme convergence fournit la conclusion demandée.

Wiman (*A.*). — Sur la courbe double des surfaces réglées. (63-72).

Recherche des relations qui existent entre les nombres :

n, degré (ordre et classe tout à la fois) de la surface réglée;

a, ordre du cône circonscrit d'un point quelconque, égal à la classe d'une section plane quelconque;

δ, nombre des génératrices doubles du cône circonscrit, ou des tangentes doubles de la section plane;

x, nombre des génératrices de rebroussement du cône ou des inflexions de la section;

b, ordre de la courbe double;

D, nombre des points (s'il en existe) où deux génératrices se rencontrent avec même plan tangent, et où, par conséquent, la courbe double a un point double;

t_m ($m \geqq 3$), nombre des points multiples d'ordre m de la surface;

τ, nombre des *torsales* ou génératrices le long desquelles la surface offre le caractère de développable;

ρ, classe de la développable engendrée par les plans tangents le long de la courbe double;

p, genre de la surface;

P, genre de la courbe double.

Les résultats ne sont pas mis en défaut lorsqu'il y a des génératrices de rebroussement; mais les démonstrations cessent de s'appliquer lorsqu'il y a en même temps une courbe multiple et une développable multiple, et l'on ne peut y suppléer par des considérations de continuité, parce qu'une surface de cette espèce ne peut pas toujours être considérée comme cas limite de surfaces *de même degré*.

L'auteur étudie également les cas où il y a des génératrices doubles, des lignes d'auto-contact ou d'auto-osculation; une droite directrice multiple; etc.

Selivanoff (*D.*). — Sur les expressions algébriques. (73-92).

Exposition de théorèmes et de raisonnements connus sur les équations algébriques résolubles.

Markoff (*A.*). — Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues. (93-104).

L'intégrale $\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$, où le chemin d'intégration est réel et tel que la fonction $f(y)$ y soit réelle et positive, étant développée en fraction continue, M. Markoff démontre d'une façon très simple la convergence du développement.

Partant, à cet effet, des propriétés connues de la $n^{\text{ième}}$ réduite $\frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)}$, il arrive à la formule

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy - \frac{\psi_n(z)}{\varphi_n(z)} \\ &= \int_a^b \left[\frac{1}{z-y} - \Omega(y)\right] f(y)\,dy - \sum \left[\frac{1}{z-y_i} - \Omega(y_i)\right] \frac{\psi_n(y_i)}{\varphi_n'(y_i)}, \end{aligned}\right.$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant les racines de $\varphi_n(z)$ et Ω un polynome quelconque de degré inférieur à $2n$.

Si alors on désigne par x un nombre tel que l'on ait, sur tout le chemin d'intégration

$$\operatorname{mod} \frac{y-x}{z-x} < 1$$

(et l'on constate aisément qu'il existe toujours de tels nombres si le point d'affixe z n'appartient pas à ce chemin), on pourra prendre

$$\Omega(y) = \frac{1}{z-x} + \frac{y-x}{(z-x)^2} + \ldots + \frac{(y-x)^{2n-1}}{(z-x)^{2n}} = \frac{1}{z-y} - \frac{(y-x)^{2n}}{(z-x)^{2n}(z-y)}$$

et le premier membre de la formule (1) sera de module plus petit que le produit de l'intégrale $\int_a^b f(y)\,dy$ par le maximum (infiniment petit pour n infini) du module de $\frac{(y-x)^{2n}}{(z-x)^{2n}(z-y)}$. Le raisonnement fournit, comme on le voit, une limite supérieure de l'erreur commise en s'arrêtant à une réduite quelconque, limite que l'on rend la plus petite possible en choisissant le nombre x de manière que le maximum de $\left|\frac{y-x}{z-x}\right|$ sur le chemin d'intégration soit lui-même aussi petit que possible.

Une seconde démonstration, basée sur une forme un peu plus compliquée donnée au polynome arbitraire Ω, présente l'avantage de s'appliquer, au cas où soit l'une des limites a, b, soit même toutes les deux seraient infinies. Elle conduit au théorème plus général suivant :

Si deux fonctions réelles, $f^0(y)$ et $f(y)$, d'une variable réelle y, satisfont aux inégalités $f^0(y) > f(y) > 0$ pour toutes les valeurs de y comprises entre a et $b > a$: en développant les intégrales $\int_a^b \frac{f^0(y)}{z-y}\,dy$ et $\int_a^b \frac{f(y)}{z-y}\,dy$ en fractions continues, l'erreur commise en s'arrêtant à la $n^{\text{ième}}$ réduite sera, si $z > b$, plus grande pour la première intégrale que pour la seconde.

Netto (*E.*). — Sur la théorie des déterminants orthogonaux. (105-114).

L'auteur a précédemment établi (*Acta Math.*, t. IX, p. 295-300) la proposition énoncée sans démonstration par Stieltjes : *si $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ ($\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, n$) sont les coefficients de deux substitutions orthogonales de déterminant $+1$,*

le déterminant

$$(1) \qquad |a_{\chi\lambda} \quad b_{\chi\lambda}|$$

ne peut s'annuler sans que tous ses mineurs d'ordre $n-1$ s'annulent aussi.

La nouvelle analyse qu'il présente cette fois a l'avantage de conduire à des identités algébriques mettant en évidence la proposition en question, en même temps qu'elle en fournit une généralisation.

On démontre d'abord que l'on peut ramener le cas général à celui où la seconde substitution se réduit à la substitution identique. Dans ce dernier cas, soit D le déterminant de la première substitution; Δ, le déterminant (1), c'est-à-dire, ici, le déterminant D modifié par addition de l'unité aux éléments de la diagonale principale; $\Delta_{\chi\lambda}$, $\Delta_{\chi\lambda,\chi'\lambda'}$, ..., les mineurs des divers ordres de Δ; il vient

$$\Delta_{\chi\chi}(1+D) = \Delta \qquad \Big/$$
$$\Delta_{\chi\lambda} D = -\Delta_{\lambda\chi} \quad (\lambda \neq \chi) \Big/ .$$

La première de ces identités montre que la condition $\Delta = 0$ entraîne $\Delta_{\chi\chi} = 0$ si D n'est pas égal à -1; la seconde conduit au même résultat pour $\Delta_{\chi\lambda}$ à l'aide des relations connues entre les mineurs.

Aux identités précédentes, on peut en adjoindre d'autres analogues, relatives aux mineurs des $(n-2)^{\text{ièmes}}$, $(n-3)^{\text{ièmes}}$, ... ordres, lesquelles permettent de généraliser l'énoncé de Stieltjes sous la forme suivante : *la première série de mineurs de Δ non tous nuls, résulte de la suppression d'un nombre pair de lignes et de colonnes si* $D = +1$, *et d'un nombre impair, si* $D = -1$.

Kantor (*S.*). — Nouvelle théorie des transformations univoques périodiques dans le plan. (115-194).

L'auteur a déjà obtenu les transformations en question dans un Mémoire couronné par l'Académie de Naples en 1891; il donne une nouvelle méthode pour résoudre la même question, en se fondant sur la considération des courbes qui restent invariantes par les transformations cherchées.

I. *Recherches sur les courbes invariantes dans une transformation birationnelle.* — 1. Rappel de principes connus relatifs aux transformations de cette espèce. A une telle transformation, effectuée sur une courbe C, correspond une homographie établie entre les adjointes de C et celles de sa transformée. Etude du cas où toutes les adjointes de C se décomposent, ce qui ne peut avoir lieu que dans deux cas : 1° si toutes ces adjointes ont une partie commune; 2° pour certaines courbes C hyperelliptiques.

2. Les courbes adjointes φ ayant toutes les mêmes singularités, on peut considérer leurs adjointes φ' et parler, par conséquent, du *second système adjoint* d'une courbe C, et ainsi de suite. Si une courbe C se conserve par une transformation birationnelle, il en est de même de tous ses systèmes adjoints successifs, du moins en ce qui concerne leurs intersections avec C. On peut ainsi substituer à la considération d'une courbe invariante celle de systèmes de courbes de genres de plus en plus petits, ce qui permet d'établir une classification des types possibles (mais peut-être non tous existants) de transformations. On trouve ainsi (comme formes réduites) : 1° des transformations con-

servant un système linéaire de cubiques à 4, 5, 6, 7 ou 9 points bases; 2° des transformations conservant un système linéaire de coniques (transformations de *Jonquières*); 3° des transformations conservant le système des droites du plan, autrement dit des homographies. La discussion de ces différents types est préparée par un certain nombre de propositions auxiliaires, telles que la suivante :

Toute transformation birationnelle qui transforme le système des cubiques qui ont p points communs ($4 \leqq p \leqq 9$) *a tous ses points fondamentaux parmi ces points communs.*

3. D'autre part, toute transformation birationnelle périodique admet des courbes invariantes. On obtiendra, en effet, une telle courbe en établissant une relation projective quelconque entre un point et ses $\mu - 1$ transformés (μ étant l'indice de périodicité); par exemple, si la transformation est de période 3, le lieu des points qui sont en ligne droite avec leurs transformés est manifestement une courbe invariante.

4. Application, à l'étude des transformations périodiques, de la représentation paramétrique des courbes. Calcul des courbes invariantes pour les différents types de transformations réduites.

II. *Méthode pour l'obtention des transformations périodiques existantes.* — La question se présente simplement pour les transformations de Jonquières et les transformations qui conservent les systèmes de cubiques à quatre ou cinq points communs, et l'on arrive sans difficulté aux résultats déjà obtenus dans le Mémoire précédemment cité. L'auteur n'élucide en particulier que les cas restants.

1. *Transformations conservant les cubiques à six points fixes.* — Une transformation de cette espèce peut être considérée comme l'image d'une homographie de l'espace, homographie concernant une certaine surface du troisième ordre. Une telle homographie doit être périodique et par conséquent, en la prenant sous sa forme canonique, on peut admettre qu'elle multiplie chacune des quatre coordonnées par une racine de l'unité. Il est alors bien aisé de former un Tableau des valeurs que doivent avoir ces racines, et des formes correspondantes d'équations conservées par la substitution.

2. *Cubiques à sept points fixes.* — La jacobienne du réseau des cubiques est invariante et l'on a dès lors une transformation birationnelle en elle-même de cette courbe, laquelle est du sixième ordre, mais est birationnellement équivalente à une quartique générale. On constate que la transformation ainsi opérée sur cette dernière, et qui la change en elle-même, peut être considérée comme provenant d'une homographie plane. On est donc ramené à un problème tout analogue à celui qui a été traité au paragraphe précédent : trouver les homographies qui conservent des quartiques.

3. *Cubiques à neuf points fixes.* — Le problème se ramène à l'étude d'une courbe du neuvième degré admettant une correspondance birationnelle; à son tour, cette correspondance est équivalente à une homographie plane conservant, soit 1° une courbe du sixième degré à deux points triples infiniment voisins, soit 2° une courbe du cinquième degré à deux points doubles infiniment voisins, lesquelles se recherchent par les méthodes précédemment indiquées.

Les résultats obtenus dans ces trois numéros sont, bien entendu, en accord avec ceux qui figurent dans le Mémoire cité.

4, 5, 6. *Modifications diverses des méthodes précédentes.* — En particulier, la méthode du n° 3 relative aux transformations à huit points fixes peut se remplacer par l'étude des homographies de l'espace conservant à la fois un cône quadratique et une surface cubique.

7. La méthode du n° 1 (cas de six points fixes) peut se généraliser; si l'on remarque que toute transformation périodique transforme en lui-même un système linéaire de courbes dont la dimension peut être prise aussi élevée qu'on veut, on en conclut que cette transformation peut être considérée comme image d'une homographie sur une surface tracée dans un espace d'un nombre de dimensions suffisamment grand. Si l'espace en question est l'espace ordinaire et que la surface soit représentable uniquement sur un plan, l'homographie considérée reproduit aussi une surface cubique, ou une surface du sixième ordre, ou une surface d'ordre n à droite multiple d'ordre $n-2$ (à un cas d'exception près).

8. On démontre que, pour les types de transformations périodiques véritablement existants, la surface reproduite appartient bien à l'espace ordinaire et est représentable sur le plan.

9, 10, 11. Recherche des homographies qui transforment en elles-mêmes les surfaces énumérées au n° 7, homographies auxquelles on est conduit par les conclusions des n°s 7-8.

12. L'auteur étudie en elles-mêmes les transformations qui conservent un système linéaire de cubiques, classe à laquelle appartiennent celles qui ont fait l'objet des numéros précédents. Le problème se divise en deux autres :

« I. Étant donné un faisceau de cubiques, déterminer sur chaque courbe une correspondance, telle que le résultat soit une transformation de plan à plan conservant toutes les courbes. »

« II. Établir, dans un faisceau de cubiques, une homographie et, entre les courbes ainsi transformées les unes dans les autres, une correspondance point par point, telle que la répétition de la transformation ainsi obtenue conduise à une des transformations considérées en I. »

Plus généralement, on peut se proposer d'étudier les transformations qui conservent un faisceau de courbes d'ordre $3s$ à neuf points communs multiples d'ordre s.

13. Enfin, à une transformation birationnelle périodique dans l'espace d'un nombre quelconque de dimensions, on peut substituer, par une substitution *simplement rationnelle* convenablement choisie, une homographie ayant la même période.

Vahlen (*K.-Th.*). — Sur les binomes réductibles. (195-198).

On connaît l'importante proposition d'Abel, d'après laquelle une équation binome de degré premier ne peut être réductible sans admettre une racine rationnelle.

M. Vahlen recherche dans quelles conditions la réductibilité se produit si le degré cesse d'être premier. Il trouve que les binomes réductibles se déduisent, par la substitution $z \left| \frac{z^n}{c} \right.$ (où c est un nombre rationnel) soit du binome $z^m - 1$, soit du binome $z^4 + 4$ déjà signalé par Sophie Germain.

Vahlen (*K.-Th.*). — Sur la surface de Steiner. (199-200).

Démonstration simple de ce fait que tout plan tangent coupe la surface suivant un système de deux coniques.

Lecornu (*L.*). — Mémoire sur le pendule de longueur variable. (201-250).

L'auteur traite le cas où la longueur du pendule varie proportionnellement au temps.

I. L'équation du mouvement est

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dl}{dt}\frac{d\theta}{dt} + g\sin\theta = 0,$$

où l devra être remplacé par la longueur variable, soit, dans l'hypothèse en question, $l = a + bt$. Elle peut alors s'écrire, en prenant l comme variable indépendante,

$$l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{b^2}\sin\theta = 0.$$

II. Pour les oscillations très petites, l'équation précédente devient

$$(1) \qquad l\frac{d^2\theta}{dl^2} + 2\frac{d\theta}{dl} + \frac{g}{b^2}\theta = 0$$

ou, en posant $\theta l = u$, $l = \frac{b^2}{g}x$,

$$(2) \qquad x\frac{d^2u}{dx^2} + u = 0.$$

L'intégration de cette équation dépend des fonctions de Bessel. Une solution particulière est

$$\xi = x - \frac{2x^2}{(2!)^2} + \frac{3x^3}{(3!)^2} - \frac{4x^4}{(4!)^2} + \ldots = \sqrt{x}\,J_1(2\sqrt{x}).$$

Pour que le mouvement soit représenté par cette solution, il faut et il suffit que la vitesse d'allongement b soit liée à la longueur l qui correspond à une élongation par la relation

$$(3) \qquad l = \frac{b^2}{g}\xi,$$

où ξ est une racine de l'équation

$$\frac{1}{(2!)^2} - \frac{2.3x}{(3!)^2} + \frac{3.4x^2}{(4!)^2} - \ldots = J_2(2\sqrt{x}) = 0;$$

et réciproquement, dans ce cas, en remplaçant, dans la relation (3), ξ par les racines successives de cette équation, on trouve les longueurs correspondant aux élongations successives. Lorsque la longueur tend vers zéro, l'amplitude des oscillations s'exagère; toutefois le rapport de cette amplitude à l'amplitude initiale reste fini, de sorte que l'équation des petites oscillations cesse en général d'être applicable, mais le reste cependant lorsque les oscillations primitives étaient extrêmement faibles.

La solution générale u se déduit, par la méthode connue, de la solution particulière φ; comme les zéros de u et de φ alternent, on voit que les passages à la position d'équilibre, dans un mouvement quelconque, sont séparés par la position où la longueur du pendule est mesurée par $l = \frac{b^2}{4g} z^2$, z étant une racine de l'équation $J_1(z) = 0$.

Lorsque le mouvement n'est plus représenté par la solution particulière φ, l'écart θ, supposé donné par l'équation des oscillations infiniment petites, augmenterait *indéfiniment* lorsque la longueur l tendrait vers zéro $\left[\text{on trouve, comme expression asymptotique, } \theta = k \sin \alpha \left(\frac{b^2}{4gl} + \frac{1}{4} \log \frac{b^2}{gl} \right) \right]$; donc cette équation n'est assurément pas applicable dans le voisinage de $l = 0$.

Si, au contraire, on suppose que le pendule s'allonge beaucoup, la théorie des fonctions de Bessel permet de prévoir quelle sera l'allure du mouvement; on a l'équation approchée

$$(4) \qquad u = x^{\frac{1}{2}} \left[A \cos(2\sqrt{x}) + B \sin(2\sqrt{x}) \right].$$

L'intervalle de temps qui s'écoule entre un passage par la verticale et l'élongation suivante est sensiblement égal à

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} - 0,13 \frac{b}{g}$$

(l étant la longueur au moment du passage à la verticale) et la différence d'amplitude est sensiblement $\frac{3}{4} \pi \sqrt{\frac{b}{gl}}$.

La formule précédente peut servir à exprimer θ en fonction de t. Mais on peut procéder d'une façon plus rigoureuse en posant $\sqrt{\frac{g}{a}} = \gamma$, $\frac{b}{\sqrt{ga}} = p$ $\left[\text{ce qui donne à l'équation la forme } (1 + p\gamma t) \frac{d^2 u}{dt^2} + \gamma^2 u = 0\right]$ et cherchant à développer la solution suivant les puissances de la quantité p (laquelle est très petite pour les grandes longueurs du pendule). On trouve ainsi, par exemple, que la durée de l'oscillation (temps qui sépare deux passages consécutifs à la position verticale) est un peu plus petite que celle qui correspond à un pendule ayant pour longueur la moyenne des longueurs aux deux passages; la différence est sensiblement $6,47 \frac{b^2}{g\sqrt{ag}}$ (a, longueur au premier passage).

III. Lorsque les amplitudes ne sont plus très petites, le problème ne semble pas abordable. L'auteur examine deux cas limites :

1° Le pendule se raccourcit très vite, de sorte que le rapport $\frac{g}{b} = s$ a une très petite valeur; en développant suivant les puissances de s, on trouve, tant que la longueur n'est pas très petite,

$$\theta = \alpha - \frac{s \sin \alpha}{2z} + z_0 s^2 \left[\frac{s \sin \alpha}{12} \left[1 - \frac{z - z_0 (z^2 - 3zz_0 - 2z_0^2)}{2z} - 3z_0^2 \log \frac{z}{z_0} \right] \cdots \right.$$

$$\left(z = \frac{a}{b} - t \right).$$

et, en négligeant s^2, l'équation polaire de la trajectoire de l'extrémité du pendule est de la forme $\theta = A + Bt + \frac{C}{t}$;

2° La longueur varie très lentement; on emploie la méthode de la variation des constantes en partant du mouvement du pendule ordinaire comme première approximation, et l'on développe suivant les puissances du module les fonctions elliptiques qui figurent dans l'équation de ce mouvement.

IV. *Pendule conique.* — Les équations sont

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} - 2b \frac{d\theta}{dt} + g \sin\theta - \frac{c^2 \cos\theta}{l \sin^3\theta} = 0$$

ou

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2d\theta}{dt} + \frac{g}{b^2} \sin\theta - \frac{c^2 \cos\theta}{b^2 l \sin^3\theta} = 0$$

avec

$$l^2 \sin^2\theta \frac{d\varphi}{dt} = c.$$

L'auteur se borne aux oscillations infiniment petites, lesquelles peuvent s'obtenir en composant les mouvements de deux pendules plans, tels qu'ils ont été étudiés dans la seconde partie.

Liouville (*R*). — Sur les équations de la Dynamique. (251-284).

Étude de certaines catégories d'intégrales quadratiques, en relation avec le problème de la conservation des trajectoires.

1. L'auteur commence par le cas où la constante des forces vives est donnée, de sorte que le problème se ramène à une recherche de géodésiques (trajectoires de systèmes sans forces accélératrices). Soient, dans ces conditions,

$$(1) \qquad \sum_{(i,k)} e_{i,k} \frac{d^2 x_k}{dt^2} - \sum_{(h,k)} \left(\frac{de_{i,k'}}{dx_h} - \frac{1}{2} \frac{de_{h,k}}{dx_i} \right) \frac{dx_h}{dt} \frac{dx_{k'}}{dt} = 0$$

les équations du mouvement ($2T = \Sigma e_{ik} x'_i x'_k$ étant la force vive).

Considérons le système

$$(2) \qquad \begin{cases} dz - \sum_h z^h \, dx_h = 0, \\ dz^{(i)} + \sum_{h,k} p_{i,k}^{(h)} z^{(i)} \, dx_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \end{cases}$$

(les p étant des fonctions des x), et proposons nous d'établir, entre les x, $m-1$ relations telles que si, dans ces conditions, on élimine les inconnues $z_1, z_2, \ldots, z_m$, on obtienne pour la dernière inconnue z, une équation du second ordre. On trouve que cela aura lieu si l'on a, quels que soient les indices h et h',

$$(3)\qquad \frac{d^2x_h - \sum_{i,k} p_{ik}^{h}\, dx_i\, dx_k}{dx_h} = \frac{d^2x_{h'} - \sum_{i,k} p_{ik}^{(h')}\, dx_i\, dx_k}{dx_{h'}},$$

la valeur commune de ces rapports sera alors celle de $\frac{d^2z}{dz}$.

Or, les équations ainsi obtenues coïncident avec les équations (1), (z représentant la variable t), pourvu que les fonctions $p_{ik}^{(h)}$ soient convenablement choisies. Elles sont d'ailleurs plus générales que les équations (1) : si l'on choisit au hasard les fonctions p, on n'aura pas un système appartenant à la catégorie des équations de la Dynamique : ce sont ces systèmes plus généraux que M. Liouville nomme systèmes d'équations *de même aspect* que les équations (1). Si les équations (3) sont seules données, on peut, pour achever de déterminer les p, se donner une condition supplémentaire, à savoir qu'il existe une fonction δ dont les dérivées partielles soient

$$(4)\qquad \frac{d\log\delta}{dx_k} = -\sum_{(i)} p_{ik}^{i}.$$

Le système linéaire (2) est dit *associé* au système (1). Le discriminant de la forme T est proportionnel à δ^2.

2. La différentiation des équations (2) fournit des équations d'ordre supérieur qui peuvent servir à trouver des invariants des équations de la Dynamique et des équations de même aspect.

3. Lorsqu'il s'agit d'un problème de Dynamique proprement dit, le système linéaire associé admet une intégrale quadratique, et son système adjoint

$$(2')\qquad dq_i - \sum_{(h,k)} p_{hk}^{i}\, q_h\, dx_k = 0$$

admet l'intégrale quadratique

$$(5)\qquad dq_i - \sum_{(h,h')} e_{h,h'}\, q_h q_{h'} = \text{const.},$$

quelles que soient les relations établies entre les x_i.

Moyennant une transformation simple, le système (3) est changé en un autre tout analogue, mais où les coefficients $p_{ik}^{(h)}$ sont remplacés par d'autres $b_{ik}^{(h)}$ vérifiant, non plus les équations (4), mais les équations

$$(6)\qquad \sum_{(i)} b_{ik}^{i} = 0.$$

Si d'ailleurs E_{ik} désigne le mineur du discriminant de la forme 2T relatif à l'élément e_{ik}, à ces quantités E correspondent de nouvelles quantités f_{ik}, don-

nées par

$$f_{ik} = E_{ik}\,\delta^{\frac{2}{m-1}},$$

et qui vérifient le système linéaire aux dérivées partielles

$$(7)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f_{ii}}{\partial x_i} = 2\sum\limits_h b'_{h,i} f_{i,h} & (i = i' = i), \\[2ex] \dfrac{\partial f_{ik}}{\partial x_i} = \sum\limits_h \left[b^{k}_{h,i} f_{i,h} + b'_{h,i} f_{h,k} \right] & (i \neq i' \neq k), \\[2ex] \dfrac{\partial f_{ii}}{\partial x_i} - 2\dfrac{\partial f_{ik}}{\partial x_k} = 2\sum\limits_h \left[b'_{i,h} f_{i,h} - b^{k}_{k,h} f_{i,h} - b^{i}_{h,k} f_{h,k} \right] \end{cases}$$

composé de $\dfrac{m(m-1)(m+2)}{2}$ équations, lesquelles, ainsi que les équations (6), sont indépendantes de δ. L'existence de fonctions f vérifiant le système (7) est une condition pour que le système linéaire (2) soit associé à un problème de Dynamique.

Supposons maintenant que le système (7) admette, non pas une, mais deux solutions distinctes. Alors le système analogue à (2), déduit des coefficients b, admet deux intégrales quadratiques, et aussi le système (3) correspondant.

Mais le système (7), étant linéaire, admet, dans l'hypothèse actuelle, une infinité de solutions dépendant d'une constante arbitraire c (les combinaisons linéaires des deux premières). Si l'on forme l'intégrale quadratique des équations (3) correspondant à cette solution générale, on voit que c y figure au degré $m-1$.

Donc les équations de la Dynamique admettent, dans ce cas, $m-1$ intégrales quadratiques, distinctes de celle des forces vives.

De plus, au même système des b correspondent plusieurs systèmes des p et, par conséquent, *plusieurs mouvements qui se correspondent avec conservation des trajectoires.* Il peut même arriver que la loi de variation de t soit elle-même conservée, dans cette correspondance.

4. Les intégrales quadratiques considérées ci-dessus présentent un caractère tout spécial, à savoir que le système linéaire (2′) adjoint au système associé admet une intégrale quadratique, quelles que soient les relations établies entre les x.

Le système (2′) peut-il admettre des intégrales d'ordre supérieur et indépendantes des relations entre les x?

Un théorème de M. Darboux montre que si l'on a une pareille intégrale R, tout covariant de R est aussi une intégrale. Comme, parmi ces covariants, il y en a toujours de linéaires ou de quadratiques, on est ramené aux cas qui viennent d'être étudiés, sauf dans la circonstance exceptionnelle où ces covariants sont, soit nuls, soit fonctions de R.

5. Quelques cas de conservation des trajectoires.

6. Si l'on envisage un système de variations virtuelles des quantités x_i, z,

$z^{(h)}$ et que l'on considère ces variations comme de nouvelles inconnues adjointes aux premières, les systèmes d'équations différentielles auxquelles on parvient, ont une forme entièrement semblable à celle des systèmes primitifs, avec un nombre de variables double (la moitié des variables n'entrant qu'au premier degré dans les coefficients).

7. Si un problème de dynamique admet l'intégrale rationnelle $\frac{R}{S}$, on peut lui faire correspondre un système de même aspect possédant l'intégrale entière R.

8. L'auteur considère le cas où il n'y a pas d'intégrale des forces vives, ou bien où (s'il en existe une) la constante des forces vives reste arbitraire. Il introduit l'inconnue auxiliaire $x_{m+1} = t$ et réussit, par ce moyen, à former encore le système linéaire (de même forme que précédemment) associé au système donné.

S'il y a un mouvement correspondant avec conservation des trajectoires, un calcul analogue à celui qui a été présenté précédemment prouve qu'il existe une intégrale quadratique. C'est le théorème énoncé par M. Painlevé pour les équations de la Dynamique, mais qui s'étend aux équations de même aspect.

Goursat (*E.*). — Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre et sur la théorie des intégrales intermédiaires. (285-340).

I. Rappel des résultats relatifs au premier ordre, en ce qui concerne le problème de Cauchy et la définition des caractéristiques qui en résulte. Une marche tout analogue peut être suivie en ce qui concerne les équations du second ordre quelconques $F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$. Si, en effet, on se donne une suite de valeurs (dépendant d'un paramètre) de x, y, z, p, q et qu'on essaye de déterminer une surface intégrale contenant les éléments de contact ainsi donnés (problème de Cauchy), on constate que r, s, t sont donnés par des équations dont le déterminant fonctionnel est

$$T\,dx^2 - 2S\,dx\,dy + R\,dy^2 \qquad \left(R = \frac{\partial F}{\partial r},\ S = \frac{\partial F}{\partial s},\ T = \frac{\partial F}{\partial t}\right),$$

où les différentielles dx, dy se rapportent à la suite donnée, et que les dérivées suivantes sont fournies par des équations linéaires dont le déterminant est une puissance du premier. Si donc, sur les éléments de contact donnés, $T\,dx^2 - 2S\,dx\,dy + R\,dy^2$ est $\neq 0$, il y aura une seule surface intégrale; sinon, le problème pourra être impossible (du moins si l'on demande une solution régulière dans le voisinage des points donnés) ou indéterminé. Dans la seconde hypothèse, on a nécessairement deux nouvelles équations différentielles qui, avec les premières, définissent les *caractéristiques* (en laissant néanmoins une fonction inconnue arbitraire). Toute surface intégrale est un lieu de caractéristiques.

Mais deux cas sont à distinguer : l'indétermination peut commencer dès le calcul des dérivées du second ordre, de sorte que deux surfaces intégrales peuvent avoir un contact du premier ordre seulement le long de la carac-

téristique; cette sorte de caractéristiques, dite *caractéristiques du premier ordre*, se présente lorsque l'équation $F = 0$, où r, s, t sont considérées comme des coordonnées cartésiennes, représente une surface Σ ayant des génératrices rectilignes parallèles à celles du cône (T) ($rt - s^2 = 0$), et alors seulement. Dans le cas général, au contraire (*caractéristiques du second ordre*) l'indétermination ne commence qu'aux dérivées troisièmes. Quatre espèces d'équations sont donc à distinguer : 1° les équations de Monge-Ampère, caractérisées par l'existence de deux systèmes distincts de caractéristiques du premier ordre; 2° les équations à caractéristiques confondues et du premier ordre; 3° les équations à caractéristiques du premier ordre dans un système, du second ordre dans l'autre; 4° les équations générales à caractéristiques (distinctes ou non) toutes du second ordre. La considération de la surface Σ permet de distinguer sans difficulté ces différents cas.

II. Propriétés des éléments de contact de Lie et généralisation de la notion d'intégrale. Application à certaines catégories d'équations intégrables.

III. Ce qui précède montre immédiatement qu'une équation du second ordre n'admet d'intégrale intermédiaire

$$V(x, y, z, p, q) = 0$$

que dans le cas où elle admet des caractéristiques du premier ordre, puisqu'on sait que l'équation $V = 0$ admet des surfaces intégrales ayant entre elles un contact du premier ordre seulement le long d'une de ses caractéristiques.

Supposons qu'il existe des caractéristiques du premier ordre, passant par tout élément, c'est-à-dire que Σ soit, quels que soient x, y, z, p, q, une surface réglée ayant ses génératrices parallèles à celles de (T).

Si, dans les deux équations qui définissent les caractéristiques du premier ordre, nous remplaçons les différentielles dx, dy, dp, dq respectivement par $\frac{\partial V}{\partial p}$, $\frac{\partial V}{\partial q}$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, $-\left(\frac{\partial V}{\partial y} + q\frac{\partial V}{\partial z}\right)$, nous obtiendrons les deux équations qui déterminent la fonction V.

Dans le cas des équations d'Ampère, on obtient deux équations linéaires et, si l'on connaît deux intégrales intermédiaires V_1, V_2, on connaît une intégrale intermédiaire dépendant d'une fonction arbitraire. Dans le cas général, il faut, pour arriver au même résultat, avoir formé une intégrale intermédiaire dépendant de deux constantes arbitraires; on applique alors la méthode de la variation des constantes.

IV. *Cas où les deux équations qui déterminent* V *sont en involution.* — Pour obtenir l'équation du second ordre la plus générale pour laquelle cette circonstance se rencontre, on prendra (dans l'espace rapporté aux coordonnées r, s, t) l'enveloppe du plan mobile

$$r - s\,m - t\,m^2 - \psi(x, y, z, p, q, m) = 0,$$

par rapport au paramètre variable m; la fonction ψ n'est pas quelconque, mais satisfait à une certaine équation du second ordre aux variables indépendantes x, y, z, p, q, m.

Soit alors

$$(1) \qquad V(x, y, z, p, q, a, b) = 0,$$

une intégrale intermédiaire contenant deux constantes arbitraires.

L'équation $V = 0$, du premier ordre en z, admet une intégrale complète définie par l'adjonction des deux équations

$$\frac{\partial V}{\partial a} = \alpha, \qquad \frac{\partial V}{\partial b} = \beta,$$

de sorte que, une fois connue l'intégrale intermédiaire en question, on peut arriver à l'intégration *complète* de l'équation du second ordre. L'intégrale générale est représentée par un système de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \Phi[x, y, z, a, \pi(a), \pi'(a), \chi(a)] = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial a} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi(a)} \pi'(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \pi'(a)} \pi''(a) + \dfrac{\partial \Phi}{\partial \chi(a)} \chi'(a) = 0, \end{cases}$$

(où π et χ sont fonctions arbitraires du paramètre variable a).

L'équation en ψ paraît difficilement intégrable. Un exemple simple d'équations appartenant à la catégorie considérée est fourni par le cas où ψ ne dépend que de m. L'intégrale intermédiaire (1) est alors de la forme

$$V = z + ax + by + G(p + a, q + b) = 0,$$

(G étant homogène quadratique).

Dans l'intégrale (2), la fonction Φ n'est pas quelconque, car il est aisé de constater qu'en général l'élimination des fonctions arbitraires dans le système (2) ne conduit pas à une équation aux dérivées partielles du second ordre pour z. On trouve que la première équation (2), résolue par rapport à z

$$z = F(x, y, a, \pi, \pi', \chi),$$

doit être telle que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial F}{\partial a} + \dfrac{\partial F}{\partial \pi} \pi'}{\dfrac{\partial F}{\partial \chi}} = \varphi\left(\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \pi'}}{\dfrac{\partial F}{\partial \chi}}, a, \pi, \pi', \chi\right),$$

φ ne contenant ni x ni y.

Störmer (C.). — Sur une généralisation de la formule

$$\frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \ldots$$

(34 1-350).

Si $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont assujettis à l'inégalité

$$(1) \qquad \Sigma|\varphi| + \Sigma|\alpha| = \pi,$$

on a

$$\frac{\varphi_1\varphi_2\ldots\varphi_n}{2^n} = \frac{\sin\varphi_1}{1}\,\frac{\sin\varphi_2}{1}\ldots\frac{\sin\varphi_n}{1}\cos\alpha_1\cos\alpha_2\ldots\cos\alpha_n$$

$$-\prod_{h=1}^{n}\frac{\sin 2\varphi_h}{2}\prod_{i=1}^{m}\cos 2\alpha_i$$

$$-\prod_{h=1}^{n}\frac{\sin 3\varphi_h}{3}\prod_{i=1}^{m}\cos 3\alpha_i$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démontration par induction mathématique. On a ainsi un développement du premier membre, considéré comme fonction de φ_1, avec une infinité de valeurs pour les coefficients, ce qui n'a rien d'étonnant, puisque l'intervalle de variation de φ_1 est *inférieur* à 2π.

On peut se proposer de déterminer la valeur de la série du second membre pour les valeurs des φ qui ne satisfont pas à l'inégalité (1). Le raisonnement direct donne bien aisément la solution dans chaque cas particulier, mais ne permet d'apercevoir aucune loi générale. Au contraire, la méthode fondée sur la transformation des produits de ligne trigonométrique en sommes, ramène le problème à la sommation des séries $\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda-1}\frac{\sin\lambda\varphi}{\lambda^{p-1}}$ et $\sum_{\lambda}(-1)^{\lambda-1}\frac{\cos\lambda\varphi}{\lambda^{p}}$, dont la valeur peut être exprimée au moyen de l'argument $[\varphi]$, défini comme congru à $\varphi \pmod{2\pi}$ et compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

Hurwitz (A.). — Sur le nombre des classes de formes quadratiques binaires de déterminant négatif. (351-384).

Soit $h(D)$ le nombre des classes de formes de déterminant négatif $-D$: partant des expressions données pour ce nombre par Dirichlet, l'auteur démontre les énoncés suivants :

1° Soit

$$\operatorname{tang} x = \alpha_1 x - \frac{\alpha_3 x^3}{3!} - \ldots + \alpha_{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \ldots$$

le développement de $\operatorname{tang} x$ suivant les puissances de x. Si p est un nombre premier $\equiv 3 \pmod 4$, $h(p)$ est le plus petit reste positif $\pmod p$ du nombre

$$(-1)^{\frac{p-1}{4}}\frac{1}{2}\alpha_{\frac{p+1}{2}}.$$

2° Soit

$$\frac{1}{\cos x} = \beta_0 + \beta_1\frac{x^2}{2!} - \ldots + \beta_{2n}\frac{x^{2n}}{(2n)!} - \ldots$$

le développement de $\frac{1}{\cos x}$. Si p est un nombre premier $\equiv 1 \pmod 4$, $h(p)$ est le reste positif $\pmod 4$ de $(-1)^{\frac{p-1}{4}}\frac{1}{2}\beta_{\frac{p-1}{2}}$.

3. Résultats de nature analogue pour $h(2p)$, déduits des développements de $\frac{\sin x}{\cos 2x}$ et de $\frac{\cos x}{\cos 2x}$, lesquels sont, comme les précédents, à coefficients tous entiers positifs.

La démonstration utilise les notions de nombres fractionnaires finis suivant un module, de nombres fractionnaires congrus entre eux suivant un module; de séries de Maclaurin finies, et de séries de Maclaurin congrues entre elles suivant un module. Dans cette notation, on a, par exemple,

$$\frac{1}{\cos x} \equiv (1 - \cos x) \pmod 3,$$

congruence qui exprime que le coefficient β_n ($n^{\text{ième}}$ nombre d'Euler) est congru à -1 ou à $+1$ (mod 3), suivant que n est pair ou impair. De même la congruence

$$\frac{x}{\cos x} \equiv \sin x \pmod 4$$

exprime que tous les nombres d'Euler sont $\equiv 1 \pmod 4$, etc.

Soit maintenant $p' = \frac{p-1}{2}$ (p premier); la congruence

$$\left(\frac{s}{p}\right) \equiv s^{p'} \pmod p$$

permet de remplacer, dans les expressions données pour $h(p)$ par Dirichlet, les symboles de Legendre par des puissances : la somme de ces dernières représente, pour $p \equiv 4n+3$, le coefficient de $(-1)^{\frac{p'-1}{2}} \frac{x^{p'}}{p'!}$ dans le développement de la fonction

$$\varphi(x) = \sum_1^{p'} \sin sx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{px}{2}}{2\sin\frac{x}{2}},$$

et, pour $p = 4n+1$, le coefficient de $(-1)^{\frac{p'}{2}} \frac{x^{p'}}{p'!}$ dans la fonction

$$\psi(x) = \sum 2\cos sx = -1 + \frac{\sin\frac{p'+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Mais, à leur tour, les fonctions $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sont congrues (mod p) à des fonctions indépendantes de p, ce qui permet d'arriver au résultat annoncé.

Après avoir établi les théorèmes analogues pour $h(2p)$, l'auteur passe à l'étude de $h(pq)$ et de $h(2pq)$, p étant encore premier, mais q étant assujetti à la seule condition de n'être divisible ni par 2, ni par p, ni par un carré. Une méthode analogue à celle qui convient au cas de $q = 1$ donne, pour le nombre cherché, des congruences suivant le module p, congruences qui, malheureusement, ne suffisent plus à la détermination complète, sauf les cas (par exemple $q = 3$) où l'on sait que le nombre en question est plus petit que p.

Enfin, les recherches précédentes se complètent par celle des restes que

donnent les nombres $h(P)$ par rapport aux puissances de 2. La théorie des genres montre aisément que, si λ est le nombre des facteurs premiers de P, le nombre $h(P)$ est divisible, suivant le cas, par 2^{λ} ou par $2^{\lambda-1}$. Le quotient représente le nombre de classes de formes de déterminant — P comprises dans chacun des genres correspondant à ce déterminant. De plus, la parité de ce quotient peut se déterminer simplement lorsque λ est égal à 1 ou à 2. En combinant les résultats ainsi obtenus avec les résultats antérieurs, on peut assigner le reste de $h(pq)$ suivant le module $2p$ ou $4p$, ce qui détermine $h(pq)$ dans une série de nouveaux cas correspondant à $q = 5$.

Meyer (*Fr.*). — Sur la structure des discriminants et des résultants des formes binaires. (385-395).

Soit

$$f_m(\lambda, 1) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_m\lambda^m$$

un polynome quelconque, dont nous diviserons les termes en deux groupes, en posant

$$\varphi_k(\lambda, 1) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_k\lambda^k,$$
$$\psi_{m-k}(\lambda, 1) = a_k + a_{k+1}\lambda + \ldots + a_m\lambda^{m-k}.$$

φ_k sera une *forme partielle* de f, ψ_{m-k} la *forme partielle adjointe* (Nebentheilform) correspondante.

Si l'on assigne aux k premiers coefficients de f_m les *poids* respectifs k, $k-1$, ..., 1, aux autres le poids 0, l'ensemble des termes de moindre poids dans le discriminant de f_m sera

$$(-1)^{k(m-k)} a_k^2 D_k D^{(m-k)},$$

où D_k est le discriminant de φ_k, $D^{(m-k)}$ celui de ψ_{m-k}.

Pour le démontrer, on suppose les k premiers coefficients multipliés respectivement par ε^k, ε^{k-1}, ..., ε; de sorte que, dans le discriminant du polynome ainsi modifié, le coefficient de la plus basse puissance de ε représente l'ensemble de termes cherché.

Les valeurs que prennent alors les racines du polynome peuvent se développer suivant les puissances croissantes de ε et commencent respectivement, les unes par les termes

$$\varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \ldots, \varepsilon\alpha_k,$$

les autres par les termes

$$\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_m,$$

où α_i représente successivement : pour $i \leqq k$, les racines de φ_k; pour $i > k$, les racines de ψ_{m-k}.

Dès lors, il suffit de remplacer le discriminant par son expression en fonction des racines pour arriver au résultat annoncé.

Une proposition tout analogue s'applique au résultant de deux formes.

J. Hadamard.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

1er semestre 1896.

Frobenius (*G.*). — Sur les transformations cogrédientes des formes bilinéaires. (7-16).

1. Deux faisceaux de formes bilinéaires

$$A = uA_1 + vA_2,$$
$$B = uB_1 + vB_2,$$

sont *équivalents*, lorsque $x_1, x_2, \ldots, x_r, y_1, y_2, \ldots, y_s$ désignant les deux systèmes de variables dont dépendent les formes bilinéaires A_1, A_2, B_1, B_2, chacun des deux faisceaux A et B peut être transformé dans l'autre par des substitutions linéaires, indépendantes des indéterminées u et v.

Si P et Q désignent des substitutions linéaires transformant A en B, la substitution P affectant les variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$ tandis que la substitution Q affecte les variables $y_1, y_2, \ldots, y_s$, et si les déterminants de ces substitutions sont différents de zéro, B sera transformé en A par les substitutions P^{-1}, Q^{-1}.

Si l'on range les coefficients du faisceau A en r lignes et s colonnes correspondant respectivement aux r variables x et aux s variables y, et que l'on forme le plus grand commun diviseur de tous les déterminants d'un degré quelconque k ne dépassant pas le plus petit des deux nombres r, s, on obtient un *invariant* du faisceau A; nous le désignerons par $\mathfrak{I}_k$.

En se limitant au cas où les deux nombres r et s sont égaux et où le déterminant du faisceau A n'est pas nul identiquement, Weierstrass a montré (*Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, 1868) que, quand la suite des invariants $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3, \ldots$ du faisceau A coïncide avec la suite des invariants $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3, \ldots$ du faisceau B, les deux faisceaux sont équivalents.

D'autre part, Kronecker a étudié (*Sitzungsberichte*, 1890, 2e semestre) les faisceaux de formes bilinéaires à déterminant *nul*, dans le cas où les deux nombres r et s sont égaux, et aussi les faisceaux de formes bilinéaires à déterminant quelconque dans le cas où les deux nombres r et s sont inégaux; il a obtenu, dans ces deux cas, le système complet des invariants des faisceaux envisagés en adjoignant aux invariants $\mathfrak{I}_1, \mathfrak{I}_2, \mathfrak{I}_3, \ldots$ certains nombres dont le mode de formation a été expliqué dans le compte rendu de son Mémoire (voir *Bulletin*, 1895, p. 113). Après avoir introduit la notion de faisceau *réduit*, il montre que deux faisceaux de formes quadratiques ayant même système complet d'invariants peuvent être transformés en un même faisceau réduit.

Lorsque deux faisceaux équivalents de formes bilinéaires A et B sont tous deux symétriques, ou tous deux alternés, ou que A_1 et B_1 désignent des formes symétriques, A_2 et B_2 des formes alternées, et lorsqu'en outre les deux entiers r et s sont égaux, le cas où les coefficients des deux substitutions linéaires P et Q sont identiques est particulièrement intéressant. On dit alors souvent que les deux substitutions P et Q sont *congrues;* M. Frobenius les appelle *cogrédientes.*

Il est manifeste que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence, dans le sens général du mot, de deux faisceaux A et B, sont des conditions nécessaires pour l'équivalence de ces deux faisceaux, dans le sens plus restreint que nous venons de préciser. Il est par contre loin d'être manifeste que ces conditions sont suffisantes; elles le sont cependant et c'est là un des résultats les plus curieux de la théorie des formes bilinéaires.

On est si loin de s'y attendre, que, même après l'avoir établi, on éprouve le besoin d'en rechercher les raisons cachées. C'est cette recherche qui fait l'objet principal du Mémoire de M. Frobenius.

Il se trouve que quand on connaît deux substitutions P et Q à déterminants différents de zéro, qui transforment une forme symétrique A en une forme symétrique B, ou une forme alternée A en une forme alternée B, on peut déduire de ces deux substitutions P et Q une substitution R qui, appliquée à chacun des deux systèmes de variables $x_1, x_2, \ldots$ et $y_1, y_2, \ldots$, transforme A en B. On peut d'ailleurs former la substitution cogrédiente R au moyen des substitutions P et Q sans connaître les formes envisagées A et B.

M. Frobenius est parvenu à ce résultat en formant d'abord un certain ensemble de substitutions U, V transformant la forme bilinéaire A en elle-même; parmi les substitutions

$$X = PU, \qquad Y = VQ$$

obtenues en envisageant successivement tous les couples U, V de cet ensemble et en les composant avec les substitutions connues P, Q, *il y en a toujours un nombre fini qui sont cogrédientes.*

On peut d'ailleurs (*Journal de Crelle,* t. 86) obtenir des substitutions P et Q à déterminants différents de zéro, qui transforment la forme ou le faisceau de formes A en la forme ou le faisceau de formes B par des opérations *rationnelles* effectuées sur les coefficients de A et de B. La détermination des substitutions cogrédientes R au moyen de ces substitutions P et Q exige que l'on résolve un certain nombre d'équations algébriques; on ne peut éviter cette résolution d'équations algébriques, car elle est dans la nature des choses, mais, dans la méthode de M. Frobenius, elle est renvoyée tout à la fin des calculs, ce qui constitue un avantage précieux.

2. M. Frobenius commence par démontrer le théorème fondamental que voici :

« Si l'on envisage deux formes bilinéaires quelconques

$$A = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

$$B = \sum b_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta,$$

à déterminants $|a_{\alpha\beta}|$ et $|b_{\alpha\beta}|$ différents de zéro, il existe toujours un couple de substitutions linéaires

$$x_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta} x'_\beta,$$

$$y_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta} y'_\beta,$$

qui transforme A en B ».

En appliquant ce théorème au cas où les formes A et B sont toutes deux symétriques, et plus particulièrement au cas où ces formes sont quadratiques, on obtient le résultat suivant :

« Toute forme quadratique

$$A = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta \quad \text{où} \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$$

à déterminant $|a_{\alpha\beta}|$ différent de zéro, peut être transformée en une forme quadratique

$$B = \sum b_{\alpha\beta} x'_\alpha x'_\beta, \quad \text{où} \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha},$$

à déterminant $|b_{\alpha\beta}|$ différent de zéro, par une substitution linéaire de la forme

$$x_\alpha = \sum_\beta p_{\alpha\beta} x'_\beta \quad (\alpha = 1, 2, \ldots),$$

dont les coefficients $p_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$ forment un système symétrique ».

En appliquant de même le théorème fondamental au cas où les formes A et B sont toutes deux alternées, on voit que :

« Toute forme bilinéaire alternée

$$A = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta, \quad \text{où} \quad a_{\alpha\beta} = -a_{\beta\alpha},$$

à déterminant $|a_{\alpha\beta}|$ différent de zéro, peut être transformée en une forme bilinéaire alternée

$$B = \sum b_{\alpha\beta} x'_\alpha y'_\beta, \quad \text{où} \quad b_{\alpha\beta} = -b_{\beta\alpha},$$

à déterminant $|b_{\alpha\beta}|$ différent de zéro, par des substitutions cogrédientes

$$x_\alpha = \sum_\beta q_{\alpha\beta} x'_\beta,$$

$$y_\alpha = \sum_\beta q_{\alpha\beta} y'_\beta,$$

dont les coefficients $q_{\alpha\beta} = -q_{\beta\alpha}$ forment un système alterné.

3. M. Frobenius parvient ensuite, par une voie très simple, au théorème capital de Kronecker :

« La condition nécessaire et suffisante pour que deux formes bilinéaires A et B puissent être transformées l'une dans l'autre par des substitutions cogrédientes est que les faisceaux de formes

$$uA + vA',$$
$$uB + vB',$$

où A' et B' désignent les formes conjuguées de A et de B, soient équivalents. »

Il observe aussi que sa méthode s'applique aux formes *orthogonales* A, B, formes pour lesquelles on a, comme on sait,

$$A' = A^{-1}, \quad B' = B^{-1}.$$

Il obtient ainsi une nouvelle démonstration du théorème déjà démontré dans le tome 84 du *Journal de Crelle :*

« Si deux formes symétriques, alternées ou orthogonales, A, B, sont *semblables*, c'est-à-dire peuvent être transformées l'une dans l'autre par des substitutions cogrédientes, de sorte qu'il existe une substitution P telle que l'on ait

$$P^{-1}AP = B,$$

elles sont aussi congrues et peuvent être transformées l'une dans l'autre par une substitution orthogonale ».

On peut d'ailleurs toujours s'arranger de façon que cette substitution orthogonale soit à volonté propre ou bien impropre (CAUCHY, *Exercices d'Analyse*, t. I, p. 53), sauf le cas d'exception où le déterminant ou fonction caractéristique de PP' serait un carré.

Ainsi, les recherches de M. Frobenius permettent, d'une part de parvenir aux théorèmes de Kronecker (*Sitzungsberichte*, 1874, 1890, 1891) par une voie plus simple que celle suivie par Kronecker lui-même et elles dispensent, d'autre part, de faire usage des considérations subtiles au moyen desquelles Weierstrass a pu, le premier, étudier à fond le cas où les formes bilinéaires sont symétriques.

Planck (*Max*). — Sur les oscillations électriques qui sont excitées par résonance et amorties par rayonnement. (151-170).

Mertens (*F.*). — Sur les sommes de Gauss. (217-219).

Si l'on désigne par S la somme

$$S = \sum_{s=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi s^2}{n}},$$

où n est supposé entier impair, il est aisé de voir que le carré de S est égal à

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} n;$$

il en résulte que S est égal à

$$S = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} R,$$

où R désigne l'une des deux racines carrées de n. La difficulté consiste à trouver celle de ces deux racines carrées de n qu'il faut prendre pour R.

Pour résoudre ce problème, M. Mertens sépare d'abord, dans l'expression

$$\sum_{s=0}^{2n-1} e^{\frac{i\pi s^2}{2n}}.$$

les termes pour lesquels l'indice s est pair, de ceux pour lesquels il est impair; la somme des premiers est manifestement égale à S, celle des seconds est égale à i^nS, comme on peut s'en assurer en les groupant convenablement; on a donc la relation

$$(1)\qquad \sum_{s=0}^{2n-1} e^{\frac{i\pi s^2}{2n}} = (1+i^n)\,\mathrm{S}.$$

Les deux relations

$$(2)\qquad \sum_{s=0}^{8n-1} e^{\frac{i\pi s^2}{8n}} = 2\sum_{s=0}^{2n-1} e^{\frac{i\pi s^2}{2n}},$$

$$(3)\qquad \sum_{s=0}^{8n-1} e^{\frac{i\pi s^2}{8n}} = 2\sum_{s=0}^{4n-1} e^{\frac{i\pi s^2}{8n}},$$

s'obtiennent aussi en groupant convenablement les termes de leurs premiers membres.

Comme n est impair, on a

$$(1+i^n)\,i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2} = 1+i;$$

les trois relations (1), (2), (3) entraînent donc la relation

$$(1+i)\,\mathrm{R} = (1+i^n)\,\mathrm{S} = \sum_{s=0}^{4n-1} e^{\frac{i\pi s^2}{8n}}$$

qui, si l'on y égale séparément les parties réelles et les parties purement imaginaires, fournit les deux égalités

$$(4)\qquad \mathrm{R} = \sum_{s=0}^{4n-1} \cos 8\varpi s^2, \qquad \mathrm{R} = \sum_{s=0}^{4n-1} \sin 8\varpi s^2,$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\varpi = \frac{\pi}{64n}.$$

Des relations

$$\sin(8s^2+2)\varpi = \frac{\sin^2[(2s+1)^2\varpi] - \sin^2[(2s-1)^2\varpi]}{\sin 8s\varpi}$$

qu'il est aisé de vérifier, et que l'on supposera écrites pour $s = 1, 2, \ldots, 4n-1$, on tire par addition la formule

$$\cos 2\varpi \sum_{s=1}^{4n-1} \sin 8s^2\varpi + \sin 2\varpi \sum_{s=1}^{4n-1} \cos 8s^2\varpi$$
$$= \frac{\sin^2(3^2.\varpi) - \sin^2(1^2.\varpi)}{\sin 8\varpi} + \frac{\sin^2(5^2.\varpi) - \sin^2(3^2.\varpi)}{\sin 16\varpi} + \ldots$$
$$- \frac{\sin^2[(8n-1)^2\varpi] - \sin^2[(8n-3)^2\varpi]}{\sin 8(4n-1)\varpi}$$

qui, en tenant compte des deux égalités (4), peut s'écrire

$$
\begin{aligned}
&R(\cos 2\varpi - \sin 2\varpi) \\
&\quad = \sin\varpi\left(\frac{\sin 2\varpi}{\sin\varpi} - \frac{\sin 3\varpi}{\sin 3\varpi}\right) + \sin(4\varpi)\left(\frac{1}{\sin 5\varpi} - \frac{1}{\sin 10\varpi}\right) \\
&\quad + \sin(6\varpi)\left(\frac{1}{\sin 11\varpi} - \frac{1}{\sin 24\varpi}\right) + \ldots \\
&\quad = \sin^2\left(\frac{8n-3}{4}\varpi\right)\left[\frac{1}{\sin 3\left(\frac{n-3}{4}\right)\varpi} - \frac{1}{\sin 3\left(\frac{n-1}{4}\right)\varpi}\right] \\
&\quad = \frac{\sin^2\left(\frac{3n-1}{4}\varpi\right)}{\sin\left(\frac{n-1}{4}\varpi\right)}.
\end{aligned}
$$

Or, chacun des termes du second membre est positif, puisque $\varpi = \frac{\pi}{64n}$; donc le premier membre

$$(\cos 2\varpi - \sin 2\varpi)R$$

est aussi positif, donc R est positif et, par suite, dans l'expression de S,

$$S = i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}R.$$

R désigne la racine carrée *positive* de n.

Helmert (*F.-R.*). — Résultats des mesures de l'intensité de la pesanteur effectuées sur la ligne Kolberg-Schneekoppe. (409-413).

De nouvelles mesures de l'intensité de la pesanteur viennent d'être effectuées sous la direction de l'Institut géodésique prussien, au moyen de pendules invariables battant la demi-seconde, en vingt-deux stations échelonnées entre Kolberg et Schneekoppe et reliées aux stations principales de Vienne et de Potsdam.

La mesure directe des latitudes astronomiques a permis de déterminer, en chacune de ces vingt-deux stations, la différence locale pour les latitudes, c'est-à-dire la valeur de la latitude astronomique diminuée de celle de la latitude géodésique. Cette différence locale est la plus grande aux altitudes les plus élevées; elle est toujours positive sauf à une seule station où elle est négative; elle atteint jusqu'à 18″,1.

Les mesures effectuées au moyen du pendule ont été réduites au niveau de la mer, en tenant compte de l'altitude, des inégalités de terrain et de l'attraction de la partie de la couche de niveau comprise entre la surface de niveau de la station et la surface de niveau des mers. Si g'' désigne la valeur observée de g ainsi corrigée et si γ_0 est la valeur de g déduite de la formule de M. Helmert

$$\gamma_0 = 9{,}7800(1 + 0{,}00530\sin^2\varphi),$$

où φ doit être remplacée par la latitude de la station, on observe, sur les Tableaux dressés par M. Helmert, que la différence

$$g'' - \gamma_0$$

varie de + 430 à — 250 millionièmes de mètre sans que l'on aperçoive bien nettement une relation entre la valeur plus ou moins grande de cette différence et l'altitude; ainsi à deux stations voisines, situées l'une à 177^m, l'autre à 180^m d'altitude, la différence $g'' - \gamma_0$ est respectivement de + 230 et de — 70 millionièmes de mètre. Cependant aux stations élevées situées dans la région de Schneekoppe elle est toujours *négative* et varie de — 90 à — 250 millionièmes de mètre. Il serait intéressant de voir ce que deviennent ces différences quand l'on remplace g'' par la valeur observée de g corrigée par la méthode de M. Faye; il n'en est pas fait mention dans la Communication de M. Helmert.

Frobenius (*G.*). — Sur les matrices échangeables. (601-614).

Désignons par

$$a = |a_{\alpha\beta}|$$

le déterminant d'une forme bilinéaire

$$A = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

On démontre aisément que, si a est différent de zéro, il existe une forme A^{-1} définie univoquement par chacune des deux relations

$$AA^{-1} = E, \qquad A^{-1}A = E,$$

où E désigne la forme bilinéaire

$$E = \Sigma x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

dont les coefficients sont tous égaux à 1; on dit que cette forme A^{-1} est la forme *inverse* de A et que la forme

$$aA^{-1},$$

que nous désignerons par $\bar{A}$, est la forme *adjointe* de A. Soient $b_{\alpha\beta}$ les coefficients de cette forme adjointe; $b_{\alpha\beta}$ est celui des mineurs du déterminant a qui correspond à l'élément $a_{\alpha\beta}$ de ce déterminant. Comme $\bar{A}$ est une fonction *entière* des éléments $a_{\alpha\beta}$, on peut aussi former $\bar{A}$ quand le déterminant a est nul. Enfin on a

$$A\bar{A} = \bar{A}A = aE.$$

On appelle *fonction caractéristique* de A et l'on désignera par $\varphi(r)$ la fonction de r obtenue en développant le déterminant dont les éléments sont les coefficients de la forme

$$rE - A;$$

l'équation

$$\varphi(r) = 0,$$

est l'*équation caractéristique* de A.

La forme adjointe de $rE - A$ est une forme F dont les coefficients sont des fonctions entières de r; si $\varphi(r)$ est de degré n en r, ces fonctions entières sont de degré $n - 1$. On a d'ailleurs

$$(rE - A)F = F(rE - A)$$

et

$$(rE - A)F = \varphi(r)E;$$

si l'on ordonne F suivant les puissances croissantes de r et si

$$F = F_0 + F_1 r + F_2 r^2 + \ldots + F_{n-1} r^{n-1},$$

on montre aisément que chacune des formes $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_{r-1}$ est échangeable avec A.

En désignant par B une seconde forme bilinéaire quelconque

$$B = \Sigma b_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, n),$$

et en posant

$$F(B) = F_0 + F_1 B + F_2 B^2 + \ldots + F_{n-1} B^{n-1},$$

on a

$$-AF(B) + F(B)B = \varphi(B).$$

Dans le cas particulier où B est échangeable avec chacune des formes F_0, $F_1, \ldots, F_{r-1}$, on a donc la relation

$$(B - A)\, F(B) = \varphi(B).$$

Plus particulièrement encore, si B = A, on a donc la relation

$$\varphi(A) = 0;$$

c'est là un théorème fondamental de la théorie des formes bilinéaires qui est dû à Cayley (*Phil. Trans.*, t. CXLVIII).

Un second théorème fondamental de cette même théorie est le suivant :

« Si l'on désigne par $\theta(r)$ le plus grand commun diviseur de tous les mineurs de degré $n-1$ du déterminant qui définit la fonction caractéristique $\varphi(r)$ de A, et si l'on pose

$$\psi(r) = \frac{\varphi(r)}{\theta(r)},$$

l'équation

$$\psi(A) = 0$$

est l'équation de degré le moins élevé possible à laquelle satisfait A; si l'on peut démontrer qu'une fonction $\chi(r)$ s'annule pour $r = A$, cette fonction $\chi(r)$ est nécessairement divisible par $\psi(r)$. Une puissance de $\psi(r)$ est divisible par $\varphi(r)$. »

Ce théorème est dû à M. Frobenius qui l'a démontré dans le t. 84 du *Journal de Crelle*, en s'appuyant sur le développement en série de $(rE - A)^{-1}$. Mais on peut aussi le démontrer sans faire usage de ce développement en série; c'est ce que M. Lipschitz avait déjà montré dans le cas particulier où $\psi(r)$ est un diviseur de $r^m - 1$ (Lipschitz, *Acta Math.*, t. X; *comparez* aussi Kronecker, *Sitzungsberichte*, 1890); c'est ce que M. Frobenius montre maintenant dans le cas général. Il convient de rappeler que M. Weyr avait déjà donné une autre démonstration de ce second théorème fondamental dans tous les cas (*Monatshefte für Mathematik und Physik*, t. I).

2. M. Frobenius reproduit ensuite la démonstration qu'il a donnée dans le t. 84 du *Journal de Crelle* du théorème suivant :

« Si une forme B est échangeable avec une forme A dont une puissance est

nulle, le déterminant de la forme $A - B$ est égal au déterminant de la forme B. »

On rappelle que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une puissance d'une forme A soit nulle est que les racines de l'équation caractéristique de A soient toutes nulles.

Ce théorème permet de se passer de la théorie des diviseurs élémentaires de Weierstrass pour effectuer la démonstration des théorèmes suivants :

3. « Si $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont les racines de l'équation caractéristique d'une forme A, les racines de l'équation caractéristique de la forme $f(A)$, où f désigne une fonction entière quelconque, sont $f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n)$. »

En s'appuyant sur ce théorème déjà démontré par M. Frobenius dans le t. 84 du *Journal de Crelle*, on peut aussi montrer que :

« Si A et B désignent deux formes échangeables et si x, y désignent deux variables, les racines de l'équation caractéristique de la forme $Ax + By$ sont des fonctions linéaires entières de x et de y. »

Des deux théorèmes que nous venons d'énoncer, on peut ensuite déduire le théorème général suivant qui les contient tous deux comme cas particuliers :

« Si $f(x, y, z, \ldots)$ désigne une fonction quelconque des m variables $x, y, z, \ldots$ et si A, B, C, ... représentent m formes dont deux quelconques soient échangeables, si enfin $a_1, a_2, a_3, \ldots$ désignent les racines de l'équation caractéristique de A; $b_1, b_2, b_3, \ldots$ les racines de l'équation caractéristique de B; $c_1, c_2, c_3, \ldots$ les racines de l'équation caractéristique de C, etc.; on peut ranger ces racines, et cela indépendamment de la fonction f envisagée, dans un ordre tel que le déterminant de la forme $f(A, B, C, \ldots)$ soit égal au produit

$$f(a_1, b_1, c_1, \ldots) f(a_2, b_2, c_2, \ldots) f(a_3, b_3, c_3) \ldots \text{ ».}$$

Ce théorème est d'ailleurs identique au suivant qui paraît d'abord plus général :

« On peut ranger les racines $a_1, a_2, a_3, \ldots; b_1, b_2, b_3, \ldots$ des équations caractéristiques de A, B, ... dans un ordre tel que les quantités

$$f(a_1, b_1, c_1, \ldots), \quad f(a_2, b_2, c_2, \ldots), \quad f(a_3, b_3, c_3, \ldots), \quad \ldots,$$

soient les racines de l'équation caractéristique de la forme $f(A, B, C, \ldots)$. »

4. De ce théorème, on déduit des conséquences importantes pour la théorie des formes. Ainsi, en désignant par $A_1, A_2, \ldots, A_m$ des formes dont deux quelconques soient échangeables, de sorte que l'on ait

$$A_\gamma A_\delta = A_\delta A_\gamma \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots, m;\ \delta = 1, 2, \ldots, m),$$

et par

$$a_{\alpha\beta\gamma} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

les n^2 coefficients de la forme A_γ, où γ est un quelconque des nombres 1, 2, ..., m, on a, pour chaque couple d'indices γ, δ, où $\gamma = 1, 2, \ldots, m$;

$\delta = 1, 2, \ldots, m$, la relation

$$\sum_{\gamma=1}^{m} a_{\alpha\beta\gamma} a_{\gamma\delta} = \sum_{\gamma=1}^{m} a_{\alpha\gamma\delta} a_{\gamma\beta}.$$

Si $r, x_1, x_2, \ldots, x_m$ désignent des variables indépendantes et si $r_\gamma^{(1)}, r_\gamma^{(2)}, \ldots, r_\gamma^{(n)}$ sont les racines de l'équation caractéristique de la forme Λ, le déterminant dont les éléments sont les coefficients de la forme

$$\sum_{\gamma=1}^{m} \Lambda_\gamma x_\gamma - rE,$$

est égal à

$$\prod_{k=1}^{n} (r_1^{(k)} x_1 + r_2^{(k)} x_2 + \ldots + r_m^{(k)} x_m - r).$$

Ce théorème ne diffère que par la forme du théorème fondamental de la théorie des nombres complexes formés au moyen de n unités, théorème d'où toute cette théorie découle sans difficulté, comme l'a fait voir M. Dedekind en 1885 (*Göttinger Nachrichten*).

Si, en particulier, m est égal à n et si les quantités $a_{\alpha\beta\gamma}$ et $a_{\alpha\gamma\beta}$ sont égales, les coefficients $r_i^{(k)}$ des facteurs linéaires que nous venons d'écrire et dans lesquels se décompose le déterminant envisagé, vérifient les équations

$$r_\beta r_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, n;\ \gamma = 1, 2, \ldots, n),$$

et sont les seules solutions de ces équations.

On peut aussi déduire du théorème général du n° 3 le théorème suivant dû à M. Dedekind :

« Si les n^3 quantités $a_{\alpha\beta\gamma}$ vérifient les équations

$$a_{\alpha\beta\gamma} = a_{\alpha\gamma\beta}, \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\alpha\gamma\lambda} a_{\lambda\beta\delta} = \sum_{\lambda=1}^{n} a_{\alpha\beta\lambda} a_{\lambda\gamma\delta}$$

et si le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre dont les éléments sont les quantités

$$c_{\alpha\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta\gamma} a_{\alpha\beta\alpha} - \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} a_{\alpha\alpha\beta} a_{\alpha\beta\gamma}$$

est différent de zéro, le nombre de solutions différentes des équations

$$r_\beta r_\gamma = \sum_{\alpha=1}^{n} a_{\alpha\beta\gamma} r_\alpha,$$

dans lesquelles $r_1, r_2, \ldots, r_n$ désignent les inconnues, est égal à n. Si l'on dé-

signe ces n solutions par

$$r_1^k, \quad r_2^k, \quad \ldots, \quad r_n^k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

le déterminant

$$\begin{vmatrix} r_1^1 & r_2^1 & \ldots & r_n^1 \\ r_1^2 & r_2^2 & \ldots & r_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^n & r_2^n & \ldots & r_n^n \end{vmatrix}$$

est différent de zéro.

On obtient également, comme conséquence du même théorème général, le théorème de Weierstrass d'après lequel la condition nécessaire et suffisante pour que ce dernier déterminant soit nul, est que, dans le faisceau de formes

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n,$$

il y ait une forme dont une puissance soit nulle, sans que cette forme elle-même le soit.

Busse (*F.*). — Sur la correspondance univoque de deux parties de surfaces telles qu'à toute ligne géodésique de l'une des deux surfaces corresponde une ligne à courbure géodésique constante de l'autre surface. (651-664).

Beltrami et Dini ont étudié (*Annali di Mathematica*, t. VII et 2e série, t. III) la correspondance univoque de deux parties de surfaces telles, qu'à toute ligne géodésique de l'une des surfaces corresponde une ligne géodésique de l'autre surface. M. Busse se propose de rechercher plus généralement sous quelles conditions on peut faire correspondre univoquement deux parties de surfaces réelles S et Σ, de façon que, à toute ligne géodésique de S corresponde une ligne à courbure géodésique constante de Σ.

Les coordonnées x, y, z des points de la surface Σ sont envisagées comme des fonctions de deux paramètres imaginaires u et v tels que, si $d\sigma$ est la longueur de l'élément linéaire tracé sur cette surface, on ait

$$d\sigma^2 = \varphi(u, v)\, du\, dv;$$

si l'on envisage les coordonnées x, y, z des points de la surface S comme des fonctions des mêmes paramètres u, v, le carré de la longueur ds de l'élément linéaire tracé sur cette surface sera donné par la formule générale

$$ds^2 = E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2,$$

et les points correspondants des deux surfaces Σ et S seront les points dont les coordonnées correspondent sur ces deux surfaces aux mêmes paramètres u et v.

L'équation différentielle des lignes à courbure géodésique constante de la surface Σ est

$$\frac{d^2 v}{du} - \frac{3}{2}\frac{\left(\frac{d^2 v}{du^2}\right)^2}{\frac{dv}{du}} - v'\left[\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{du^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{d\log\varphi}{du}\right)^2\right] - v^3\left(\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dv^2} - \frac{3}{2}\frac{d\log\varphi}{dv}\right) = 0.$$

tandis que l'équation différentielle des lignes géodésiques de la surface S est de la forme

$$\frac{d^2v}{du^2} = A + B\frac{dv}{du} + C\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + D\left(\frac{dv}{du}\right)^3,$$

où A, B, C, D sont des fonctions de E, F, G et de leurs dérivées premières par rapport à u et v.

D'après les conditions imposées, il faut et il suffit que l'équation que l'on obtient en remplaçant dans la première de ces deux équations différentielles $\frac{d^2v}{du^2}$ et $\frac{d^3v}{du^3}$ par leurs valeurs tirées de la seconde équation différentielle, soit identiquement vérifiée en $\frac{dv}{du}$. Il faut donc et il suffit que l'on ait, comme on s'en assure par un calcul facile, les cinq relations

$$A = 0, \qquad D = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{1}{2}B^2 = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial u}\right)^2,$$

$$\frac{\partial C}{\partial v} = \frac{1}{2}C^2 = \frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{\partial \log\varphi}{\partial v}\right)^2.$$

M. Busse démontre d'ailleurs que ces cinq relations ne peuvent être vérifiées simultanément que si l'on a :

1° Ou bien

$$A = 0, \qquad B = \frac{\partial \log\varphi}{\partial u}, \qquad C = -\frac{\partial \log\varphi}{\partial v}, \qquad D = 0,$$

et l'on peut prendre, dans ce cas, pour le coefficient φ de $du\,dv$ qui figure dans l'expression de $d\sigma^2$ et dans ces relations, une fonction quelconque de u et de v prenant des valeurs positives réelles quand u et v sont imaginaires conjuguées;

2° Ou bien

$$A = 0, \qquad B = \frac{\partial \log f(u+v)}{\partial u}, \qquad C = -\frac{\partial \log f(u+v)}{\partial v}, \qquad D = 0,$$

où $f(u+v)$ désigne une fonction quelconque de $u+v$ prenant des valeurs réelles positives pour des valeurs réelles de $u+v$. Dans ce dernier cas, le coefficient $\varphi(u, v)$ de $du\,dv$ qui figure dans l'expression

$$d\sigma^2 = \varphi(u, v)\,du\,dv$$

est égal à la fonction φ de $u+v$ définie par la relation

$$\varphi = \frac{f(u+v)}{[c + \int f(u+v)\,d(u+v)]^2},$$

où c désigne une constante arbitraire.

Si l'on interprète géométriquement ce résultat, on voit que si la surface S n'est pas applicable sur une surface de révolution, les seules surfaces possibles Σ

répondant à la question sont : 1° les surfaces de Dini S_1, qui correspondent univoquement à S, de façon qu'à toute ligne géodésique de S corresponde une ligne géodésique de ces surfaces et inversement, et 2° les surfaces qui sont applicables sur ces surfaces de Dini S_1. Si, au contraire, la surface S est applicable sur une surface de révolution, il y a, outre ces surfaces de Dini, d'autres surfaces Σ répondant à la question; ce sont les surfaces Σ dont les surfaces de Dini S_1 sont des images obtenues par des représentations conformes telles qu'à chaque ligne géodésique d'une surface de Dini S_1 corresponde une ligne à courbure géodésique constante, en général non nulle, de Σ. Ces surfaces Σ et les surfaces de Dini S_1 sont d'ailleurs les seules répondant à la question.

On démontre aussi qu'à toute ligne à courbure géodésique constante de l'une des deux surfaces Σ et S_1, dont la seconde est l'image de la première obtenue par la représentation conforme précédente, correspond une ligne à courbure géodésique constante de l'autre surface. Les seules surfaces jouissant de ce mode de correspondance univoque sont d'ailleurs les surfaces dont l'une est l'image de l'autre obtenue par ce mode de représentation conforme.

Il est intéressant d'appliquer les résultats précédents aux surfaces S à courbure constante. Beltrami et Dini avaient déjà montré que l'ensemble des surfaces Σ, telles que, à chaque ligne géodésique de la surface S à courbure constante, corresponde une ligne géodésique de Σ, est formé par l'ensemble des surfaces S_1 à courbure constante et par celles-là seulement. D'après le théorème général démontré par M. Busse, l'ensemble des surfaces Σ telles que, à chaque ligne géodésique de la surface S à courbure constante corresponde une ligne à courbure géodésique constante de Σ, est formé par les surfaces précédentes S_1 à courbure constante et par les surfaces Σ dont une quelconque de ces surfaces S_1 puisse être envisagée comme l'image obtenue par représentation conforme effectuée de façon qu'à chaque ligne géodésique de S_1 corresponde une ligne à courbure géodésique constante de Σ. M. Busse évalue la longueur d'un arc de courbe élémentaire tracé sur ces dernières surfaces Σ et en déduit que, comme dans le problème de Beltrami-Dini, ces dernières surfaces se confondent avec les surfaces S_1 : on voit, en effet, que leur courbure est constante.

On déduit de ce théorème des propositions particulièrement simples, en prenant pour S, soit un plan, soit une sphère.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XXII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XXII; 1898. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Acta Mathematica. T. XVIII, 1894; T. XIX, 1895. — 60-78, 213-230.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 3e série, t. XIII, 1896. — 5-22.

Archives néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. T. XXVIII, 1895. — 115-116.

Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. XXVI, 1891-92. — 189-206.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. XXIV, 1896; T. XXV, 1897. — 22-35, 180-189.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXXIII, 1896; t. CXXIV, 1897. — 35-60, 125-150.

Handelingen van het Nederlansch Natuur-en Geneeskundig Congres. 1891. — 116-125.

Memorie della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. 5e série. T. IV, 1894. — 207-212.

Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1er semestre 1895; 1er semestre 1896. — 150-179, 231-243.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. T. III, 1896. — 108-114.

Verslag der Zittingen van de Wis-en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. T. III, mai 1894-avril 1895. — 89-107.

Zeitschrift für Mathematik und Physik. 36e année, 1891. — 79-89.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Adam (P.). 24.
Ahrendt (A.). 80.
Allersma (T.-J.). 123.
Almansi (A.). 206.
Andoyer. 48.
Andrade. 182.
André (D.). 29.
Appell (P.). 128, 134, 148, 181.
Arzelà (C.). 208, 210, 212.
Aschieri (T.). 190, 192.
Autonne. 127.
Bachmann. 83.
Baggi (V.). 197.
Baillaud. 141.
Bakhuis Roozeboom (H.-W.). 115.
Balbi (V.). 195, 206.
Baller (V.). 202.
Basso (G.). 189, 192.
Bendisson. 35.
Berrutti (G.). 193, 195.
Bertini (E.). 197.
Bes (K.). 112.
Bettazzi (R.). 203, 204.
Beudon. 22, 139, 185.
Bezzolari (L.). 201, 204.
Bleyel. 85, 87.
Bianchi (L.). 200.
Bierens de Haan (D.). 111.
Binder. 80.
Borel (E.). 8, 43, 44, 55, 140.
Bosscha (J.). 116, 124.
Boulanger. 143, 181.
Bourget (H.). 147.
Bourlet. 132, 148, 186.
Boussinesq. 35, 36, 38, 144, 146, 147, 149.
Bricard. 53, 185, 187, 188.
Brioschi (F.). 138, 203.
Brünn (H.). 85, 87.
Burali-Forti (C.). 194, 196.
Burkhardt (H.). 89.
Cardinaal (J.). 117, 122, 125.
Cartan. 30, 144, 146.
Carvallo. 32.
Castellano (Ph.). 194.
Castellano (F.). 193.
Castelnuova (G.). 193.
Chini (M.). 197, 205.
Cordone (G.). 205.
Cosserat (E.). 141, 142, 147.
Cotton. 52, 142.
Cousin (P.). 213.
Craig. 44, 48.
Curtze (Maximilian). 84.
Darboux, 147.
Delassus. 14, 18, 43, 58.
Del Re (A.). 192.
Demoulin. 143, 184.
Desaint. 130, 142.
Dietrichkeit. 80, 82, 83.
Di Piro. 57.
Disteli (M.). 81.
Doehlmann (K.). 83.
Dojes (P.-H.). 108.
Donati (L.). 209.
Dörr (J.). 88.
Dumont (E.). 184.
Dumont (F.). 188.
Duplaix. 47.
Duporcq. 33, 135.
Duport (H.), 28, 34, 187.
Dupuy (Paul). 11.
Ekama (H.). 111.
Enriques (F.). 194.
Escher (R.-J.). 183.
Fabri (C.). 208.
Fabry. 10, 16, 48, 127.
Fano (G.). 195, 205.
Favaro (A.). 202.
Ferraris (G.). 202.
Fontené. 21, 188.
Fouché (Éd. et M.). 36.
Frobenius (G.). 151, 169, 170, 231, 237.
Fuchs (L.). 39, 163.
Garbasso (A.). 191.

Gegenbauer (L.). 103, 109.
Gleichen (A.). 82.
Godefroy (A.-N.). 113.
Goursat. 36, 46, 140, 146, 181, 185.
Grévy. 13, 83.
Grinwis (C.-H.-C.). 119, 120.
Grübler (M.). 85.
Grünfeld (E.). 79.
Guarducci (F.). 190.
Guichard. 13, 83.
Guidice (F.). 191, 192, 193.
Gutzmer (A.). 88.
Guyou. 46.
Haas (K.). 85.
Hadamard (J.). 33, 34, 36, 74, 78, 135, 149.
Haeuser (G.). 80.
Hauch (G.), 83.
Haure. 10.
Heiberg (J.-L.). 88.
Helm (G.). 86.
Helmert (F.-R.). 236.
Hensel (K.). 72, 167, 174.
Heymann (W.). 83, 85.
Hilbert (D.). 67.
Hossfeld (C.). 88.
Hurwitz (A.). 228.
Isenkrahe (C.). 89.
Issaly (l'abbé). 188.
Jadanza (N.). 190, 191, 199, 201.
Jalinke (E.). 86.
Jamet. 8.
Janssen van Raay (W.-H.). 124.
Jekel (A.). 114.
Jonquières (de). 40, 42, 131.
Julius (V.-A.). 115.
Kamerlingh Onnes (H.). 116.
Kantor (S.). 193, 217.
Kapteyn (W.). 101, 108, 113, 117, 120, 124.
Kapteyn (J.-C.). 92, 95.
Kempe (A.). 113, 114, 123,
Kleiber (J.). 83, 85.
Kluyver (J.-C.). 110, 114, 118, 120, 124.
Koch (H. von). 75.
Korkine. 35.
Korteneg (D.-J.). 114, 116, 119.
Kosch (F.). 81.
Kötter (F.). 160.
Kraus (J.). 87.
Krediel (C.). 114.
Kröncecker (L.). 151.
Krygonowski. 188.
Kuenen (J.-P.). 90, 93.
Kurz (A.). 87.
Lacour. 18.
Laisant. 33, 34, 187.
Landré (C.-L.). 122.
Larose. 31.
Laurentz (H.-A.). 94, 100, 102, 104.
Lauricella (G.). 206.
Lebret (A.). 92.
Lecornu (L.). 29, 37, 145, 186, 187, 220.
Lémeray. 48, 144, 182, 185.
Le Roux. 56, 127, 183.
Le Roy. 53, 59, 150.
Lessona (M.), Ovidio (E. d'). 191.
Lévi (A.). 205.
Lévi-Civita. 133, 148, 202, 206.
Liapounoff. 58.
Lindelöff. 25, 63.
Liouville. 50, 125.
Lœwy (Alfred). 38.
Lohnstein (Th.). 84.
Lucas (Félix). 181.
Maffiotti (G.-B.). 190.
Maillet. 28, 133, 181, 187.
Manaira (A.). 193.
Mangeot. 28, 183.
Mangoldt (von). 7.
Marotte. 49, 51, 138.
Marchesani (D.). 191.
Markoff (A.). 215.
Mannheim. 33, 52, 184.
Mantel (W.). 113.
Meerburg (J.-H.). 116.
Mehmke (R.). 79, 81, 86, 87.
Mertens (F.). 234.
Meyer (F.). 230.
Michaelis (G.-J.). 121.
Michel. 24.
Mie (G.). 86.
Miller. 36, 149.
Minkowsky. 6.
Mittag-Leffler (G.). 71.
Molenbrock (P.). 119, 122, 125.
Montell (de). 130.
Montesano (D.). 191.
Moors (B.-P.). 114.
Mortara (F.). 194.
Moutard. 136.
Müller (R.). 79, 80, 81, 82, 86, 87.
Muth (P.). 85.
Nesselmann (G.-H.-L.). 88.
Netto (E.). 216.
Neuberg (J.). 122, 123.
Ocagne (d'). 27, 28, 33, 54, 59, 186.
Ortt (F.-L.). 125.
Oudemans (J.-A.-C.). 90.
Ovazzia (E.). 190, 202.
Ovidio (E. d'). 191, 192, 193, 195.
Paci (P.). 195.
Padé. 63.
Painlevé. 36, 41, 45, 50, 126, 128, 129, 145, 146.

Pastore (G.). 189.
Peano (G.). 189, 191, 195, 198, 201, 202.
Pellet. 134, 136, 141, 146.
Pépin (le P.). 47.
Petrovitch. 27, 144, 188.
Picard (Ém.). 55, 65, 129, 134, 135, 149, 181.
Pieri (M.). 190, 192, 199, 203.
Philippoff (M.). 87.
Pincherle (S.). 201, 207, 209, 211.
Pirogow (N.-N.). 87.
Pizzetti (P.). 196, 206.
Plank (Max). 159, 234.
Poincaré. 51, 54, 58, 140, 145, 146.
Predella (P.). 190.
Quint (N.). 122.
Raffy. 22, 26, 32, 183, 186.
Rasch (J.-W.). 114.
Reina (V.). 190, 195.
Riccardi (P.). 212.
Richter (O.). 79, 81.
Richter (P.-B.). 86.
Rieke (A.). 82.
Righi (A.). 209, 212.
Riquier. 134.
Ritter (E.). 84.
Rizzo (G.-B.). 206.
Rodenberg (C.). 82, 87, 88.
Rudio (F.). 84.
Ruffini (F.-P.). 207, 209.
Ruoss. 86, 88.
Saalschütz (L.). 82, 88.
Salvert (de). 143.
Saporetti (A.). 207, 210, 212.
Saussure (de). 47, 148.
Scheltema (C.-A.). 122.
Schendel (L.). 80, 83.
Schlömich, 81.
Schols (Ch.-M.), 89.
Schönemann (G.). 86.
Schoute (P.-H.). 89, 91, 96, 105, 114, 116, 122.
Schouten (G.). 119.
Schreinemakers (F.-A.-H.). 115.
Segre (C.). 204.
Séguier (de). 38.
Selivanoff (D.). 215.
Serret (P.). 42.
Siacci. 41.
Siertsema (L.-H.). 104.
Stekloff, 59.
Speckmann (G.). 85, 86.
Sporer (B.). 83, 84, 85, 87, 88.
Stephanos, 186.
Stockel. 46.
Stoltz (K.). 83.
Störmer (C.). 227.
Stouff (X.). 5, 42.
Tannery (Paul). 88.
Tchebychew (P.). 64.
Tesch (J.-W.). 123.
Thieme (H.). 83.
Thomae (J.). 79, 80.
Thybault. 40.
Touche. 25, 185.
Tresse. 60.
Vaes (F.-J.). 123, 124.
Vahlen (K.-Th.). 219, 220.
Van de Griend (J.). 125.
Van Dorsten (R.-H.). 122.
Van der Berg (I.-J.). 111, 118.
Van der Waals (J.-D.). 90, 91, 92, 101, 106, 107, 115, 116.
Van de Sande Bakhuysen (H.-G.). 100, 106, 107.
Van Elfrinkhof (L.). 112, 121, 125.
Van Overem Jr. (M.). 109.
Van Thyn (A.). 114.
Van Wettum (Th.-B.). 111.
Vivanti (G.). 79, 84.
Vogel (C.). 150,
Volterra (V.). 67, 196, 197, 198, 199, 201, 202, 203, 205, 206.
Von Bezold. 160, 179.
Von Weber. 40, 144.
Vries (J. de). 89, 90, 91, 93, 94, 96, 97, 104, 105, 107, 112, 118, 121, 123.
Wappler (E.). 88.
Weihrauch (K.). 79, 80.
Wien (W.). 160.
Wiman (A.). 215.
Wimmer (B.). 81.
Wind (C.-H.). 90, 107.
Wittenbauer (F.). 82.
Wittstein (A.). 88.
Zanotti Bianco (O.). 206.
Zantschewsky, 11.
Zaremba. 24, 136, 142.
Zeman (P.). 123.
Zenger (K.-W.). 79.
Zwiers (H.-J.). 109.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XXII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
25401 Quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 33

Bulletin des sciences
mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY